MEDAN VEKTOR

Di Dalam bab ini akan dibahas tentang diferensial dan integral dari fungsi bernilai vektor atau fungsi vektor. Bila fungsi dengan domain $\Re^n$ dan range $\Re$ akan menghasilkan fungsi bernilai riil (skalar) atau lebih dikenal dengan fungsi peubah banyak. Diferensial dan integral dari fungsi dua peubah dan tiga peubah telah dibahas pada bab sebelumnya. Sedangkan bila domain $\Re$ dan range $\Re^n$ akan didapatkan fungsi yang dinyatakan dalam notasi vektor. Untuk membedakan dengan fungsi skalar maka digunakan huruf kapital yang dicetak tebal untuk menyatakan fungsi vektor.

Pembahasan tentang diferensial dan integral fungsi vektor hanya terbatas untuk fungsi vektor di bidang ($\Re^2$) dan di ruang ($\Re^3$).

Misal A $\subseteq$ $\Re$ dan B $\subseteq$ $\Re^2$ atau B $\subseteq$ $\Re^3$. Maka kita dapat mendefinisikan suatu fungsi vektor dari A ke B, **F** : A $\rightarrow$ B dengan **F**(t) = (x(t) , y(t)) = x(t) **i** + y(t) **j** bila B $\subseteq$ $\Re^2$ atau **F**(t) = (x(t) , y(t), z(t)) = x(t) **i** + y(t) **j** + z(t) **k** bila B $\subseteq$ $\Re^3$. Fungsi vektor **F** disebut **Medan / Lapangan Vektor** . Bentuk parametrik x(t), y(t) dan z(t) merupakan fungsi bernilai riil dan disebut komponen dari **F**. Seringkali dalam menyatakan medan vektor **F** tidak menggunakan parameter t, namun menggunakan peubah x dan y untuk $\Re^2$ dan peubah x,y dan z untuk $\Re^3$ yaitu :

$$\mathbf{F}(x,y) = f(x,y)\,\mathbf{i} + g(x,y)\,\mathbf{j}$$
$$\mathbf{F}(x,y,z) = f(x,y,z)\,\mathbf{i} + g(x,y,z)\,\mathbf{j} + h(x,y,z)\,\mathbf{k}$$

f(x,y), g(x,y), f(x,y,z), g (x,y,z) dan h (x.y,z) disebut **Medan Skalar**.

Misal C merupakan kurva / lintasan di $\Re^2$ yang menghubungkan dari titik A menuju titik B dan P (x,y) merupakan titik sembarang yang terletak pada C. Maka vektor posisi untuk lintasan C dapat dinyatakan dengan :

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} \quad ; \quad a \le t \le b$$

dengan t merupakan parameter , **r**(a) = A dan **r**(b) = B. Secara fisis, turunan dari **r**(t) yaitu **r** ' (t) menunjukkan **kecepatan** partikel di titik P yang bergerak, sedangkan medan vektor **F**(t) = x(t) **i** + y(t) **j** atau **F**(x,y) = f(x,y) **i** + g(x,y) **j** menunjukkan (vektor) **gaya** yang bekerja di titik P.

Misal diberikan medan skalar f (x,y) di $\Re^2$ yang mempunyai turunan parsial pertama. Maka gradien dari f didefinisikan :

$$grad\left(f\right) = \nabla\left(f\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathbf{j}$$

Dari definisi di atas, didapatkan suatu " operator diferensial vektor ", ∇ (baca : del atau nabla) , yaitu :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}$$

Sedang untuk medan skalar di $\Re^3$ didapatkan operator ∇, yaitu :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Diberikan medan vektor **F** di $\Re^3$ yang terdefinisi dalam domain D dengan medan skalar f (x,y,z) , g (x,y,z) dan h (x,y,z) yang mempunyai turunan parsial pertama pada D. Didefinisikan suatu **Divergensi** dari medan vektor **F** berikut :

$$div\ \mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

Sifat-sifat dasar dari divergensi dari suatu medan vektor, yaitu sifat linier :

$$div\left(a\,\mathbf{F} + b\,\mathbf{G}\right) = a\,div\,\mathbf{F} + b\,div\,\mathbf{G}$$

Bila hasilkali titik dari dua vektor operator gradien dengan medan vektor menghasilkan skalar (divergensi) maka hasilkali silang antara operator gradien dan medan vektor **F** yang mempunyai medan skalar f, g dan h menghasilkan suatu vektor, **Rotasi** :

$$rot\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

Rotasi dari medan vektor **F** disebut juga dengan **curl** dan dinotasikan dengan curl **F**.

Contoh 1

Tentukan divergensi dan curl dari medan vektor $\mathbf{F} = z^2x\,\mathbf{i} - 2xy\,\mathbf{j} + 2y^2z\,\mathbf{k}$

Jawab :

$f\left(x,y,z\right) = z^2\,x \;\rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x} = z^2$, $g\left(x,y,z\right) = -2xy \;\rightarrow\; \frac{\partial g}{\partial x} = -2x$ dan

$h\left(x,y,z\right) = 2y^2\,z \;\rightarrow\; \frac{\partial h}{\partial x} = 2y^2$.

$$div\ \mathbf{F} = \nabla \bullet \mathbf{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = z^2 - 2x + 2y^2$$

$$curl\ \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z^2 x & -2xy & 2y^2 z \end{vmatrix} = (4yz)\,\mathbf{i} - (-2xz)\,\mathbf{j} + (-2y)\,\mathbf{k}$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 6) Tentukan divergensi dan curl dari medan vektor berikut.

1. $\mathbf{F} = x^2 y\,\mathbf{i} - 2xz\,\mathbf{j} + 2yz\,\mathbf{k}$
2. $\mathbf{G} = 2yz\,\mathbf{i} - x^2 y\,\mathbf{j} + xz^2\,\mathbf{k}$
3. $\mathbf{F} = x^2 y\,\mathbf{i} - 2x^2 z\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$
4. $\mathbf{F} = x \sin y\,\mathbf{i} - y \cos x\,\mathbf{j} + xyz\,\mathbf{k}$
5. $\mathbf{F} = e^x y\,\mathbf{i} - 2e^x z\,\mathbf{j} + xz\,\mathbf{k}$
6. $\mathbf{F} = x^2 \ln(xy)\,\mathbf{i} - 2x^2 \ln(xz)\,\mathbf{j} + yz\,\mathbf{k}$