الفرقة الثانية – قسم الاقتصاد (عربي)
رياضة للاقتصاديين

مجموعة تمارين (4)

1. **فصل دراسي به 5 طلاب (A,B,C,D,E) يدرسون 4 مواد مختلفة (K,L,M,N). إذا حصل الطالب A علي 10 درجات، 9 درجات، 10، درجات، 7 درجات في المواد الأربع علي التوالي وحصل الطالب B علي 9 درجات، 5 درجات، 7 درجات، 6 درجات في المواد الأربع علي التوالي وحصل الطالب C علي 8 درجات، 8 درجات، 9 درجات، 10 درجات في المواد الأربع علي التوالي وحصل الطالب D علي 5 درجات، 4 درجات، 8 درجات، 5 درجات في المواد الأربع علي التوالي**
   وحصل الطالب E علي 8 درجات، 7 درجات، 10 درجات، 9 درجات في المواد الأربع علي التوالي.
   أ) ضع البيانات السابقة في صورة مصفوفات.
   ب) بين كيف يمكن الحصول علي مجموع درجات كل طالب باستخدام المصفوفات.
   ت) بين كيف يمكن الحصول علي مجموع الدرجات في كل مقرر باستخدام المصفوفات.

2. **شركة تقوم بتصنيع سلعة معينة في مصنعين مختلفين A, B باستخدام 3 عناصر من عناصر الإنتاج (F,G,H). المصنع الأول يستخدم 10 وحدات، 20 وحدة، 15 وحدة من العناصر الثلاثة علي التوالي لإنتاج 30 وحدة من المنتج. المصنع الثاني يستخدم 20 وحدات، 20 وحدة، 10 وحدة من العناصر الثلاثة علي التوالي لإنتاج 40 وحدة من المنتج. إذا علمت أن تكلفة الوحدة الواحدة من المواد الخام الثلاثة هي 2 جنية، 3 جنية، 5 جنية علي التوالي وأن سعر بيع الوحدة من المنتج تساوي 20 جنية.**
   أ) استخدم المصفوفات لبيان الوحدات اللازمة من عناصر العمل في المصنعين.
   ب) أستخدم المصفوفات لبيان كمية الإنتاج في المصنعين.
   ت) استخدم المصفوفات لبيان تكلفة عناصر الإنتاج.
   ث) بين كيف يمكن استخدام المصفوفات لإيجاد تكلفة الإنتاج بالشركة.
   ج) بين كيف يمكن استخدام المصفوفات لإيجاد الإيراد الكلي للشركة.
   ح) بين كيف يمكن استخدام المصفوفات لإيجاد الربح الكلي للشركة.

3. **أوجد رتبة كل مصفوفة من المصفوفات التالية:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

4. **اقتصاد ما يتكون من قطاعين ، فإذا علمت أن مصفوفة ليونتيف لهذا الاقتصاد هي** $\begin{pmatrix} 0.7 & -0.3 \\ -0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$ **والمطلوب:**

Prof Ahmed Gad

أ) ما هي احتياجات القطاع الأول من القطاع الثاني لكي ينتج وحدة واحدة؟
ب) إذا علمت أن الطلب النهائي علي كل قطاع هو 60 و 80 وحدة علي التوالي، فما هو الناتج الكلي المطلوب لمواجهة هذا الطلب؟

5. الجدول التالي يبين حجم المبيعات (بالوحدات) لثلاثة منتجات لشركة تمتلك ثلاثة أفرع في السنة الحالية

المنتج	X	Y	Z
الفرع 1	1000	500	750
الفرع 2	750	400	600
الفرع 3	100	50	80

أ) أكتب البيانات السابقة في صورة مصفوفة للمبيعات A.
ب) إذا كان سعر بيع الوحدة من المنتج X تساوي 10 جنية ومن المنتج Y تساوي 12 جنية ومن المنتج Z تساوي 18 جنية. بين هذه البيانات في صورة مصفوفة ومنها أوجد قيمة الإيراد لكل فرع من الأفرع الثلاثة.
ت) إذا علمت أن تكلفة الوحدة الواحدة من كل منتج من المنتجات الثلاثة هي 8 و 11 و 15 جنية علي الترتيب. أستخدم المصفوفات لإيجاد تكلفة الإنتاج في كل فرع من فروع الشركة.
ث) أوجد الربح لكل فرع من أفرع الشركة.
ج) أوجد مصفوفة تحدد السعر والتكلفة والربح لكل منتج من المنتجات الثلاثة.
ح) إذا قررت الشركة أن تزيد المبيعات بنسبة 10% لكل منتج في كل فرع في السنة القادمة. بين كيف يمكن استخدام المصفوفات لإيجاد مصفوفة المبيعات في العام القادم وما هي هذه المصفوفة.

6. شركة تنتج ثلاثة منتجات A, B, C للبيع لثلاث جهات: السوق المحلي وللتصدير وللشركات الأخرى. في العام السابق كانت المبيعات للسوق المحلي تساوي 50 و 60 و 80 وحدة من المنتجات الثلاثة علي الترتيب. مبيعات التصدير كانت 25 و 40 و 20 وحدة من المنتجات الثلاثة علي الترتيب. المبيعات للشركات الأخرى كانت 10 و 20 و 30 وحدة علي الترتيب من كل منتج. في هذا العام من المتوقع أن تزيد مبيعات السوق المحلي بنسبة 5% ومبيعات التصدير بنسبة 10% والمبيعات للشركات الأخرى تظل كما هي بدون تغيير. تقوم الشركة ببيع المنتج A بسعر 3 جنية والمنتج B بسعر 4 جنية والمنتج C بسعر 5 جنية في جميع الأسواق. تكلفة الإنتاج للمنتجات الثلاثة هي 2 و 3 و 4 جنية علي الترتيب. أستخدم المصفوفات لإيجاد ما يلي
أ) متجه الربح للسنة السابقة.
ب) متجه الربح المتوقع لهذا العام.
ت) إذا كان من المتوقع أن تزيد المبيعات هذا العام بنسبة 10% وكان مستوى الربح كما هو فما هي الأسعار التي يجب أن تحددها الشركة.

7. إذا أعطيت المصفوفات التالية

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 5 & -1 & 6\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}7 & 2 & 3\\ -1 & 2 & 2\\ 5 & 9 & 1\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Prof Ahmed Gad

أوجد ما يلي (إن أمكن)

$$AC, AB, BA, A', C', A'C', (CA)', A^{-1}, B^{-1}, (AB)^{-1}, (BA)^{-1}, A^{-1}B^{-1}, B^{-1}A^{-1}, |AC|, 3|B|, 5A-3B$$

8. إذا كانت مصفوفة المدخلات والمخرجات في اقتصاد من 3 صناعات هي

$$A=\begin{pmatrix}0.25 & 0.30 & 0.20\\ 0.20 & 0.30 & 0.20\\ 0.40 & 0.10 & 0.25\end{pmatrix}$$

حيث الصفوف تمثل المنتجين والأعمدة تمثل المستهلكين، وكان الطلب غير الصناعي هو 100 و 60 و 150 مليون جنية علي الترتيب.

أ) حدد مستوي الناتج التوازني للصناعات الثلاثة.

ب) حدد الطلب بين الصناعات للصناعات الثلاثة.

9. أوجد مصفوفة المرافقات للمصفوفات

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-12 & 3 & -6\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

10. أوجد مقلوب المصفوفات التالية

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-12 & 3 & -6\\ 3 & 2 & 1\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

11. أوجد حل مجموعة المعادلات التالية

$$2x-3y+z=1$$
$$x+y+z=2$$
$$3x-4z=17$$

12. حدد نوع الحل لمجموعة المعادلات التالية (أوجد الحل إذا كان الحل وحيدا)

$$y=4$$
$$8x+3y=12$$

13. حدد نوع الحل لمجموعة المعادلات التالية (أوجد الحل إذا كان الحل وحيدا)

$$x+2y-z=2$$
$$2x-z=-1$$
$$2x+4y-2z=4$$

Prof Ahmed Gad

14. حدد نوع الحل لمجموعة المعادلات التالية (أوجد الحل إذا كان الحل وحيدا)

$$x+2y-z=2$$
$$2x-z=-1$$
$$2x+4y-2z=2$$

15. إذا كانت مصفوفة المعاملات لثلاثة صناعات هي

$$A=\begin{pmatrix}0.5 & 0 & 0.2\\ 0.2 & 0.8 & 0.12\\ 1 & 0.4 & 0\end{pmatrix}$$

إذا كان الطلب غير الصناعي للصناعات الثلاثة هو 5 و 3 و 4 جنية علي الترتيب. حدد مستوي الناتج التوازني للصناعات الثلاثة.

16. أوجد حل المعادلات الخطية التالية باستخدام المصفوفات:

1) $\begin{matrix}6x+5y=49\\ 3x+4y=32\end{matrix}$ **(Ans.: 4, 5)** **2)** $\begin{matrix}4x+3y=28\\ 2x+5y=42\end{matrix}$ **(Ans.: 1, 8)**

3) $\begin{matrix}2x+4y-3z=12\\ 3x-5y+2z=13\\ -x+3y+2z=17\end{matrix}$ **(Ans.: 7, 4, 6)** **4)** $\begin{matrix}4x+y-5z=8\\ -2x+3y+z=12\\ 4x-y+4z=7\end{matrix}$ **(Ans.: 2, 5, 1)**

17. أوجد مقلوب المصفوفات التالية:

a) $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ **b)** $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ **c)** $A=\begin{bmatrix}5/7 & -37/7 & 25/7\\ -2/7 & 26/7 & -17/7\\ -2/7 & 5/7 & -3/7\end{bmatrix}$

Answers:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{bmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix}2/3 & 1/3 & -1/3\\ -1 & 0 & 1\\ 1/3 & -1/3 & 1/3\end{bmatrix} \qquad A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 5\\ 6 & 7 & 8\end{bmatrix}$$

18. بافتراض وجود اقتصاد مكون من ثلاث قطاعات وبمعلومية مصفوفة المعاملات الفنية التالية:

$$\begin{bmatrix}0.3 & 0.5 & 0.3\\ 0.2 & 0.2 & 0.3\\ 0.4 & 0.2 & 0.3\end{bmatrix}$$

1- أوجد مصفوفة ليونتييف.

2- قدر الإنتاج الكلي المطلوب من كل قطاع، إذا علمت أن متجه الطلب النهائي هو $\begin{bmatrix}20\\ 10\\ 40\end{bmatrix}$

Prof Ahmed Gad

19. إذا كان الاقتصاد القومي مكون من قطاعين A و B وكان جدول المستخدم المنتج هو:

	A	B	H	X
A	**100**	**-------**	**300**	**600**
B	**-------**	**200**	**500**	**1000**

أ) ما هي احتياجات القطاع B من القطاع A لكي ينتج هذا القطاع ما قيمته 1000 وحدة؟
ب) ما هي احتياجات القطاع A من القطاع B لكي ينتج هذا القطاع وحدة واحدة؟

20. اقتصاد ما يتكون من قطاعين A و B ، فإذا علمت أن مصفوفة ليونتييف لهذا الاقتصاد هي

$$I - A = \begin{bmatrix} 0.6 & -0.2 \\ -0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:
أ) ما هي احتياجات القطاع A من القطاع B كي ينتج ما قيمته وحدة واحدة؟
ب) إذا علمت أن الطلب النهائي علي كل قطاع هو 60 و 80 علي التوالي. فما هو الناتج النهائي المطلوب لمواجهة الطلب.
ج) بمعلومية الطلب النهائي المعطي في (ب) والناتج النهائي الذي تم حسابه في (ب)، ما هي مصفوفة المدخلات والمخرجات (المستخدم المنتج) لهذا الاقتصاد القومي.

21. في إحدى الشركات التي تنتج ثلاث منتجات كانت مصفوفة المعاملات الفنية $\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/3 \\ 1/3 & 1/10 & 0 \\ 0 & 1/5 & 1/2 \end{bmatrix}$

وكان متجه الطلب النهائي $\begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 50 \end{bmatrix}$ **أوجد الكميات التي يجب أن تنتجها الشركة من الثلاث منتجات للوفاء بالطلب النهائي. (Ans.: 184.66, 101.72, 140.69)**

22. أوجد الكميات التي ينتجها كل قطاع من الثلاث قطاعات التي يتكون منها اقتصاد دولة ما، علما بأن مصفوفة المعاملات الفنية ومتجه الطلب النهائي يأخذان الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.4 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{bmatrix} \quad , \quad Y = \begin{bmatrix} 150 \\ 200 \\ 210 \end{bmatrix}$$

(Ans.: 879.5, 1023.85, 1232.22)

23. اقتصاد ما يتكون من قطاعين ، فإذا علمت أن مصفوفة ليونتييف لهذا الاقتصاد هي

$$\begin{bmatrix} 0.7 & -0.3 \\ -0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

والمطلوب:
أ) ما هي احتياجات القطاع الأول من القطاع الثاني كي ينتج ما قيمته وحدة واحدة؟
ب) إذا علمت أن الطلب النهائي علي كل قطاع هو 70 و 60 علي التوالي. فما هو الناتج النهائي المطلوب لمواجهة الطلب.
ج) بمعلومية الطلب النهائي المعطي في (ب) والناتج النهائي الذي تم حسابه في (ب)، ما هي مصفوفة المدخلات والمخرجات (المستخدم المنتج) لهذا الاقتصاد القومي.

Prof Ahmed Gad

24. بافتراض أن $X_{n\times 1}=\begin{bmatrix}1\\1\\.\\.\\1\end{bmatrix}$ **هو متجه مكون من n عنصر وكل عنصر يساوي واحد صحيح**

والمطلوب:

أ) اثبت أن $A^2=A$ **حيث** $A=I_n-\frac{XX'}{n}$ ، I_n **هي مصفوفة الوحدة من الرتبة n .**

ب) ما هو نوع المصفوفة A ؟

Prof Ahmed Gad