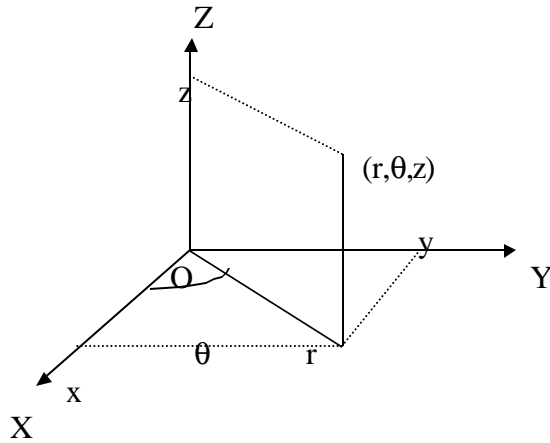
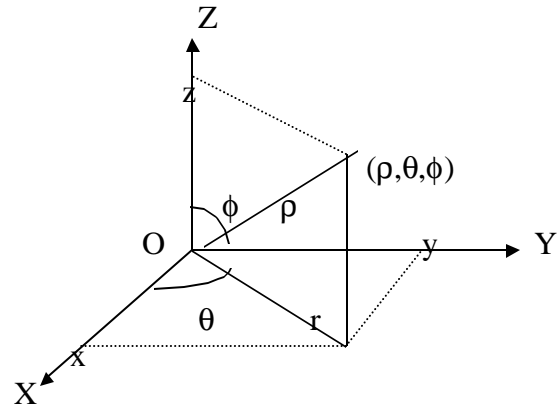


KOORDINAT TABUNG DAN KOORDINAT BOLA

Dalam perhitungan integral rangkap tiga dari suatu fungsi tiga peubah atas bangun ruang G seringkali dijumpai beberapa kesulitan dalam pengintegralan. Untuk itu, dilakukan transformasi dari koordinat cartesian ke dalam koordinat tabung dan koordinat bola. Hubungan antara koordinat cartesian dengan koordinat tabung dan koordinat bola dijelaskan dari gambar berikut.



Koordinat Tabung



Koordinat Bola

Bila dalam koordinat cartesian $P(x, y, z)$ dan dalam koordinat tabung $P(r, \theta, z)$ maka diperoleh hubungan berikut :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r^2 \\x &= r \cos \theta \\y &= r \sin \theta \\z &= z\end{aligned}$$

Bila dalam koordinat cartesian $P(x, y, z)$ dan dalam koordinat bola $P(\rho, \theta, \phi)$ maka didapatkan hubungan berikut :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\x &= \mathbf{r} \sin \mathbf{f} \cos \mathbf{q} \\y &= \mathbf{r} \sin \mathbf{f} \sin \mathbf{q} \\z &= \mathbf{r} \cos \mathbf{f}\end{aligned}$$

Untuk mentransformasikan integral dari koordinat cartesian ke dalam koordinat tabung atau koordinat bola digunakan metode determinan jacobii.

Koordinat Tabung

$$J(r, \mathbf{q}, z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \mathbf{q} & -r \sin \mathbf{q} & 0 \\ \sin \mathbf{q} & r \cos \mathbf{q} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2} \int_{r_1(\mathbf{q})}^{r_2(\mathbf{q})} \int_{v_1(r, \mathbf{q})}^{v_2(r, \mathbf{q})} f(r \cos \mathbf{q}, r \sin \mathbf{q}, z) r dz dr d\mathbf{q}$$

Koordinat Bola

$$J(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{f}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial x}{\partial \mathbf{f}} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{f}} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial z}{\partial \mathbf{f}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \mathbf{f} \cos \mathbf{q} & -r \sin \mathbf{f} \sin \mathbf{q} & r \cos \mathbf{f} \cos \mathbf{q} \\ \sin \mathbf{f} \sin \mathbf{q} & r \sin \mathbf{f} \cos \mathbf{q} & r \cos \mathbf{f} \sin \mathbf{q} \\ \cos \mathbf{f} & 0 & -r \sin \mathbf{f} \end{vmatrix} = r^2 \sin \mathbf{f}$$

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \int_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2} \int_{r_1(\mathbf{q})}^{r_2(\mathbf{q})} \int_{v_1(r, \mathbf{q})}^{v_2(r, \mathbf{q})} F(\mathbf{r}, \mathbf{q}, \mathbf{f}) r^2 \sin \mathbf{f} d\mathbf{f} dr d\mathbf{q}$$

Dalam penerapan, bila bangun ruang G simetris terhadap suatu sumbu (garis) maka digunakan koordinat tabung. Sedangkan koordinat bola digunakan bila bangun ruang G simetri terhadap suatu titik.

Contoh 10

Gunakan koordinat tabung untuk menghitung integral $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$

Jawab :

$$\text{Misal } G = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x^2, 0 \leq z \leq \frac{8-y}{4} \right\}.$$

$$\text{Maka } G = \left\{ (r, \mathbf{q}, z) \mid 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \mathbf{q} \leq \frac{\mathbf{p}}{2}, 0 \leq z \leq 2 \right\}$$

Jadi,

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^2 \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx = \int_0^3 \int_0^{\mathbf{p}/2} \int_0^2 r^2 dz d\mathbf{q} dr = \int_0^3 r^2 \left[\int_0^{\mathbf{p}/2} \left(\int_0^2 dz \right) d\mathbf{q} \right] dr = 9\mathbf{p}$$

Contoh 11

Gunakan koordinat bola untuk menghitung $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz dy dx$

Jawab :

Misal $G = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}, 0 \leq z \leq \sqrt{4-x^2-y^2} \right\}$.

Maka $G = \left\{ (r, \mathbf{q}, \mathbf{f}) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \mathbf{q} \leq \frac{\mathbf{p}}{2}, 0 \leq \mathbf{f} \leq \frac{\mathbf{p}}{2} \right\}$

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z dz dy dx &= \int_0^2 \int_0^{\mathbf{p}/2} \int_0^{\mathbf{p}/2} r \cos \mathbf{f} r^2 \sin \mathbf{f} d\mathbf{f} d\mathbf{q} dr \\ &= \int_0^2 r^3 \left[\int_0^{\mathbf{p}/2} \left(\int_0^{\mathbf{p}/2} \cos \mathbf{f} \sin \mathbf{f} d\mathbf{f} \right) d\mathbf{q} \right] dr \\ &= \mathbf{p} \end{aligned}$$

Soal latihan

1. Hitung $\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 dz dy dx$

2. Tentukan besar volume bangun ruang G bila G dibatasi oleh :

- Bagian atas : $z = \sqrt{25-x^2-y^2}$, bagian bawah : $z = 0$ dan selimut : $x^2 + y^2 = 25$
- Bagian atas dan bawah : $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ dan selimut : $x^2 + y^2 = 4$
- $z = x^2 + y^2$ dan $z = 9$

3. Gunakan koordinat Bola untuk menghitung integral berikut:

a. $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx$

$$\text{b. } \int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_{-\sqrt{9-x^2-z^2}}^{\sqrt{9-x^2-z^2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dy dz dx$$

$$\text{c. } \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{4-x^2-y^2} dz dy dx$$

4. Hitung volume bangun ruang G yang dibatasi di atas oleh $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ dan di bawah oleh : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$