

RUANG VEKTOR

Pembahasan awal tentang vektor di bidang, di ruang dan vektor euclides akan digunakan untuk mempelajari ruang vektor umum. Kita akan menggunakan ide dari ruang vektor ini di dalam mendapatkan pendekatan permasalahan di aljabar matriks. Definisi dari ruang vektor diberikan berikut.

Misal V merupakan himpunan vektor. Maka V dikatakan **ruang vektor** bila dipenuhi oleh syarat berikut :

1. Bila $\bar{u}, \bar{v} \in V$ maka $\bar{u} + \bar{v} \in V$ (tertutup terhadap penjumlahan)
2. $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$ (sifat komutatif)
3. $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$ (sifat asosiatif)
4. Ada vektor nol / identitas, dinotasikan dengan : $\bar{0} \in V$ sehingga berlaku $\bar{u} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{u} = \bar{u}$
5. Setiap $\bar{u} \in V$ mempunyai vektor negatif, dinotasikan dengan : $-\bar{u} \in V$ sehingga berlaku $\bar{u} + (-\bar{u}) = -\bar{u} + \bar{u} = \bar{0}$
6. Bila $\bar{u} \in V$ dan k skalar maka $k\bar{u} \in V$ (tertutup terhadap perkalian skalar)
7. $(kl)\bar{u} = k(l\bar{u})$
8. $(k+l)\bar{u} = k\bar{u} + l\bar{u}$
9. $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$
10. $1\bar{u} = \bar{u}$

Kesepuluh syarat di atas dinamakan **aksioma ruang vektor**. Bila paling sedikit satu aksioma gagal dipenuhi maka V bukan merupakan ruang vektor.

Berikut beberapa contoh ruang vektor :

1. V himpunan vektor di \mathfrak{R}^n (vektor euclides) dengan operasi standar. Operasi standar (penjumlahan dan perkalian skalar) diberikan dengan :

$$\bar{u} + \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

$$k\bar{u} = (k u_1, k u_2, \dots, k u_n)$$

Ruang vektor demikian sering dinotasikan dengan \mathfrak{R}^n .

2. V himpunan polinom pangkat n dengan operasi standar. Bentuk polinom pangkat n ,

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

Operasi standar pada polinom diberikan :

$$p_n(x) + q_n(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

$$k p_n(x) = k a_0 + k a_1 x + \dots + k a_n x^n$$

Ruang vektor demikian sering dinotasikan dengan P_n .

3. V himpunan matriks $m \times n$ dengan operasi standar (penjumlahan dan perkalian skalar) pada matriks. Ruang vektor demikian dinotasikan dengan M_{mn} .

Soal latihan

Selidiki apakah himpunan vektor berikut merupakan ruang vektor, bila tidak tentukan aksioma mana yang tidak dipenuhi.

1. Himpunan vektor berbentuk $(x, 0)$, $x \in \mathfrak{R}$ dengan operasi standar di \mathfrak{R}^2 .

2. Himpunan vektor di \mathfrak{R}^3 dilengkapi dengan operasi :

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + 1)$$

$$k(x, y, z) = (kx, ky, kz)$$

3. Himpunan polinom : $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dengan operasi :

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2 + 1)x^2$$

$$k p(x) = k a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

4. Himpunan matriks 2×2 berbentuk berikut dengan operasi standar.

a. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$

5. Himpunan matriks 2×2 yang berbentuk : $\begin{pmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{pmatrix}$ dengan penjumlahan dan perkalian skalar matriks.

6. Himpunan semua polinom pangkat tiga dengan suku konstan merupakan bilangan bulat.