Cap. 6.1.- MODULACIÓN ANGULAR

En una señal analógica pueden variar tres propiedades: la amplitud, la frecuencia y la fase. Anteriormente tratamos sobre la modulación en amplitud. Este texto, trataremos sobre la *modulación en frecuencia (FM) y* la *modulación en fase (PM)* La modulación en frecuencia y en fase, son ambas formas de la *modulación angular.* Desdichadamente, a ambas formas de la modulación angular se les llama simplemente FM cuando, en realidad, existe una diferencia clara (aunque sutil), entre las dos. Existen varias ventajas en utilizar la modulación angular en vez de la modulación en amplitud, tal como la reducción de ruido, la fidelidad mejorada del sistema y el uso más eficiente de la potencia. Sin embargo, FM y PM, tienen varias desventajas importantes, las cuales incluyen requerir un ancho de banda extendida y circuitos más complejos, tanto en el transmisor, como en el receptor.

La modulación angular fue introducida primero en 1931, como una alternativa a la modulación en amplitud. Se sugirió que la onda con modulación angular era menos susceptible al ruido que AM y, consecuentemente, podía mejorar el rendimiento de las comunicaciones de radio. El mayor E. H. Armstrong desarrolló el primer sistema de radio de FM con éxito, en 1936 (quien también desarrolló el receptor superheterodino) y, en julio de 1939, la primera radiodifusión de señales de FM programada regularmente comenzó en Alpine, New Jersey. Actualmente, la modulación angular se usa extensamente para la **radiodifusión de radio comercial, transmisión de sonido de televisión, radio móvil de dos sentidos, radio celular y los sistemas de comunicaciones por microondas y satélite.**

Los propósitos de este texto, son introducir a los conceptos básicos de la modulación en frecuencia y en fase y cómo se relacionan uno con otro, mostrar algunos de los circuitos más usados comúnmente para producir las ondas con modulación angular y comparar el rendimiento de la modulación angular con la modulación en amplitud.

La *modulación angular* resulta cuando el ángulo de fase (θ), de una onda sinusoidal, varía con respecto al tiempo sin tocar los otros parámetros. La onda con modulación angular se muestra matemáticamente como

$$y(t) = V_c \cos [\cos \omega_c t + \theta(t)] \qquad (6\text{-}1)$$

en donde *$y(t)$ = onda con modulación angular;*
V_c = amplitud pico de la portadora (voltios)
ω_c = frecuencia en radianes de la portadora (es decir velocidad angular, $2\pi f_c(t)$
$\theta(t)$ = desviación instantánea de fase (radianes)

Con la modulación angular, es necesario que $\theta(t)$ sea una función de la señal modulante. Por lo tanto, si $v_m(t)$ es la señal modulante, la modulación angular se muestra matemáticamente como

$$\theta(t) = f[v_m(t)] \qquad (6\text{-}2)$$

en donde $v_m(t) = V_m \mathrm{sen}(\omega_m t)$
ω_m = velocidad angular de la señal modulante (radianes/segundo)
f_m = frecuencia de la señal modulante (hertz)
V_m = amplitud pico de la señal modulante (voltios)

En esencia, la diferencia entre la modulación en frecuencia y en fase está en cuál propiedad de la portadora (la frecuencia o la fase) está variando directamente por la señal modulante y cuál propiedad está variando indirectamente. Siempre que la frecuencia de la portadora está variando, la fase también se encuentra variando, y viceversa. Por lo tanto, FM y PM, deben ocurrir cuando se realiza cualquiera de las formas de la modulación angular. Si la frecuencia instantánea de la portadora varía directamente de acuerdo con la señal modulante, resulta en una señal de FM. Si la fase de la portadora varía directamente de acuerdo con la señal modulante, resulta en una señal PM. Por lo tanto, la FM directa es la PM indirecta y la PM directa es la FM indirecta. La modulación en frecuencia y en fase pueden definirse de la siguiente manera:

Modulación en frecuencia directa (FM): variando la frecuencia de la portadora de amplitud constante directamente proporcional, a la amplitud de la señal modulante, con una velocidad igual a la frecuencia de la señal modulante.

Modulación en fase directa (PM): variando la fase de una portadora con amplitud constante directamente proporcional, a la amplitud de la señal modulante, con una velocidad igual a la frecuencia de la señal modulante.

La figura 6-1 muestra la forma de onda para una portadora sinusoidal para la cual la modulación angular está ocurriendo. La frecuencia y la fase de la portadora están cambiando proporcionalmente, con la amplitud de la señal modulante (v_m) El cambio en frecuencia (Δf) se llama *desviación en frecuencia y* el cambio en fase ($\Delta\theta$) se llama *desviación en fase*. La desviación en frecuencia es el desplazamiento relativo de la frecuencia de la portadora en hertz y la desviación en fase es el desplazamiento angular relativo (en radianes), de la portadora, con respecto a una fase de referencia. La magnitud de la desviación en frecuencia y en fase es proporcional a la amplitud de la señal modulante (v_m) y la velocidad en que la desviación ocurre es igual a la frecuencia de la señal modulante (f_m).
Siempre que el periodo (T) de una portadora sinusoidal cambia, también cambia su frecuencia y, si los cambios son continuos, la onda ya no es una frecuencia única. Se mostrará que la forma de onda resultante abarca la frecuencia de la portadora original (a veces llamada la *frecuencia de reposo de la portadora*) y un número infinito de pares de frecuencias laterales desplazadas en ambos lados de la portadora por un número entero como múltiplo de la frecuencia de la señal modulante.

La figura 6-2 muestra una portadora sinusoidal en la cual la frecuencia (f) será cambiada *(desviada),* en un periodo de tiempo. La porción ancha de la forma de onda corresponde al cambio de pico-a-pico en el periodo de la portadora (ΔT) El periodo mínimo (T_{min}) corresponde a la máxima frecuencia *(fmáx.)* y el periodo máximo ($T_{máx}$) corresponde a la frecuencia mínima (f_{min}) La desviación en frecuencia pico-a-pico se determina simplemente midiendo la diferencia entre las frecuencias mínimas y máximas ($\Delta f_{p\text{-}p} = 1/T_{min} - 1/T_{máx}$)

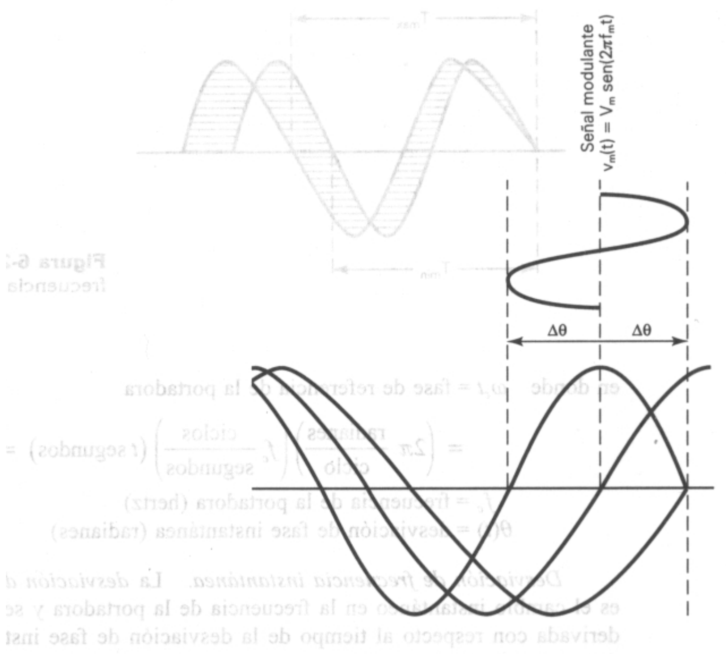


Figura 6-1 Frecuencia variante con el tiempo.

Análisis matemático

MODULACIÓN ANGULAR

Explicación de las expresiones

A diferencia de lo que ocurre en la transmisión de AM, en el proceso de Modulación Angular, la envolvente de la señal de RF permanece constante mientras lo que varía es la **Frecuencia Instantánea.**
Suponemos tener una portadora del tipo

$$y_c = A_c \cos(\omega_c t + \phi) = A_c \cos\theta$$

Definimos la *Frecuencia Angular Instantánea*

$$\omega_i = \frac{d\theta}{dt}$$

Eligiendo adecuadamente el origen *t=0*, se puede hacer que *φ=0*, entonces tendremos

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_c \quad \textbf{\textit{(sin modulación, la portadora sola)}}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_c + KA_m sen\omega_m t \quad \textbf{\textit{(con modulación)}}$$

observamos en las fórmulas que la portadora instantánea se ve afectada por una señal modulante, porque ϕ de la expresión de la portadora es ahora una función variable con el tiempo.

$$v_m(t) = A_m \cos\omega_m t$$

Como la portadora se va a desviar proporcionalmente al nivel de amplitud de la modulante, definimos ahora una desviación máxima de frecuencia (se dará cuando *sen* $w_m t$ *=1*

$$\Delta\omega = KA_m \; tambien \; \Delta f = \frac{KA_m}{2\pi}$$

Concluimos entonces que la desviación o cambio de frecuencia instantánea provocada por la modulante es únicamente función de la *Amplitud de la Señal de Audio*. Esta variación de frecuencia se realizará con una *velocidad* proporcional a la frecuencia de la señal modulante.

Como $$\omega_i = \frac{d\theta}{dt}$$

Retornamos integrando

$$\theta = \int_0^t \omega_i dt$$

$$\theta(t) = \omega_c t + \frac{KA_m}{\omega_m} \cos\omega_m t + C$$

Eliminamos la constante C con una conveniente elección del tiempo. La expresión para una onda modulada en frecuencia será entonces, reemplazando

$$y(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + \frac{KA_m}{\omega_m}\cos\omega_m t\right]$$

Y en una forma más general

$$y(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + K\int f_m(t)dt\right]$$

Donde $f_m(t)$ es la señal modulante.

Observando éstas dos últimas expresiones, vemos que si bien el proceso de modulación en frecuencia es el resultado final de una modificación de la **fase** de la onda, debemos tener en cuenta que dicha modificación resulta según la **integral** de la modulante.

Dicho en otras palabras, para generar FM podemos usar dos métodos:

1. Modificar directamente la frecuencia de la portadora (oscilador) proporcionalmente a las variaciones de amplitud de la modulante.

2. Trabajar sobre la **fase** de la portadora (aparte del oscilador) con la integral de la señal modulante.

Aquí también definimos nuestro *índice de modulación.*

$$m_f = \frac{KA_m}{\omega_m} = \frac{\Delta\omega_{máx}}{\omega_m} = \frac{2\pi\Delta f_c}{2\pi f_m} = \frac{\Delta f_c}{f_m}$$

Luego, la expresión general nos quedará

$$y_c(t) = A_c \cos\left(\omega_c t + m_f \cos\omega_m t\right)$$

De esta expresión siguen todas las deducciones de este apunte.

Aplicado a la modulación de fase (PM)

La PM se produce variando la fase instantánea de la portadora a una velocidad que es proporcional a la frecuencia de la modulación y por una cantidad que es proporcional a la amplitud instantánea de la modulante.
La amplitud de la portadora permanece constante e inalterable.

La señal modulante tiene la forma:

$$f_m = A_m sen\omega_m t$$

Recordamos la expresión de la portadora:

$$y_c = A_c \cos(\omega_c t + \phi) = A_c \cos\theta$$

Si al ángulo *Φ* le sumo un ángulo que sea proporcional a la señal modulante, estaremos modulando en **fase:**

$$y_c(t) = A_c\left[\cos(\omega_c t + \phi + KA_m sen\omega_m t)\right]$$

Si elegimos convenientemente el tiempo, podemos hacer *Φ=0.*
Definimos un índice de modulación

$$m_\phi = KA_m$$

Y la expresión general nos quedará

$$y_{PM}(t) = A_c \cos(\omega_c t + m_\phi sen\omega_m t)$$

Si comparamos con la expresión de FM

$$y(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + K\int f_m(t)dt\right]$$

Observamos que las dos expresiones son muy similares.
La desviación máxima de fase la podemos escribir

$$\Delta\phi_{máx} = KA_m$$

La frecuencia instantánea será:

$$\omega_i = \frac{d\theta_i}{dt} = \omega_c + KA_m\omega_m \cos\omega_m t$$

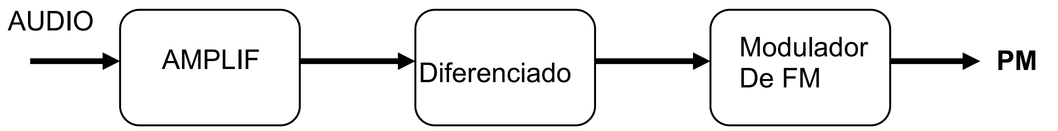
$$Entonces$$

$$\omega_i = \omega_c + m_\phi\omega_m \cos\omega_m t$$

Luego, la modulación de fase es un medio de obtener modulación de frecuencia, en la cual la desviación de la frecuencia es proporcional a la frecuencia modulante.

La desviación máxima es, resumiendo:

$$\Delta f = KA_m \, en\, FM$$
$$\Delta f = m_\phi\omega_m \;\; en\, PM$$



Desviación de fase instantánea. La *desviación de fase instantánea* es el cambio instantáneo en la fase de la portadora, en un instante de tiempo, e indica cuánto está cambiando la fase de la portadora con respecto a su fase de referencia. La desviación de fase instantánea se muestra matemáticamente como

desviación de la fase instantánea = $\theta(t)$ radianes (6-3)

Fase instantánea. La *fase instantánea* es la fase precisa de la portadora, en un instante de tiempo, y se muestra matemáticamente como

fase instantánea = $\omega_c t + \theta(t)$ (6-4)

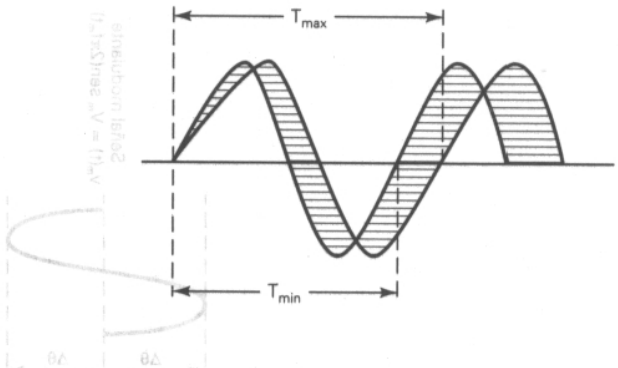


Figura 6-2 Fase variante con la frecuencia.

en donde $\omega_c t$ *= fase de referencia de la portadora =* $2\pi f_c t$ *radianes*

Desviación de frecuencia instantánea. La *desviación de frecuencia instantánea* es el cambio instantáneo en la frecuencia de la portadora y se define como la primera derivada con respecto al tiempo de la desviación de fase instantánea. Por lo tanto, la desviación de fase instantánea es la primera integral de la desviación de frecuencia instantánea. En términos de la ecuación 6-3, la desviación de frecuencia instantánea se muestra matemáticamente como

$$\text{desviación de frecuencia instantánea} = \theta'(t) \text{ rad/seg} \qquad (6\text{-}5a)$$

La prima (') se utiliza para denotar la primera derivada con respecto al tiempo.

Frecuencia instantánea. La *frecuencia instantánea* es la frecuencia precisa de la portadora, en un instante de tiempo, y se define como la primera derivada con respecto al tiempo de la fase instantánea. En términos de la ecuación 6-4, la frecuencia instantánea se muestra matemáticamente como

$$\omega_i(t) = \text{frecuencia instantánea} = \frac{d}{dt}[\omega_c t + \theta(t)] \qquad (6\text{-}6a)$$

$$= \omega_c + \theta'(t) \text{ rad/seg} \qquad (6\text{-}6b)$$

Al sustituir a $2\pi f_c$ por ω_c da frecuencia instantánea =

$$f_i(t) = 2\pi f_c + \theta'(t) \text{ rad/seg ó } f_c + \theta(t)/2\pi \text{ [Hz]} \qquad (6\text{-}6c)$$

La modulación en fase puede definirse como la modulación angular en la cual, la desviación de fase instantánea, $\theta(t)$, es proporcional al voltaje de la señal modulante. Al igual, la modulación en frecuencia es la modulación angular en la cual, la desviación de la frecuencia instantánea, $\theta'(t)$, es proporcional al voltaje de la señal modulante.

Para una señal modulante $v_m(t)$, la modulación en fase y en frecuencia es

$$\text{modulación en fase} = \theta(t) = K v_m(t) \text{ rad} \qquad (6\text{-}7)$$

$$\text{modulación en frecuencia} = \theta'(t) = K1 v_m(t) \text{ rad/seg} \qquad (6\text{-}8)$$

en donde K *y* K_1 son constantes y son las sensibilidades de desviación de los moduladores de fase y de frecuencia, respectivamente. Las sensibilidades de desviación son las funciones de transferencia de salida contra entrada para los moduladores. La sensibilidad de desviación para un modulador de fase es

$$K = \frac{radianes}{voltio}$$

y para un modulador en frecuencia

$$K_1 = \frac{radianes/segundo}{voltio}$$

La modulación en fase es la primera integral de la modulación de frecuencia. Por lo tanto, de las ecuaciones 6-7 y 6-8

$$\theta(t) = \int \theta^{'}(t)dt$$

modulación de fase $= \int K_1 v_m(t)dt \qquad$ (6-9)

$$= K_1 \int v_m(t)dt$$

Por lo tanto, al sustituir una señal modulante vm(t) = $V_m cos(\omega_m t)$, en la ecuación 6-1 da el resultado

Para modulación en fase $\qquad v(t) = V_c \cos[\omega_c t + \theta(t)]$

$$= V_c \cos[\omega_c t + KV_m \cos(\omega_m t)]$$

Para la modulación en frecuencia

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= V_c \cos[\omega_c t + \int \theta^{'}(t)] \\ &= V_c \cos[\omega_c t + K_1 \int V_m \cos(\omega_m t)] \\ &= V_c \cos[\omega_c t + \frac{K_1 V_m}{\omega_m} \operatorname{sen}(\omega_m t)] \end{aligned}}$$

Las relaciones matemáticas anteriores son resumidas en la tabla 6-1. Además, se muestran las expresiones para las ondas de FM y de PM que resultan, cuando la señal modulante es una onda sinusoidal de frecuencia única.

Banda angosta

Según se ve en la expresión 6-12a hemos reemplazado el índice de modulación de la expresión de la portadora

$$m = \frac{K_1 V_m}{\omega_m} \quad (6\text{-}12a)$$

$$m = \frac{K_1 V_m}{2\pi f_m} \quad (6\text{-}12b)$$

$$y(t) = V_c \cos(\omega_c t + m \operatorname{sen} \omega_m t)$$

Recordando la expresión de la trigonometría

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

reemplazando

$$y(t)=V_c\cos\omega_c t\cos(m\operatorname{sen}\omega_m t)-V_c\operatorname{sen}\omega_c t\operatorname{sen}(m\operatorname{sen}\omega_m t)$$

Definimos un sistema de *banda angosta* como aquel cuyo índice de modulación es inferior a 0,5 rad ($m \ll \pi/2$)
Esto nos lleva a suponer que

$$\cos(m\operatorname{sen}\omega_m t)\approx 1$$

$$\operatorname{sen}(m_f\operatorname{sen}\omega_m t)\approx m\operatorname{sen}\omega_m t$$

por ser en el segundo caso el argumento igual al seno.

La portadora quedará reducida a una expresión reducida. Si suponemos que la amplitud de la portadora es la unidad, quedará

$$y(t)=\cos\omega_c t-m\operatorname{sen}\omega_c t\operatorname{sen}\omega_m t$$

recordando que

$$\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$$

reemplazando

$$y(t)=\cos\omega_c t-\frac{m}{2}[\cos(\omega_c-\omega_m)t-\cos(\omega_c+\omega_m)t]$$

Se observa claramente que en este caso existen la portadora y dos bandas laterales como componentes del espectro. Se deduce que un sistema de FM de banda angosta requiere el mismo ancho de banda que un sistema de AM. Ver tabla 6-2, donde para un m< 1 solamente hay dos componentes laterales.

Formas de onda de FM y de PM

La figura 6-3 muestra la modulación en frecuencia y en fase de una portadora sinusoidal por una señal modulante de frecuencia única. Se puede observar que las formas de onda de FM y de PM son idénticas, excepto por su relación de tiempo (fase) Por lo tanto, es imposible distinguir una forma de onda de FM de una forma de onda de PM, sin saber las características de la señal modulante.

TABLA 6-1 ECUACIONES PARA LAS PORTADORAS DE FASE Y DE FRECUENCIA MODULADAS

Tipo de modulación	Señal modulante	Onda de modulación angular
(a) Fase	$v_m(t)$	$V_c\cos[\omega_c t+Kv_m(t)]$
(b) Frecuencia	$v_m(t)$	$V_c\cos[\omega_c t+K_1\int v_m(t)\,dt]$
(c) Fase	$V_m\cos(\omega_m t)$	$V_c\cos[\omega_c t+KV_m\cos(\omega_m t)]$
(d) Frecuencia	$-V_m\operatorname{sen}(\omega_m t)$	$V_c\cos\left[\omega_c t+\frac{K_1V_m}{\omega_m}\cos(\omega_m t)\right]$
(e) Frecuencia	$V_m\cos(\omega_m t)$	$V_c\cos\left[\omega_c t+\frac{K_1V_m}{\omega_m}\operatorname{sen}(\omega_m t)\right]$

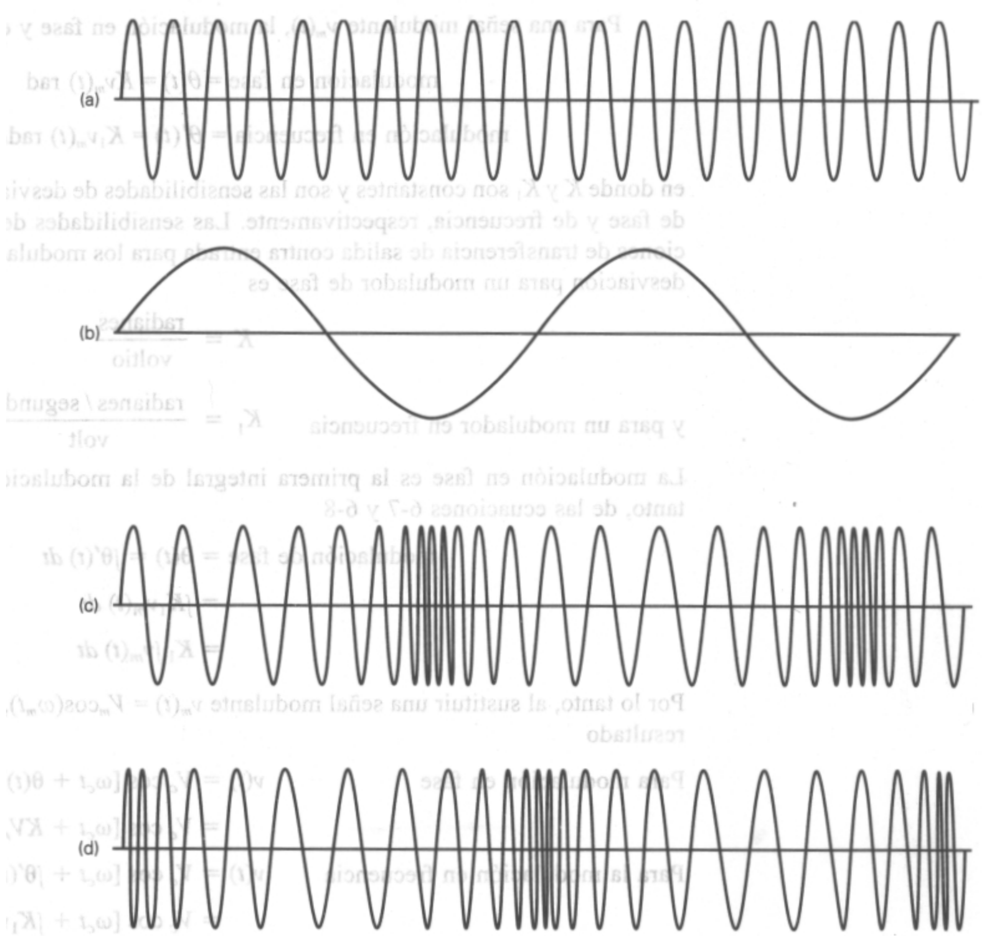


Figura 6-3 *Modulación en fase y en frecuencia de una portadora de onda seno, por una señal de onda seno: (a) portadora demodulada; (b) señal modulante; (c) onda de frecuencia modulada; (d) onda de fase modulada.*

Con FM, la máxima desviación de frecuencia (cambio en la frecuencia de la portadora) ocurre durante los máximos puntos negativos y positivos de la señal modulante (es decir, la desviación de frecuencia es proporcional a la amplitud de la señal modulante) Con PM, la máxima desviación de frecuencia ocurre durante los cruces de cero de la señal modulante (es decir, la desviación de frecuencia es proporcional a la pendiente o primera derivada de la señal modulante) Para la modulación de frecuencia y de fase, la razón por la cual los cambios de frecuencia ocurren es igual a la frecuencia de la señal modulante.

De manera semejante, no es aparente en la ecuación 6-1 si está representada una onda de FM o de PM. Podría ser cualquiera de las dos. Sin embargo, el conocimiento de la señal modulante permitirá una identificación correcta. Si $\theta(t) = Kv_m(t)$, es una modulación de fase y si $\theta'(t) = K_1 v_m(t)$, es una modulación de frecuencia. En otras palabras, si la frecuencia instantánea es directamente proporcional a la amplitud de la señal modulante, es una modulación en frecuencia, y si la fase instantánea es directamente proporcional a la amplitud de la frecuencia modulante, es una modulación en fase.