INTEGRAL PERMUKAAN

Misal S suatu permukaan yang dinyatakan dengan persamaan z = f(x,y) dan D merupakan proyeksi S pada bidang XOY. Bila diberikan lapangan vektor **F**(x,y,z) = f(x,y,z) **i** + g(x,y,z) **j** + h (x,y,z) **k** dan vektor **n** merupakan vektor normal dari S. Maka integral dari lapangan vektor **F** atas permukaan S dinyatakan dengan :

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ dA = \iint_D \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ dA$$

Untuk S permukaan tertutup, dinotasikan dengan : $\oiint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ dA$. Bentuk integral tersebut disebut **<u>Integral Permukaan</u>**.

Vektor posisi (posisi suatu titik, misal (x,y,z) yang terletak pada permukaan S yang dinyatakan sebagai besaran vektor) dari S, dinyatakan dengan :

$$\mathbf{r}\ (x,y) = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + f(x,y)\ \mathbf{k}$$

Normal **n** dari permukaan S diberikan,

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = -f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

yang mempunyai arah ke atas, sedangkan normal yang mempunyai arah ke bawah diberikan,

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & f_y \\ 1 & 0 & f_x \end{vmatrix} = f_x\,\mathbf{i} + f_y\,\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Oleh karena itu, integral permukaan dengan vektor normal **n** mempunyai arah ke atas dapat dituliskan :

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ dA = \iint_D \left(f(x,y,z)\mathbf{i} + g(x,y,z)\,\mathbf{j} + h(x,y,z)\mathbf{k} \right) \bullet \left(-f_x\,\mathbf{i} - f_y\,\mathbf{j} + \mathbf{k} \right) dA$$

$$= \iint_D \left(-f\ f_x - g\ f_y + h \right) dA$$

Bentuk dA = dx dy atau dA = dy dx.

Contoh 8

Hitung $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ dA$ bila **F**(x,y,z) = 18z **i** - 12 **j** + 3y **k** dan S merupakan bagian dari bidang 2x + 3y + 6z = 12 yang terletak di oktan pertama.

Jawab :

Dari 2x + 3y + 6z = 12 didapatkan z = f (x,y) = 2 - 1/3 x - ½y dan vektor posisi dari sembarang titik pada permukaan S, **r** (x,y) = x **i** + y **j** + z **k** = x **i** + y **j** + (2 - 1/3 x - ½ y) **k**. Normal bidang, $\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = \frac{1}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Proyeksi dari S pada bidang XOY, $D=\left\{(x,y)\middle|\, 0 \le x \le 6,\, 0 \le y \le \frac{12-2x}{3}\right\}$ atau $D=\left\{(x,y)\middle|\, 0 \le x \le \frac{12-3y}{2}, 0 \le y \le 4\right\}$

Jadi

$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ \mathrm{dA} = \int_0^6 \int_0^{(12-2x)3} \left(-18z\left(-\frac{1}{3}\right)-(-12)\left(-\frac{1}{2}\right)+3y\right) dy\ dx$$

$$= \int_0^6 \int_0^{(12-2x)3} \left(-18\left(2-\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)\left(-\frac{1}{3}\right)-(-12)\left(-\frac{1}{2}\right)+3y\right) dy\ dx$$

$$= \int_0^6 \int_0^{(12-2x)3} (6-2x)\ dy\ dx = 24$$

Seringkali dijumpai bentuk permukaan S bermuka dua (mempunyai dua muka / sisi), secara fisis kita dapat menghitung besarnya garis gaya (fluks) dari gaya / lapangan vektor **F**(x,y,z) = f(x,y,z) **i** + g(x,y,z) **j** + h (x,y,z) **k** yang menembus permukaan S menggunakan integral permukaan.

Misal S merupakan permukaan yang mempunyai dua sisi yang dinyatakan dengan z = f (x,y). Maka besar garis gaya (fluks) dari gaya **F**(x,y,z) = f(x,y,z) **i** + g(x,y,z) **j** + h (x,y,z) **k** menembus permukaan S dinyatakan oleh :

$$\textit{fluks}\ \ \mathbf{F} = \iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ \mathrm{dA} = \iint_D \left(-f\ f_x - g\ f_y + h\right) dA$$

Contoh 9

Hitung besar garis gaya (fluks) dari **F** (x,y,z) = -y **i** + x **j** yang menembus permukaan S yang merupakan bagian dari bidang z = 8x - 4y - 5 yang terletak di atas segitiga dengan titik sudut (0,0,0), (0,1,0) dan (1,0,0).

Jawab:

Proyeksi S pada bidang XOY, $D=\left\{(x,y)\middle|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le -x+1\right\}$.

$$\textit{fluks}\ \ \mathbf{F} = \iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ \mathrm{dA} = \iint_D \left(-f\ f_x - g\ f_y + g\right) dA = \int_0^1 \int_0^{-x+1} \left(-(-y)(8)-x(-4)\right) dy\, dx = 2$$

Satu cara dikenalkan untuk menentukan besar garis gaya (fluks) dari gaya **F** yang menembus permukaan S. Bila permukaan S bermuka dua yang tertutup dan menutupi volume V maka besar fluks dari **F** dicari menggunakan teorema divergensi.

Teorema Divergensi

Misal S merupakan permukaan padat yang menutupi volume V. Maka integral permukaan dari lapangan vektor **F**(x,y,z) = f(x,y,z) **i** + g(x,y,z) **j** + h (x,y,z) **k** atas permukaan S atau besarnya fluks dari **F** yang menembus permukaan S dapat diselesaikan menggunakan integral rangkap tiga, yaitu :

$$\oiint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n} \ \mathrm{dA} = \iiint_S div\ \mathbf{F} \ \ \mathrm{dV}$$

Vektor normal **n** diambil yang mengarah keluar. Teorema di atas lebih dikenal dengan **Teorema Divergensi Gauss (Teorema Gauss).**

Contoh 9

Hitung $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ \mathrm{dA}$ bila

a. $\mathbf{F}(x,y,z) = (2x - z)\ \mathbf{i} + x^2 y\ \mathbf{j} - x z^2\ \mathbf{k}$ dan S merupakan daerah yang dibatasi oleh x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0 dan z = 1

Jawab :

$$div\ \mathbf{F} = f_x + g_y + h_z = 2 + x^2 - 2xz\ ,\ S = \left\{(x,y,z) \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\right\}$$

$$\oiint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ \mathrm{dA} = \iiint_S div\ \mathbf{F}\ \ \mathrm{dV} = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(2 + x^2 - 2xz\right) dx\ dy\ dz = \frac{11}{6}$$

Contoh 10

Hitung besar fluks dari gaya $\mathbf{F}(x,y,z) = 4x\ \mathbf{i} - 2y^2\ \mathbf{j} + z^2\ \mathbf{k}$ yang menembus permukaan S yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 4$, z = 0 dan z = 3.

Jawab :

$$div\ \mathbf{F} = f_x + g_y + h_z = 4 - 4y + 2z\ ,$$

$$S = \left\{(x,y,z) \middle| -2 \le x \le 2, -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}, 0 \le z \le 3\right\}$$

$$\oiint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ \mathrm{dA} = \iiint_S div\ \mathbf{F}\ \ \mathrm{dV} = \int_0^3 \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \left(4 - 4y + 4z\right) dy\ dx\ dz$$

$$= 4\int_0^3 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(4 - 4y + 4z\right) dy\ dx\ dz = 120\pi - 128$$

Teorema Stokes

Misal S permukaan terbuka bermuka dua dinyatakan oleh z = f(x,y) yang dibatasi oleh lengkungan / lintasan tutup sederhana C. Maka integral dari $\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\ \mathbf{i}$ +

g(x,y,z) **j** + h (x,y,z) **k** atas lengkungan / lintasan C dalam arah positif[$] dapat dinyatakan sebagai integral permukaan dari curl **F** atas S berikut.

$$\oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \iint_S curl\, \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ dA$$

Normal **n** ditentukan dari normalisasi gradien dari permukaan S yang dinyatakan secara implisit, f (x,y,z) = 0, yaitu $\mathbf{n} = \dfrac{\nabla f(x,y,z)}{\left\| \nabla f(x,y,z) \right\|}$.

Contoh 11

Diketahui lapangan vektor **F**(x,y,z) = 3 y **i** - x z **j** + y z^2 **k** dan S permukaan paraboloida 2 z = x^2 + y^2 dibatasi oleh z = 2 dengan lintasan C merupakan kelilingnya. Gunakan teorema Stokes untuk menghtiung $\iint_S curl\, \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ dA$

Jawab :

Lintasan C, $x^2 + y^2 = 4$, z = 2 atau x = 2 cos t, y = 2 sin t , z = 2 dengan $0 \le t \le 2\pi$.

$$\iint_S curl\, \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ dA = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \oint_C \left(3y\,dx - xz\,dy + yz^2\,dz\right) = \int_0^{2p} \left(3(2\sin t)(-2\sin t) - (2\cos t)(2)\right) dt$$

$$= -12p$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 3) Selesaikan integral $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\ dA$ bila

1. **F**(x,y,z) = **i** + x^2 **j** + x y z **k** dan permukaan S dinyatakan oleh daerah yang dibatasi z = xy, $0 \le x \le y$ dan $0 \le y \le 1$
2. **F**(x,y,z) = cosh x **i** + sinh y **k** dan permukaan S dinyatakan oleh daerah yang dibatasi z = x + y^2, $0 \le y \le x$ dan $0 \le x \le 1$.
3. **F**(x,y,z) = x **i** - 2 x^2 **j** + y z **k** dan permukaan S dinyatakan oleh daerah yang dibatasi z = x + y , $0 \le x \le y$ dan $0 \le y \le 1$.

(Nomor 4 sd 6) Hitung besar fluks dari gaya **F** yang menembus permukaan S bila

4. **F**(x,y,z) = (9 - x^2) **j** dan permukaan S merupakan bagian bidang 2x + 3y + 6z = 6 yang terletak di oktan pertama.
5. **F**(x,y,z) = y **i** - x **j** + 2 **k** dan permukaan S ditentukan oleh $z = \sqrt{1 - y^2}$, $0 \le x \le 5$

[$] Lintasan C mempunyai arah positif bila seseorang berjalan menyusuri lintasan tersebut maka permukaan S selalu terletak di sebelah kirinya.

6. **F**(x,y,z) = 2 **i** + 5 **j** + 3 **k** dan permukaan S adalah bagian dari $z = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$ yang terletak di dalam tabung $x^2 + y^2 = 1$.

(Nomor 7 sd 10) Gunakan teorema divergensi gauss untuk menghitung $\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dA$ bila

7. **F**(x,y,z) = z **i** + x **j** + y **k** dan permukaan S ditentukan oleh $0 \le z \le \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
8. **F**(x,y,z) = x **i** + 2y **j** + 3z **k** dan permukaan S berupa kubus $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$
9. **F**(x,y,z) = 3x **i** - 2y **j** + 4z **k** dan permukaan S dinyatakan oleh $x^2 + y^2 + z^2 \le 9$
10. **F**(x,y,z) = xyz **k** dan permukaan S merupakan tetrahedron yang dibatasi oleh bidang x = 0, y = 0, z = 0 dan x + y + z =1

(Nomor 11 sd 13) Gunakan teorema Stokes untuk menghitung $\iint_S curl\, \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\; dA$

11. **F**(x,y,z) = xy **i** + yz **j** + xz **k** dan S merupakan segitiga dengan titik sudut (0,0,0), (1,0,0) dan (0,2,1)
12. **F**(x,y,z) = yz **i** + 3xz **j** + z^2 **k** dan S merupakan bagian bola $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ yang terletak di bawah bidang z = 2.
13. **F**(x,y,z) = (z -y) **i** + (z + x) **j** - (x + y) **k** dan S merupakan bagian paraboloida $z = 1 - x^2 - y^2$ yang terletak di atas bidang XOY.