

Anexo A.- ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIA

Tradicionalmente, la adaptación de impedancia ha sido considerada como una operación difícil y delicada, temida siempre por la mayoría de los profesionales de la electrónica, sobre todo cuando se trata de abarcar una banda amplia. Sin embargo, éste es un aspecto es muy importante, ya que de esta adaptación depende la optimización de los emisores y receptores, influyendo, por tanto, en la calidad del enlace.

Los primeros trabajos relativos a la adaptación de impedancia datan, como la mayoría de los trabajos teóricos, de los años 1950-1960.

Desde entonces, varias han sido las vías de investigación que se han abierto, y que han dado lugar a su vez a otras tantas soluciones para resolver el problema en cuestión. Actualmente, no es posible sacar conclusiones acerca de la eficacia o exactitud de uno u otro de estos métodos de forma que se pueda determinar cuál es el mejor. Recientes y abundantes estudios demuestran que aún no se ha dicho todo acerca de la adaptación en banda ancha. No obstante, cualquiera que sea el procedimiento que se adopte, los resultados numéricos son parecidos. En general, se trata de determinar los valores de tres o cuatro componentes pasivos, bobinas o capacidades.

El proceso es largo y tedioso, aunque se disponga de n ecuaciones con 12 incógnitas. Por ello, esta situación se presta a una estimación rápida de los componentes, para los cuales se puede simplificar el cálculo. La solución final se obtiene mediante una serie de pruebas prácticas complementarias. Los avances tecnológicos de los años 90, aplicados a los ordenadores, han permitido el desarrollar algoritmos de optimización que alivian en parte el trabajo de los diseñadores.

Esta parte está dedicado a la adaptación de impedancia por medio del método llamado de impedancias conjugadas y del cálculo del coeficiente de sobretensión del circuito con carga.

OBJETIVOS DE LA ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIA

En radiocomunicaciones, lo que se pretende es transferir la máxima potencia de una fuente de tensión V_E , con una resistencia interna R_G , a una carga de valor R_L .

El esquema simplificado de la figura 9.1 resume el enunciado del problema.

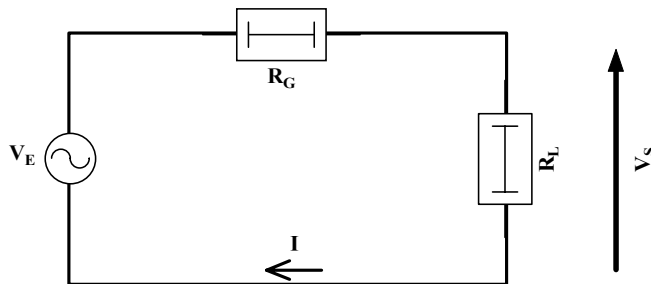


Figura 9.1. Transferencia de potencia.

La tensión V_s en los bornes de la carga R_L vale:

$$V_s = V_E \frac{R_L}{R_L + R_G}$$

La potencia P_s suministrada a la carga R_L vale:

$$P_s = \frac{V_s^2}{R_L} = V_E^2 \frac{R_L}{(R_L + R_G)^2}$$

Se pretende entonces hallar la relación entre R_L y R_G , tal que la potencia sea máxima:

$$\frac{dP_s}{dR_L} = V_E^2 \frac{R_G - R_L}{(R_L + R_G)^3}$$

Cuando $\frac{dP_s}{dR_L} = 0$, la potencia P_s es máxima. Esta condición equivale a la relación bien conocida $R_G = R_L$.

Cuando la resistencia de carga R_L es igual a la resistencia interna del generador R_G , el circuito está adaptado en potencia. La potencia P_s suministrada a la carga es máxima y vale:

$$P_{Sm\acute{a}x} = \frac{V_E^2}{4R_L}$$

Conviene destacar que este resultado no es idéntico al que se obtendría si se buscara la *máxima transferencia de tensión*. El máximo de la función de transferencia $\frac{V_S}{V_E}$ se obtiene cuando $R_G = 0$.

En el caso simple de la figura 9.1, las impedancias R_G y R_L son resistencias puras. Ciertamente, puede darse este hecho concreto, pero no suele ser un caso real muy frecuente. Generalmente, las impedancias Z_G y Z_L son impedancias complejas. Una impedancia compleja Z puede expresarse de la siguiente forma:

$$Z(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

La impedancia se pone en forma de relación de dos polinomios función de $p = j\omega$. La impedancia $Z(p)$ está constituida por un número cualquiera de elementos pasivos elementales, resistencias, bobinas y condensadores. Los grados de los polinomios $N(p)$ y $D(p)$ difieren en 1, como máximo.

TRANSFORMACIÓN DE IMPEDANCIA

El cálculo analítico es tanto más complejo cuanto más elevados son los grados de los polinomios $N(p)$ y $D(p)$. Por esta razón, el estudio se limita, en general, al caso de una impedancia constituida por una parte real R y una parte imaginaria X .

Esta configuración corresponde a circuitos RC serie o paralelo, o circuitos RL serie o paralelo. El esquema de la figura 9.2 muestra cómo una red cualquiera $R + jX$ puede ser representada por una estructura serie o paralelo.

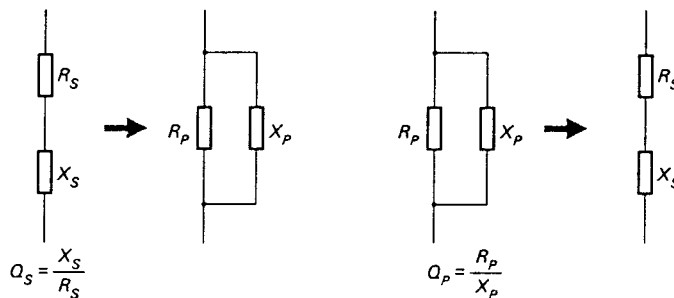


Figura 9.2. Transformación de impedancia.

Transformación serie-paralelo

Sea una impedancia serie Z_s , constituida por la disposición en serie de una resistencia R_s y de una parte imaginaria X_s

$$Z_s = R_s + jX_s$$

Por definición, el coeficiente de sobretensión Q_s del circuito vale:

$$Q_s = \frac{X_s}{R_s}$$

Esta red serie puede transformarse en una red constituida por la disposición en paralelo de un elemento con parte real R_p y otro con parte imaginaria X_p . Los valores R_p y X_p equivalentes vienen dados por las relaciones:

$$R_p = R_s (1 + Q_s^2) ; X_p = X_s \frac{(1 + Q_s^2)}{Q_s^2} = \frac{R_s}{X_s} R_p = \frac{R_p}{Q_s}$$

Si el coeficiente de sobretensión Q_s es mucho mayor que 1, estas relaciones se simplifican:

$$Q_s \gg 1$$

$$R_p \approx R_s Q_s^2 ; X_p \approx X_s$$

Transformación paralelo-serie

Sea una impedancia paralelo Z_p constituida por una resistencia R_p y una parte imaginaria X_p en paralelo. Por definición, el coeficiente de sobretensión Q_p del circuito vale:

$$Q_p = \frac{R_p}{X_p}$$

Esta red en paralelo puede transformarse en una red constituida por la disposición en serie de un elemento con parte real R_s y un elemento con parte imaginaria X_s . Los valores de R_s y X_s equivalentes vienen dados por

$$R_s = \frac{R_p}{1+Q_p^2}$$

$$X_s = X_p \frac{Q_p^2}{1+Q_p^2} = R_s \frac{R_p}{X_p} = R_s Q_p$$

$$R_s \approx \frac{R_p}{Q_p^2}$$

Si $Q_p \gg 1$, entonces $X_s \approx X_p$

Transformaciones frecuentes

En el transcurso de las diferentes operaciones, a menudo es necesario transformar una red paralelo en una red serie o viceversa. Así ocurre especialmente cuando se busca y se calcula el coeficiente de sobretensión del circuito cargado o cuando, por razones de simplificación de cálculo, debe ser modificada una impedancia de fuente o de carga compleja. En la tabla 9.1 se han agrupado las transformaciones más habituales.

COEFICIENTES DE SOBRETENSION DE LOS CIRCUITOS RLC

Circuito RLC serie

La figura 9.3 representa un circuito RLC serie, el módulo de la impedancia normalizada y el argumento de esta impedancia compleja. El coeficiente de sobretensión Q_s del circuito vale:

$$Q_s = \frac{1}{R_s C_s \omega} = \frac{L_s \omega}{R_s}$$

Tabla 9.1.

Circuito original	Circuito transformado	Relaciones
		$R' = R \frac{R^2 C^2 \omega^2 + 1}{R^2 C^2 \omega^2}$ $C' = C \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2 + 1}$
		$R' = R \frac{1}{R^2 C^2 \omega^2 + 1}$ $C' = C \frac{R^2 C^2 \omega^2 + 1}{R^2 C^2 \omega^2}$
		$R' = R \frac{R^2 + L^2 \omega^2}{R^2}$ $L' = L \frac{R^2 + L^2 \omega^2}{L^2 \omega^2}$
		$R' = R \frac{L^2 \omega^2}{R^2 + L^2 \omega^2}$ $L' = L \frac{R^2}{R^2 + L^2 \omega^2}$

Si el ancho de banda a -3 dB se representa por Δf .

$$Q_s = \frac{f_0}{\Delta f} \quad ; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_s C_s}}$$

Circuito RLC paralelo

La figura 9.4 representa un circuito RLC paralelo, el módulo de la impedancia normalizada y el argumento de esta impedancia compleja. El coeficiente de sobretensión Q_p del circuito vale:

$$Q_p = R_p C_p \omega = \frac{R_p}{L_p \omega}$$

$$Q_p = \frac{f_0}{\Delta f}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_p C_p}}$$

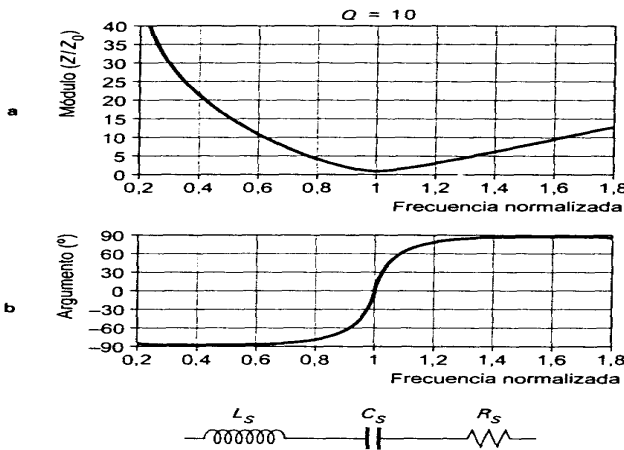


Figura 9.3. Circuito RLC serie.

DEFINICIÓN DE RED DE ADAPTACIÓN

Sean dos impedancias Z_G y Z_L cualesquiera. La curva de la figura 9.5 es un ejemplo de lo que podría ser la potencia en los bornes de la carga Z_L .

Entre el generador y la carga se intercala una red de adaptación de impedancia, conforme al esquema de la figura 9.6. De esta forma, la potencia en los bornes de la carga Z_L tiene el aspecto de la curva general de la figura 9.7.

En este caso, la red de adaptación ha permitido, en una banda de frecuencia Δf , la transferencia máxima de potencia del generador a la carga.

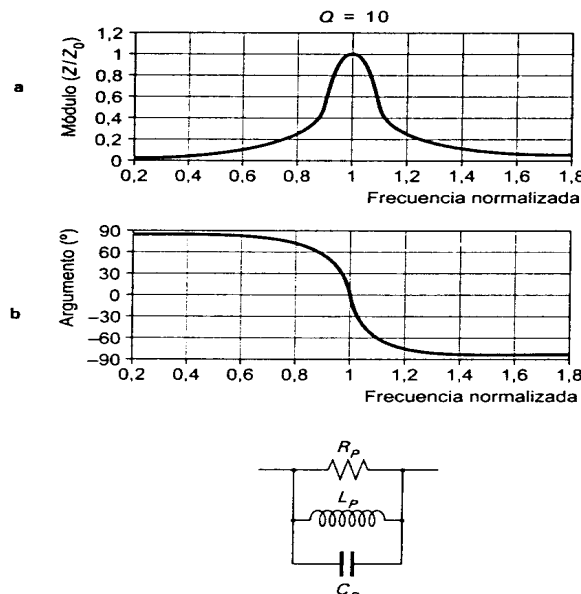


Figura 9.4. Circuito R_p, L_p, C_p en paralelo.

La frecuencia central se encuentra representada por f_0 y, típicamente, el coeficiente de sobretensión Q vale:

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f}$$

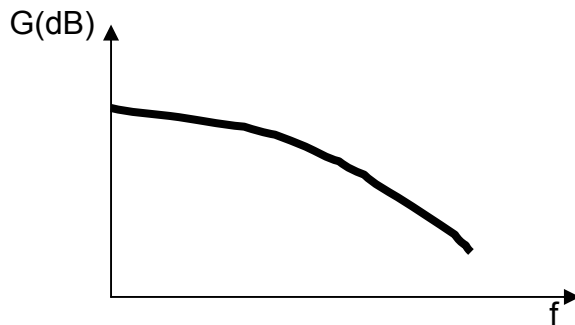


Figura 9.5. Función de transferencia entre dos impedancias cualesquiera.

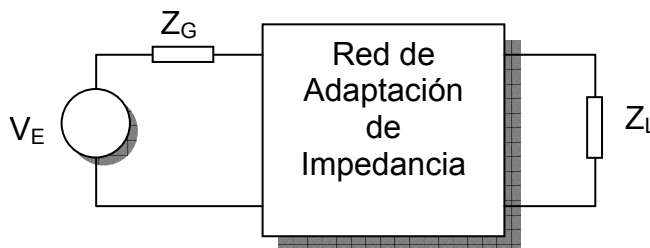


Figura 9.6. Inserción de una red de adaptación de impedancia.

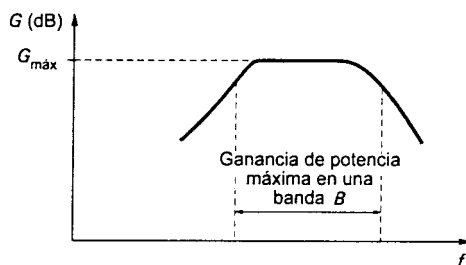


Figura 9.7. función de transferencia con la red de adaptación.

La red de adaptación está constituida exclusivamente por elementos reactivos, bobinas o capacidades. En este caso, se dice que la red es *no disipativa*. Si la red de adaptación incluye una o varias resistencias, la red es *disipativa*. En el curso presente no se abordará este último caso.

Las dos impedancias Z_G y Z_L son, en general, resistencias puras o impedancias complejas, que pueden ponerse en forma de resistencia serie o paralelo, con una capacidad o una inductancia.

Definición del coeficiente de sobretensión del circuito con carga

El conjunto de la red, es decir, las impedancias Z_G y Z_L , y las impedancias de la red de adaptación, puede representarse mediante un circuito RLC serie o RLC paralelo.

La elección de una representación serie o paralelo, depende únicamente de la estructura de la red. La mejor opción es la que mejor simplifique los resultados.

En numerosas obras, con vistas a simplificar los cálculos, el coeficiente de sobretensión del circuito cargado se evalúa eliminando una u otra de las impedancias Z_G o Z_L .

En este texto no utilizaremos estas hipótesis simplificadoras que dan resultados aproximados.

Ejemplo de cálculo del coeficiente de sobretensión del circuito cargado

Partimos de una red de adaptación en PI constituida por una bobina L y dos capacidades C_1 y C_2 , que se utiliza para adaptar dos resistencias puras R_G y R_L .

El esquema teórico de esta red se encuentra representado en la figura 9.8. Se trata de transformar esta red en un circuito RLC serie o paralelo. En este caso, la transformación en un circuito RCL serie resulta simple.

La red R_G, C_1 paralelo se transforma en una red R_A, C_A serie.

La red R_L, C_2 paralelo se transforma en una red R_B, C_B serie.

Los valores de los nuevos elementos R_A , R_B , C_A y C_B vienen definidos por las relaciones siguientes:

$$R_A = R_G \frac{1}{1 + R_G^2 C_1^2 \omega^2} \quad ; \quad R_B = R_L \frac{1}{1 + R_L^2 C_2^2 \omega^2}$$

$$C_A = C_1 \frac{1 + R_G^2 C_1^2 \omega^2}{R_G C_1^2 \omega^2} \quad ; \quad C_B = C_2 \frac{1 + R_L^2 C_2^2 \omega^2}{R_L C_2^2 \omega^2}$$

La red transformada se encuentra representada en la figura 9.9.

El coeficiente de sobretensión del circuito cargado Q es igual a la relación de la impedancia de la bobina L con respecto a la resistencia equivalente, resultante de poner en serie de R_A y R_B .

$$Q = \frac{\omega L}{R_A + R_B}$$

$$Q = \frac{\omega L (1 + R_G^2 C_1^2 \omega^2) (1 + R_L^2 C_2^2 \omega^2)}{R_G (1 + R_L^2 C_2^2 \omega^2) + R_L (1 + R_G^2 C_1^2 \omega^2)}$$

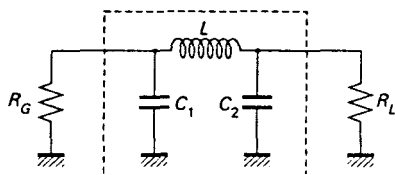


Figura 9.8. Circuito de adaptación en PI entre dos resistencias R_G y R_L .

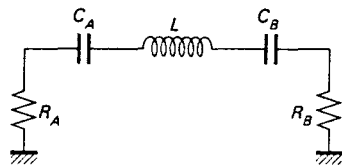


Figura 9.9. Transformación de la red en PI y las resistencias R_G y R_L .

CONDICIONES PARA LA ADAPTACIÓN DE IMPEDANCIAS

Principios

Sean las dos impedancias Z_G y Z_L de la figura 9.10a.

Si $jX_G - jX_L = 0$, el esquema de la figura 9.10a puede simplificarse, resumiéndose en el esquema de la figura 9.10b.

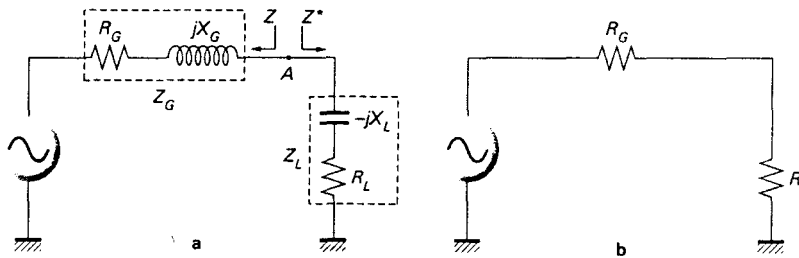


Figura 9.10. Equivalencia de la red adaptada.

Para que la transferencia de potencia sea máxima, debe cumplirse la simple igualdad $R_G = R_L$. Este sencillo ejemplo puede generalizarse por una ley igualmente simple.

Sobre el esquema de la figura 9.10a, la impedancia vista desde el punto A hacia la fuente vale Z . La impedancia vista desde el punto A hacia la carga vale Z_1 .

Si Z_1 es igual al valor conjugado de la impedancia Z , quiere decir que el circuito está adaptado.

$$Z_1 = Z^*$$

La función del circuito de adaptación de la figura 9.11 consiste, por tanto, en transformar el valor de la impedancia compleja Z_L , de forma que esta impedancia, vista desde la entrada del circuito de adaptación, sea igual al valor conjugado de la impedancia Z , es decir, Z^* .

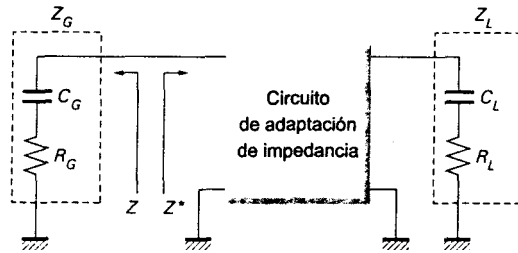


Figura 9.11. Adaptación de impedancia.

Ejemplo de cálculo de un circuito de adaptación

Sea el circuito de la figura 9.12. Se trata de adaptar las dos resistencias R_1 y R_2 mediante un filtro en L. La impedancia Z vista desde el punto A hacia la fuente vale:

$$Z = R_1 + j0$$

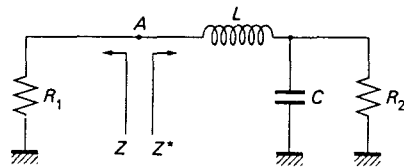


Figura 9.12. Condición para la adaptación de impedancia.

La impedancia Z , vista desde el punto A hacia la carga vale:

$$Z_1 = \frac{R_2}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2} + j \left[\omega L - \frac{R_2^2 \omega C}{1 + R_2^2 \omega^2 C^2} \right]$$

Para que el circuito esté adaptado, $Z_1 = Z^*$.

Igualando las partes reales y las partes imaginarias, se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente:

$$R_1 = \frac{R_2}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2} \quad ; \quad \omega L = \frac{R_2^2 \omega C}{1 + R_2^2 C^2 \omega^2}$$

La resolución de este sistema no plantea ninguna dificultad.

$$C = \frac{1}{\omega R_2} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}} \quad ; \quad L = \frac{R_1}{\omega} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}$$

Las dos incógnitas del sistema corresponden a los valores de los componentes L y C. Igualando las partes reales y las partes imaginarias en la ecuación $Z_1 = Z^*$, se obtienen dos ecuaciones que permiten resolver inmediatamente el problema.

En estas condiciones, el coeficiente de sobretensión del circuito cargado viene definido por los elementos calculados, no pudiendo ser elegido de forma independiente.

En el caso del esquema de la figura 9.12, el coeficiente Q viene dado por la relación:

$$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}$$

A partir de estos resultados, se puede comprobar que este circuito sólo puede utilizarse cuando $R_2 > R_1$.

CIRCUITOS DE ADAPTACIÓN CON DOS ELEMENTOS REACTIVOS

Impedancias de fuente y de carga reales

La tabla 9.2 reúne cuatro interesantes casos. Se trata de circuitos en L intercalados entre las dos resistencias que se pretenden adaptar, R_1 y R_2 . El coeficiente de sobretensión Q es una condición del circuito y viene definido únicamente por los valores de las dos resistencias R_1 y R_2 , cuando el circuito está adaptado.

Tabla 9.2. Adaptación de Impedancias reales con dos elementos reactivos.

N.º	Círculo	L	C	Q
1		$L = \frac{R_1}{\omega} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}$ $L = \frac{R_1}{\omega} 2Q$	$C = \frac{1}{R_2 \omega} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}$ $C = \frac{2Q}{R_2 \omega}$	$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}$
2		$L = \frac{R_2}{\omega} \sqrt{\frac{R_1}{R_2 - R_1}}$ $L = \frac{R_2}{2\omega Q}$	$C = \frac{1}{R_1 \omega} \sqrt{\frac{R_1}{R_2 - R_1}}$ $C = \frac{1}{2R_1 Q \omega}$	$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}$
3		$L = \frac{R_1}{\omega} \sqrt{\frac{R_2}{R_1 - R_2}}$ $L = \frac{R_1}{2\omega Q}$	$C = \frac{1}{R_2 \omega} \sqrt{\frac{R_2}{R_1 - R_2}}$ $C = \frac{1}{2R_2 Q \omega}$	$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}}$
4		$L = \frac{R_2}{\omega} \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}}$ $L = \frac{R_2}{\omega} 2Q$	$C = \frac{1}{R_1 \omega} \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}}$ $C = \frac{2Q}{R_1 \omega}$	$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}}$

Los resultados que se obtienen son relativamente simples, puesto que las Impedancias de fuente y de carga son reales. Los circuitos de tipo 1 y 2 son aplicables cuando $R_2 > R_1$, es decir, cuando la resistencia de la fuente es inferior a la carga.

Los circuitos de tipo 3 y 4 son aplicables cuando $R_1 > R_2$, es decir, cuando la resistencia de la fuente es superior a la carga.

En todos los casos, el coeficiente de sobretensión Q aumenta con la diferencia de las resistencias R_1 y R_2 . El caso $R_1 = R_2$ no se justifica, ya que correspondería a dos resistencias idénticas que no necesitarían red alguna de adaptación.

Impedancia de fuente compleja e impedancia de carga real

En este caso (tabla 9.3), la impedancia de la fuente es una impedancia compleja, constituida por la disposición en paralelo de la resistencia R_1 y la capacidad C_1 . Eventualmente, esta red $R_1 C_1$ puede ser transformada en una red $R_1' C_1'$, donde los dos componentes estén en serie. Esto no cambia para nada los resultados que se obtienen en las condiciones de la adaptación.

En el caso de los circuitos 7 y 8, aparece claramente la condición $R_1 > R_2$.

Impedancia de fuente real e impedancia de carga compleja

Las relaciones dadas en la tabla 9.4 resultan de la tabla anterior, dado que los circuitos son idénticos. En este caso, la impedancia de la carga es compleja, constituida por R_2 y C_2 en paralelo.

La red $R_2 C_2$ eventualmente pueden ser transformadas en una red $R_2' C_2'$ serie.

Estos casos simples pueden ser asociados para tratar redes que incluyan n elementos reactivos.

En el caso de la tabla 9.5, la carga compleja es una bobina en paralelo con una resistencia.

El empleo de dos elementos reactivos L y C implica una condición en el coeficiente de sobretensión del circuito cargado Q, que entonces es función de R_1 y R_2 , **únicamente si las Impedancias son reales.**

Si una u otra de las Impedancias de fuente o de carga es compleja, el coeficiente de sobretensión Q **es función de las partes reales de las Impedancias y de la parte imaginaria.** Este coeficiente Q determina el ancho de banda sobre el cual las Impedancias van a estar adaptadas.

Tabla 9.4 Adaptación entre fuente real y carga compleja por dos elementos reactivos

N.º	Circuito	L	C	Q
9		$L = \frac{R_1}{\omega} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}$ $L = \frac{R_2 - R_1}{2Q\omega}$	$C = -C_2 + \frac{1}{R_2\omega} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}$ $C = -C_2 + \frac{Q}{R_2\omega}$	$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}$
10		$L = \frac{R_2}{\omega} \frac{1}{R_2 C_2 \omega + \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}}$	$C = \frac{1}{R_1 \omega} \sqrt{\frac{R_1}{R_2 - R_1}}$	$Q = \frac{1}{2} \left[R_2 C_2 \omega + \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}} \right]$
11		$L = \frac{R_1}{\omega} \sqrt{\frac{R_2}{R_1 - R_2 + \omega^2 C_2^2 R_2^2 R_1}}$	$C = \frac{R_2 C_2 \omega + \sqrt{\frac{R_1 - R_2 + \omega^2 C_2^2 R_2^2 R_1}{R_2}}}{\omega (R_1 - R_2)}$	$Q = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{R_1}{R_2} - 1 + R_1 R_2 C_2^2 \omega^2} \right]$ $Q = \frac{R_1}{2L\omega}$
12		$L = \frac{R_2}{\omega} \frac{R_2 C_2 \omega + \sqrt{\frac{R_1}{R_2} - 1 + R_1 R_2 C_2^2 \omega^2}}{R_2^2 C_2^2 \omega^2 + 1}$	$C = \frac{1}{R_1 \omega} \sqrt{\frac{R_1}{R_2} - 1 + R_1 R_2 C_2^2 \omega^2}$	$Q = \frac{1}{2} \left[R_2 C_2 \omega + \sqrt{\frac{R_1}{R_2} - 1 + \omega^2 C_2^2 R_1 R_2} \right]$

Tabla 9.3 Adaptación entre fuente compleja y carga real por dos elementos reactivos

N.º	Circuito	L	C	Q
5		$L = \frac{R_1}{\omega} \frac{R_1 C_1 \omega + \sqrt{\frac{R_2}{R_1} - 1 + R_1 R_2 C_1^2 \omega^2}}{R_1^2 C_1^2 \omega^2 + 1}$	$C = \frac{1}{R_2 \omega} \sqrt{\frac{R_2}{R_1} - 1 + R_1 R_2 C_1^2 \omega^2}$	$Q = \frac{1}{2} \left[R_1 C_1 \omega + \sqrt{\frac{R_2}{R_1} - 1 + R_1 R_2 C_1^2 \omega^2} \right]$
6		$L = \frac{R_2}{\omega} \sqrt{\frac{R_1}{R_2 - R_1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2 R_2}}$ $L = \frac{R_2}{2\omega Q}$	$C = \frac{R_1 C_1 \omega + \sqrt{\frac{R_2 - R_1 + \omega^2 C_1^2 R_1^2 R_2}{R_1}}}{\omega (R_2 - R_1)}$	$Q = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{R_2}{R_1} - 1 + R_1 R_2 C_1^2 \omega^2} \right]$ $Q = \frac{R_2}{2L\omega}$
7		$L = \frac{R_1}{\omega} \frac{1}{R_1 C_1 \omega + \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}}}$	$C = \frac{1}{R_2 \omega} \sqrt{\frac{R_2}{R_1 - R_2}}$	$Q = \frac{1}{2} \left[R_1 C_1 \omega + \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}} \right]$ $Q = \frac{R_1}{2L\omega}$
8		$L = \frac{R_2}{\omega} \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}}$ $L = \frac{R_1 - R_2}{2Q\omega}$	$C = -C_1 + \frac{1}{R_1 \omega} \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}}$ $C = -C_1 + \frac{1}{R_1 \omega} 2Q$	$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}}$

N.º	Circuito	L_1	C_1	$L_2 \text{ o } C_2$
13		$L_1 = \frac{2QR_1}{\omega}$	$C_1 = \frac{1}{\omega} \frac{1}{2QR_1 - \sqrt{R_1(R_2 - R_1)}}$	$C_2 = \frac{1}{R_2\omega} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}$
14		$L_1 = \frac{2QR_2}{\omega}$	$C_1 = \frac{1}{\omega} \frac{1}{2QR_2 - \sqrt{R_2(R_1 - R_2)}}$	$C_2 = \frac{1}{R_1\omega} \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}}$
15		$L_1 = \frac{R_1}{\omega} \left[2Q - \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}} \right]$	$C_1 = \frac{1}{2QR_1\omega}$	$L_2 = \frac{R_2}{\omega} \sqrt{\frac{R_1}{R_2 - R_1}}$
16		$L_1 = \frac{R_2}{\omega} \left[2Q - \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}} \right]$	$C_1 = \frac{1}{2QR_2\omega}$	$L_2 = \frac{R_1}{\omega} \sqrt{\frac{R_2}{R_1 - R_2}}$

Circuitos en PI y en T

El caso de los circuitos en PI y en T es un caso interesante que permite generalizar la combinación de las redes de adaptación. Se pueden hallar los valores de los elementos reactivos L, C₁ y C₂ de la figura 9.15 planteando las tres ecuaciones del sistema: adaptación y coeficiente de sobretensión del circuito cargado. Esto lleva a la resolución de un sistema relativamente complejo. Una solución más simple consiste en dividir la red de la figura 9.15 en dos redes simples en L, conforme al esquema de la figura 9.16.

Circuitos en PI

Se trata, pues, de manejar un conjunto de dos circuitos simples, relacionados por un valor común de la resistencia intermedia virtual R. Cada uno de los dos circuitos tiene un coeficiente de sobretensión cargado Q₁ y Q₂.

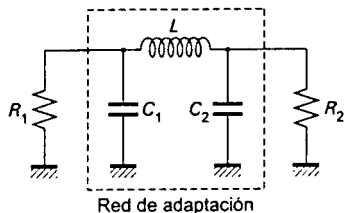


Figura 9.15. Adaptación entre dos impedancias reales R₁ y R₂ por un filtro en PI.

El coeficiente de sobretensión del circuito en PI, Q, está relacionado con Q₁ y Q₂, mediante la igualdad:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

Se pueden escribir las siguientes ecuaciones:

Para la primera red (ecuaciones del circuito 4):

$$L_1 = \frac{R}{\omega} \sqrt{\frac{R_1 - R}{R}} = \frac{2Q_1 R}{\omega} \quad ; \quad C_1 = \frac{1}{\omega R_1} \sqrt{\frac{R_1 - R}{R}} = \frac{2Q_1}{\omega R_1} \quad ; \quad Q_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_1 - R}{R}}$$

Para la segunda red (ecuaciones del circuito 1):

$$L_2 = \frac{R}{\omega} \sqrt{\frac{R_2 - R}{R}} = \frac{2Q_2 R}{\omega} \quad ; \quad C_2 = \frac{1}{\omega R_2} \sqrt{\frac{R_2 - R}{R}} = \frac{2Q_2}{\omega R_2} \quad ; \quad Q_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2 - R}{R}}$$

La primera operación consiste en calcular los valores de Q₁ y Q₂.

En ciertas obras, este caso se trata imponiendo un valor arbitrario para el valor R. Esto puede conducir a un resultado inexacto o aproximado. La resistencia intermedia R puede, simplemente, ser eliminada del sistema de ecuaciones. Basta entonces con resolver el sistema de ecuaciones.

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_1 - R}{R}} \quad ; \quad Q_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2 - R}{R}}$$

Que también se puede escribir:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$R_1(4Q_2^2 + 1) = R_2(4Q_1^2 + 1)$$

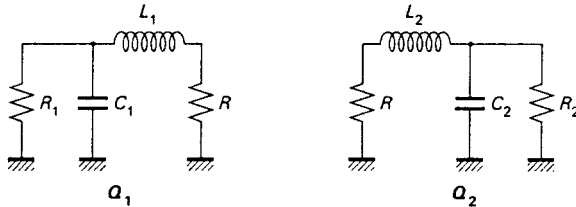


Figura 9.16. Transformación del filtro en PI de la figura 9.14.

Para este sistema, sólo existe una solución que da simultáneamente $Q_1 > 0$ y $Q_2 > 0$:

$$Q_1 = \frac{2QR_1 - \sqrt{2(1 + 2Q^2)R_1R_2 - (R_1^2 + R_2^2)}}{2(R_1 - R_2)}$$

$$Q_2 = \frac{-2QR_2 - \sqrt{2(1 + 2Q^2)R_1R_2 - (R_1^2 + R_2^2)}}{2(R_1 - R_2)}$$

Esta solución da directamente el resultado para los valores de dos condensadores C_1 y C_2 . El valor de la bobina L viene dado por la relación:

$$L = L_1 + L_2$$

Se tiene que $A = \sqrt{2(1 + 2Q^2)R_1R_2 - (R_1^2 + R_2^2)}$

El resultado final es, entonces:

$$C_1 = \frac{2QR_1 - A}{(R_1 - R_2)\omega R_1} \quad ; \quad C_2 = \frac{-2QR_2 + A}{(R_1 - R_2)\omega R_2}$$

$$L = L_1 + L_2 = \frac{2R}{\omega} Q_1 + \frac{2R}{\omega} Q_2 = \frac{2R}{\omega} Q$$

Sabiendo que:

$$R = \frac{R_1}{1 + 4Q_1^2}$$

$$L = \frac{2Q}{\omega} \frac{R_1}{1 + 4Q_1^2} = \frac{(R_1 - R_2)}{2\omega [Q(R_1 + R_2) - A]}$$

Los resultados para los dos filtros en PI se han agrupado en la tabla 9.7.

Tabla 9.7. Adaptación entre fuente y carga real para circuitos en PI.

N.º	Circuito	L	L ₁ o C ₁	L ₂ o C ₂
17		$L = \frac{(R_1 - R_2)^2}{2\omega [Q(R_1 + R_2) - A]}$	$C_1 = \frac{2Q R_1 - A}{\omega R_1 (R_1 - R_2)}$	$C_2 = \frac{-2Q R_2 + A}{\omega R_2 (R_1 - R_2)}$
18		$C = \frac{2Q(R_1 + R_2) - 2A}{\omega (R_1 - R_2)^2}$	$L_1 = \frac{R_1 (R_1 - R_2)}{\omega (2QR_1 - A)}$	$L_2 = \frac{R_2 (R_1 - R_2)}{\omega (-2QR_2 + A)}$
$A = \sqrt{2(1 + 2Q^2)R_1R_2 - (R_1^2 + R_2^2)}$				

El mismo procedimiento se aplica para el circuito 18. El circuito se divide en dos; el condensador C es reemplazado por dos condensadores C₁ y C₂ cargados por una resistencia intermedia de valor R. El valor del condensador C está relacionado con C₁ y C₂ mediante la expresión:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

A continuación, se aplica el mismo procedimiento anterior: cálculo de los elementos de cada uno de los circuitos en función de Q1 y Q2 y, después, el cálculo de Q1 y Q2. Esto lleva al resultado final sin dificultades.

Circuitos en T

El caso de los circuitos en T se trata de idéntica manera a la utilizada para los circuitos en PI.

La red en T se divide en dos redes simples en L, que se adaptan sobre una resistencia intermedia R de valor desconocido. Los resultados se han llevado a la tabla 9.8.

Tabla 9.8. Adaptación entre fuente v carga real para circuitos en T.

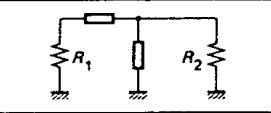
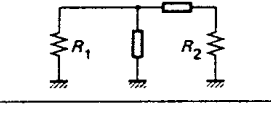
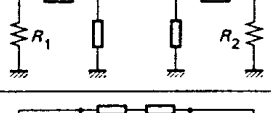
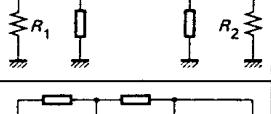
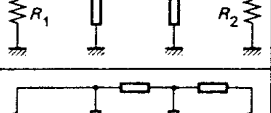
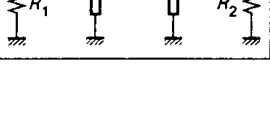
N.º	Circuito	L ₁ o C ₁	L ₂ o C ₂	L o C
19		$L_1 = \frac{R_1 - 2Q R_2 + A}{\omega (R_1 - R_2)}$	$L_2 = \frac{R_2 - 2Q R_1 - A}{\omega (R_1 - R_2)}$	$C = \frac{2Q}{\omega R_1 (R_1 - R_2)^2 + (-2QR_2 + A)^2} (R_1 - R_2)^2$
20		$C_1 = \frac{R_1 - R_2}{\omega R_1 (-2QR_2 + A)}$	$C_2 = \frac{R_1 - R_2}{\omega R_2 (-2QR_1 - A)}$	$L = \frac{2R_1 R_2}{\omega (R_1 - R_2)^2} [Q(R_1 + R_2) - A]$
$A = \sqrt{2(1 + 2Q^2)R_1R_2 - (R_1^2 + R_2^2)}$				

Generalización del procedimiento

El proceso puede generalizarse en el caso donde las impedancias que se van a adaptar son complejas. Se trata, pues, de utilizar una impedancia intermedia real R. El problema se reduce a dos adaptaciones entre una carga compleja y una carga real.

Las tablas que dan los resultados para los circuitos 1 a 20 omiten las etapas de los cálculos intermedios. El valor de la resistencia intermedia R_{INT} es función de la estructura de las redes elementales asociadas. Los resultados finales se encuentran agrupados en la tabla 9.9.

Tabla 9.9. Condiciones para la asociación de redes elementales.

Estructuras	Condiciones
	$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2 - R_1}{R_1}}$ $R_2 > R_1$
	$Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_1 - R_2}{R_2}}$ $R_1 > R_2$
	$R_{INT} > R_1$ $R_{INT} > R_2$
	$R_{INT} < R_1$ $R_{INT} < R_2$
	$R_2 > R_{INT} > R_1$
	$R_2 < R_{INT} < R_1$

Circuitos de adaptación en PI con impedancias de fuente y de carga complejas

El caso es idéntico al circuito en PI, para impedancia de fuente y de carga reales.

Este resultado es idéntico al que se obtendría con dos impedancias reales R_1 y R_2 adaptadas para un circuito en PI de tres elementos L , $C1 + C3$ y $C2 + C4$,

CONCLUSIÓN

Aunque el enunciado del problema correspondiente a las condiciones de adaptación sea simple, las ecuaciones exactas pueden dar origen a complejos cálculos. En este caso, un calculador analítico simplifica el manejo de las ecuaciones fundamentales.

Las fórmulas aproximadas, cuando se apliquen, deben manejarse con cuidado. Las fórmulas de este tipo deben ir acompañadas de las condiciones por las que se han considerado las simplificaciones.

Una red de adaptación, por compleja que sea, puede ser tratada considerando que es el resultado de poner en serie redes elementales en π , T o L, lo que permitirá obtener soluciones exactas.