INTEGRAL GARIS

Misal kurva C dari titik A sampai titik B di $\Re^3$ ditentukan oleh persamaan parameter x = x(s), y = y(s) dan z = z(s) dengan s merupakan panjang busur dari C yang diukur dari sebuah titik (x,y,z) pada C. Maka didapatkan $(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$. Bila $\mathbf{r} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$ merupakan vektor posisi dari titik (x,y,z) maka $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ merupakan vektor satuan[#] yang menyinggung kurva C. Hal ini ditunjukkan berikut :

$$\left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = \left\| \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k} \right\| = \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}{(ds)^2}} = 1$$

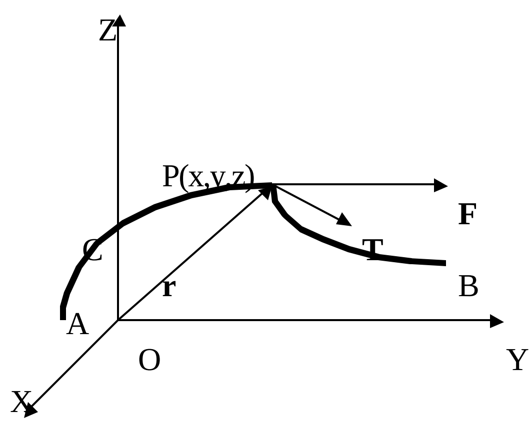
Bila gaya yang bekerja di titik (x,y,z) dinyatakan dengan medan vektor , **F** (x,y,z) = f (x,y,z) **i** + g (x,y,z) **j** + h (x,y,z) **k** dengan medan skalar f , g dan h kontinu, maka besarnya **kerja atau usaha**, W yang dilakukan oleh **F** untuk menggerakkan partikel dari titik A ke titik B sepanjang kurva C dicari sebagai berikut.

Misal $\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{T}$. Maka besar usaha, ΔW yang dilakukan oleh F untuk menggerakkan partikel dari titik P (x,y,z) sejauh Δs sepanjang kurva C adalah :

$$\Delta W = \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\ \Delta s$$

Oleh karena itu, usaha yang dilakukan oleh **F** untuk menggerakkan partikel dari titik A sampai titik B sepanjang kurva C diberikan :

$$W = \int_C \mathbf{F} \bullet \mathbf{T}\ ds = \int_C \mathbf{F} \bullet \frac{d\mathbf{r}}{ds}\ ds = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$



Bentuk integral di atas dinamakan **integral garis** dari medan vektor **F** atas kurva C.

Dari $\mathbf{r} = x\ \mathbf{i} + y\ \mathbf{j} + z\ \mathbf{k}$ didapatkan $d\mathbf{r} = dx\ \mathbf{i} + dy\ \mathbf{j} + dz\ \mathbf{k}$. Maka besar usaha, W yang dilakukan oleh gaya **F** sepanjang C adalah :

$$W = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_C \left(f(x,y,z)\ dx + g(x,y,z)\ dy + h(x,y,z)\ dz \right)$$

Bila kurva C yang dinyatakan dengan persamaan parameter (t), x = x (t), y = y (t) dan z = z (t) dengan a ≤ t ≤ b maka besar usaha :

[#] vektor satuan adalah vektor yang mempunyai norm atau panjang satu

$$W = \int_C \left(f(x,y,z)\,dx + g(x,y,z)\,dy + h(x,y,z)\,dz \right)$$

$$= \int_a^b \left(f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,\frac{dx}{dt} + g\big(x(t),y(t),z(t)\big)\,\frac{dy}{dt} + h\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dz}{dt} \right) dt$$

Untuk medan vektor di $\Re^2$, **F** (x,y) = f (x,y) **i** + g (x,y) **j** , maka besar usaha yang dilakukan gaya **F** (x,y) sepanjang kurva C yang dinyatakan oleh persamaan : x = x(t) dan y = y(t) dengan a ≤ t ≤ b dituliskan :

$$W = \int_C \left(f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy \right)$$

$$= \int_a^b \left(f\big(x(t),y(t)\big)\frac{dx}{dt} + g\big(x(t),y(t)\big)\frac{dy}{dt} \right) dt$$

Bila kurva C dinyatakan dalam bentuk y = v(x) dengan a ≤ x ≤ b maka x dapat dipandang sebagai parameter, menggantikan parameter t. Sehinggga kurva C diberikan dengan persamaan :

x = x , y = v(x) ; a ≤ x ≤ b

Besar usaha, W yang dilakukan oleh gaya **F** sepanjang kurva C adalah :

$$W = \int_a^b \left(f\big(x,v(x)\big) + g\big(x,v(x)\big)\,v'(x) \right) dx$$

Contoh 2
Tentukan besarnya usaha yang dilakukan medan vektor (gaya) , **F** (x,y) = (x + 2y) **i** + (x - y) **j** untuk memindahkan partikel sepanjang kurva / lintasan C yang diberikan dengan persamaan : x = 2 cos t , y = 4 sin t dengan $0 \le t \le \frac{p}{4}$.

Jawab :

$$W = \int_C F \bullet dr = \int_C \left[(x+2y)dx + (x-y)dy \right]$$

$$= \int_0^{p/4} \left[(2\cos t + 8\sin t)(-2)\sin t + (2\cos t - 4\sin t)4\cos t \right] dt = 1 - p$$

Contoh 3

Hitung integral garis : $\int_C \left(yz\,dx - xz\,dy + xy\,dz\right)$ bila C merupakan kurva yang dinyatakan dengan persamaan : $x = e^t, y = e^{3t}$ dan $z = e^{-t}$; $0 \le t \le 1$.

Jawab :

$$\int_C \left(yz\,dx - xz\,dy + xy\,dz\right) = \int_0^1 -3e^{3t}\;dt = 1 - e^3$$

Contoh 4

Tentukan besar usaha yang dilakukan oleh gaya **F** (x,y) = y **i** + x^2 **j** untuk memindahkan partikel sepanjang kurva y = x^2 dari titik (-2,4) ke titik (2,4).

Jawab :

$$W = \int_C \left(y\,dx + x^2\;dy\right) = \int_{-2}^{2} \left(x^2 + 2\,x^3\right) dx = \frac{16}{3}$$

Teorema Green

Suatu kurva C dari titik A (x_1,y_1) sampai titik B (x_2,y_2) dinyatakan dengan persamaan x = x(t) dan y = y(t) ; a ≤ t ≤ b dikatakan **kurva tutup** bila ujung-ujungnya saling berimpit, yaitu A = B atau $x_1(a) = x_2(b)$ dan $y_1(a) = y_2(b)$. Kurva tutup C dikatakan **kurva tutup sederhana** bila kurva tidak berpotongan kecuali pada ujung-ujungnya.

Misal diberikan medan vektor di $\Re^2$, **F** (x,y) = f (x,y) **i** + g (x,y) **j** dengan medan skalar f (x,y) dan g (x,y) kontinu dan mempunyai turunan parsial pertama kontinu pada R (Daerah R merupakan daerah yang dibatasi atau dilingkupi oleh kurva tutup sederhana C). Maka integral garis dari medan vektor **F** atas kurva tutup sederhana C dengan arah positif (arah positif dari lintasan tutup sederhana dapat diketahui bila kita berjalan mengikuti larah lintasan tersebut daerah R selalu terletak di sebelah kiri kita) dapat diselesaikan menggunakan integral rangkap dua berikut :

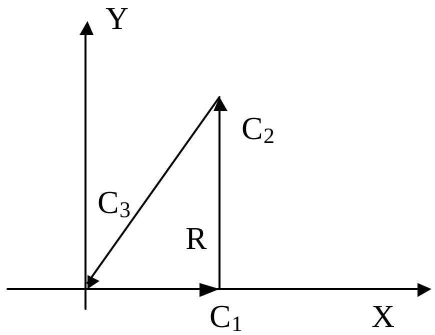
$$\oint_C \left(f(x,y)\;dx + g(x,y)\;dy\right) = \iint_R \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dA$$

Bentuk di atas dinamakan **Teorema Green** (di Bidang).

Contoh 5

Hitung integral garis $\int\limits_C \left(xy^2\,dx - x^2y\,dy \right)$, kurva C merupakan segmen garis dari titik (0,0) ke (2,0) dan berakhir di (2,3).

Jawab :



$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

dengan :

C_1 segmen garis dari (0,0) ke (2,0)

C_2 segmen garis dari (2,0) ke (2,3)

C_3 segmen garis dari (2,3) ke (0,0)

Oleh karena itu, Bilamana integral garis diselesaikan secara langsung didapatkan perhitungan berikut :

$$\int\limits_C \left(xy^2\,dx - x^2y\,dy \right) = \int\limits_{C_1} \left(xy^2\,dx - x^2y\,dy \right) + \int\limits_{C_2} \left(xy^2\,dx - x^2y\,dy \right) + \int\limits_{C_3} \left(xy^2\,dx - x^2y\,dy \right)$$

Sedangkan bila digunakan teorema Green maka didapatkan :

$$f(x,y) = xy^2 \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \quad ; \quad g(x,y) = x^2y \rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = -2xy$$

$$R = \left\{ (x,y) \,\middle|\, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le \frac{3}{2}x \right\}$$

$$\int\limits_C \left(xy^2\,dx - x^2y\,dy \right) = \iint\limits_R -4\,xy\,dA = \int_0^2 \int_0^{3x/2} -4xy\,dy\,dx = -18$$

Dari bentuk teorema green di bidang, misal f (x,y) = -y dan g (x,y) = x. Maka : $\oint\limits_C \left(-y\,dx + x\,dy \right) = \iint\limits_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y) \right) dA = 2\iint\limits_R dA$. Hal ini dapat disimpulkan bahwa luas daerah yang dilingkupi lintasan tutup sederhana C yaitu daerah R mempunyai luas :

$$\text{Luas } \text{R} = \frac{1}{2} \oint\limits_C \left(-y\,dx + x\,dy \right)$$

Contoh 6

Hitung luas Ellips yang dinyatakan dengan : x = a cos t , y = b sin t

Jawab :

$$\text{Luas} = \frac{1}{2}\oint_C \left(-y\,dx + x\,dy\right) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[\left(a\cos t\right)\left(b\cos t\right) - \left(b\sin t\right)\left(-a\sin t\right)\right] dt = \pi a b$$

Kebebasan Lintasan

Secara umum, integral garis dari medan vektor **F** sangat bergantung dari bentuk kurva C yang diberikan walaupun ujung-ujung dari kurva sama. Berikut akan dibahas syarat perlu dan cukup agar integral garis dari suatu medan vektor **F** atas kurva C bernilai sama walaupun bentuk kurva berbeda asal ujung-ujungnya tetap. Hal ini, kita katakan integral garis **bebas kurva / lintasan / tapak**.

Misal D merupakan daerah pada bidang XOY dan **F**(x,y) = f(x,y) **i** + g(x,y) **j** dengan medan skalar f (x,y) dan g (x,y) kontinu pada D. Maka integral garis :

$$\int_C \left(f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy \right)$$

bebas lintasan di D bila terdapat fungsi P (x,y) (disebut **fungsi potensial**) sehingga berlaku:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial x} = f(x,y) \text{ dan } \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = g(x,y)$$

Syarat di atas dapat juga dituliskan bahwa integral garis bebas lintasan bila berlaku :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$$

Dari deferensial total fungsi P (x,y), $dP(x,y) = \frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy$. Maka didapatkan : dP(x,y) = f (x,y) dx + g (x,y) dy. Bila kurva C mempunyai arah dari titik (x_1, y_1) ke titik (x_2, y_2) maka :

$$\begin{aligned}\int_C \left(f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy \right) &= \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \left(f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy \right) \\ &= \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} d\,P(x,y) \\ &= P\left(x_2,y_2\right) - P\left(x_1,y_1\right)\end{aligned}$$

Medan vektor **F** sehingga integral garis dari **F** atas lintasan C bebas lintasan dinamakan **Konservatif**. Untuk medan vektor di $\Re^2$, **F**(x,y) = f(x,y) **i** + g(x,y) **j** konservatif bila dan hanya bila $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial g(x,y)}{\partial x}$. Sedangkan untuk medan vektor di

$\Re^3$, **F**(x,y,z) = f(x,y,z) **i** + g(x,y,z) **j** + h (x,y,z) **k** konservatif bila dan hanya bila rot **F** = curl **F** = ∇ x **F** = **0** atau $\dfrac{\partial g(x,y,x)}{\partial z} = \dfrac{\partial h(x,y,z)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial f(x,y,x)}{\partial z} = \dfrac{\partial h(x,y,z)}{\partial x}$ dan $\dfrac{\partial g(x,y,x)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$.

Bila C merupakan kurva tutup dan medan vektor **F** (di $\Re^2$ atau $\Re^2$) konservatif maka $\oint\limits_C \left(f(x,y)\, dx + g(x,y)\, dy \right) = 0$

atau

$$\oint\limits_C \left(f(x,y,z)\, dx + g(x,y,z)\, dy + h(x,y,z)\, dz \right) = 0\,.$$

Permasalahan yang dihadapi disini adalah bagaimana menentukan fungsi Potensial P bila **F** konservatif. Misal **F**(x,y) = f(x,y) **i** + g(x,y) **j** konservatif. Maka untuk menentukan fungsi P(x,y) sehingga berlaku $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} = f(x,y)$ dan $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = g(x,y)$ dilakukan berikut.

Dari $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial x} = f(x,y)$, misal $P(x,y) = \int f(x,y)\, dx = f_1(x,y) + k(y)$. Maka $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} + k'(y) = g(x,y)$. Sehingga diperoleh bentuk k (y) berikut :

$k(y) = \displaystyle\int \left(g(x,y) - \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} \right) dy$. Dengan cara sama dapat ditentukan fungsi potensial, P dari medan vektor, **F** konservatif di $\Re^3$.

Contoh 7

Selidiki apakah medan vektor **F** konservatif. Bila ya, tentukan P (fungsi potensial)

a. **F** (x,y) = 3 y **i** + 3 x **j**

b. $\mathbf{F}(x,y,z) = \left(e^x \cos y + yz\right)\mathbf{i} + \left(xz - e^x \sin y\right)\mathbf{j} + xy\,\mathbf{k}$

Jawab :

a. f (x,y) = 3 y dan g (x,y) = 3x.

Karena $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial g}{\partial x} = 3$ maka **F** konservatif.

Misal P (x,y) fungsi potensial. Maka :

$$P(x,y)=\int f(x,y)\,dx=\int 3y\,dx=3xy+C(y)$$

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}=g(x,y)\Rightarrow 3x+C'(y)=3x\Rightarrow C(y)=C$$

Jadi $P(x,y)=3xy+C$

b. $f(x,y,z)=e^x\cos y+yz\Rightarrow\dfrac{\partial f}{\partial y}=-e^x\sin y+z$ dan $\dfrac{\partial f}{\partial z}=y$

$g(x,y,z)=xz-e^x\sin y\Rightarrow\dfrac{\partial g}{\partial x}=z-e^x\sin y$ dan $\dfrac{\partial g}{\partial z}=x$

$h(x,y,z)=xy\Rightarrow\dfrac{\partial h}{\partial x}=y$ dan $\dfrac{\partial h}{\partial y}=x$

Jadi **F** konservatif. Misal P (x,y,z) fungsi potensial. Maka

$$P(x,y,z)=\int\left(e^x\cos y+yz\right)dx=e^x\sin y+xyz+C(y,z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=g(x,y,z)\Rightarrow -e^x\sin y+xz+\frac{\partial C}{\partial y}=-e^x\sin y+xz\Rightarrow C(y,z)=L(z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=h(x,y,z)\Rightarrow xy+L'(z)=xy\Rightarrow L(z)=C$$

Jadi $P(x,y,z)=e^x\sin y+xyz+C$

Soal latihan

(Nomor 1 sd 3) Hitung integral $\int_C\left[\left(x^2-y\right)dx+\left(y^2-x\right)dy\right]$ dengan lintasan C menghubungkan titik (0,1) ke titik (1,2) berbentuk :

1. Garis lurus.
2. Garis lurus dari (0,1) ke (1,1) kemudian dari (1,1) ke (1,2).
3. Parabola x = t dan y = t^2 + 1.

(Nomor 4 sd 6) Diketahui $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(3x^2-6yz\right)\mathbf{i}+\left(2y+3xz\right)\mathbf{j}+\left(1-4xyz^2\right)\mathbf{k}$. Hitung $\int_C\mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}$ dari titik (0,0,0) sampai titik (1,1,1) melalui lintasan C

4. x = t, y = t^2 , z = t^3.
5. Garis lurus.
6. Garis lurus dari (0,0,0) sampai (0,0,1) kemudian menuju (0,1,1) seterusnya menuju (1,1,1).

(Nomor 7 sd 8) Hitung integral $\oint\limits_C \left[\left(2xy - x^2 \right) dx + \left(x + y^2 \right) dy \right]$ .Lintasan C berupa lengkung tertutup merupakan batas dari daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y^2 = x$.

7. Perhitungan langsung.
8. Gunakan teorema Green.

(Nomor 9 sd 14) Hitung integral garis berikut :

9. $\oint\limits_C \left(3xy\ dx + 2xy\ dy \right)$; C merupakan segiempat dibatasi oleh y = 1, y = 2, x = -2 , x = 4.
10. $\oint\limits_C \left[\left(x^2 - y^2 \right) dx + x\ dy \right]$; C $\equiv x^2 + y^2 = 9$
11. $\oint\limits_C \left(x \cos y\ dx - y \sin x\ dy \right)$; C kubus dengan titik sudut (0,0), (0, ½ π), (½ π,½ π) dan (½ π , 0).
12. $\oint\limits_C \left[\left(x^2 - y \right) dx + x\ dy \right]$; C $\equiv x^2 + y^2 = 4$
13. $\oint\limits_C \left[\left(e^x + y^2 \right) dx + \left(e^y + x^2 \right) dy \right]$; C $\equiv y = x^2$ dan $y = x$
14. $\oint\limits_C \left[\left(e^x - y^3 \right) dx + \left(\cos y + x^3 \right) dy \right]$; C $\equiv x^2 + y^2 = 1$

(Nomor 15 sd 19) Hitung integral berikut dengan mencari potensialnya terlebih dahulu.

15. $\int\limits_{(0,0)}^{(1,p/2)} \left[e^x \sin y\ dx + e^x \cos y\ dy \right]$
16. $\int\limits_{(0,0)}^{(3,2)} \left[2xe^y\ dx + x^2 e^y\ dy \right]$
17. $\int\limits_{(0,0,0}^{(1,1,1)} \left[\left(6xy^3 + 2z^2 \right) dx + 9x^2y^2\ dy + (4xz + 1)\ dz \right]$
18. $\int\limits_{(0,1,0)}^{(1,1,1)} \left[\left(yz + 1 \right) dx + (xz + 1)\ dy + \left(xy + 1 \right) dz \right]$
19. $\int\limits_{(0,0,0)}^{(-1,0,p)} \left[\left(y + z \right) dx + (x + z)\ dy + \left(x + y \right) dz \right]$