

VOLUME DAN PUSAT MASSA

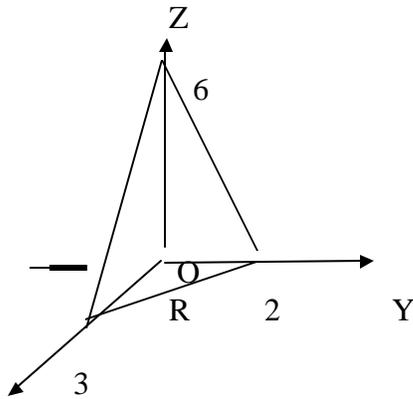
Sebagaimana dijelaskan di awal bahwa pengertian integral rangkap dua diturunkan dari menghitung volume benda ruang yang dibatasi oleh dua buah permukaan. Misal $z = f(x, y)$ dan R merupakan daerah terletak pada bidang XOY yang diberikan atau bisa merupakan proyeksi dari permukaan $z = f(x, y)$. Maka volume benda ruang yang dibatasi di atas oleh permukaan $z = f(x, y)$ dan dibatasi di bawah oleh R dituliskan:

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA$$

Contoh 5

Hitung volume bangun ruang yang terletak di oktan pertama yang dibatasi oleh bidang $2x + 3y + z - 6 = 0$.

Jawab :



Dari $2x + 3y + z - 6 = 0$ didapatkan, $f(x, y) = -2x - 3y + 6$. Misal R daerah di oktan pertama ($x \geq 0, y \geq 0$ dan $z \geq 0$) merupakan proyeksi $f(x, y)$ di bidang XOY. Maka

$$R = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq \frac{6-2x}{3} \right\} \text{ atau}$$

$$R = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{6-3y}{2}, 0 \leq y \leq 2 \right\}$$

Jadi volume bangun ruang :

$$V = \iint_R f(x, y) \, dA = \iint_R (-2x - 3y + 6) \, dA$$

X

Dalam fisika, integral rangkap dua dapat digunakan untuk menghitung massa, pusat massa dan momen dari suatu lamina (lempengan) yang mempunyai massa jenis yang dinyatakan sebagai fungsi dari x dan y .

Misal suatu lamina $f(x, y)$ dengan massa jenis $\delta(x, y)$ yang proyeksinya pada bidang XOY adalah R . Maka massa lamina :

$$m = \iint_R \delta(x, y) \, dA$$

Sedangkan momen dari lamina terhadap sumbu Y dan sumbu X :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Momen dari lamina} \\ \text{terhadap sumbu Y} \end{array} \right] = M_y = \iint_R x \mathbf{d}(x, y) dA$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Momen dari lamina} \\ \text{terhadap sumbu X} \end{array} \right] = M_x = \iint_R y \mathbf{d}(x, y) dA$$

Pusat massa dari lamina (x, y) dengan : $x = \frac{M_y}{m}$ dan $y = \frac{M_x}{m}$.

Contoh 6

Tentukan massa dan pusat massa dari lamina yang dinyatakan oleh $f(x, y) = 2x - y + 4$ dengan massa jenis $\delta(x, y) = x - y$.

Jawab :

Proyeksi $f(x, y) = 2x - y + 4$ pada bidang XOY, $R = \{(x, y) | -2 \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 2x + 4\}$.

$$\text{Massa, } m = \iint_R \mathbf{d}(x, y) dA = \int_{-2}^0 \left(\int_0^{2x+4} (x - y) dy \right) dx = -8$$

$$\text{Momen terhadap sumbu Y, } M_y = \iint_R x \mathbf{d}(x, y) dA = \int_{-2}^0 x \left(\int_0^{2x+4} (x - y) dy \right) dx = \frac{16}{3}$$

$$\text{Momen terhadap sumbu X, } M_x = \iint_R y \mathbf{d}(x, y) dA = \int_{-2}^0 \left(\int_0^{2x+4} y(x - y) dy \right) dx = -\frac{328}{9}$$

$$\text{Pusat massa, } \left(\frac{M_y}{m}, \frac{M_x}{m} \right) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{41}{9} \right)$$

Soal latihan

(Nomor 1 sd 6) Hitung volume benda ruang berikut :

1. Terletak di bawah $z = 2x + y$ dan di atas persegi panjang $R = \{(x, y) | 3 \leq x \leq 5, 1 \leq y \leq 2\}$.
2. Terletak di oktan pertama $[x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0]$ dibatasi oleh : $x = 0, z = 0, z - y = 0, x = 5$ dan $z = -2y + 6$.
3. Terletak di oktan pertama dibatasi oleh bidang koordinat ($x = 0, y = 0$ dan $z = 0$) dan bidang $z = 5 - 2x - y$.
4. Dibatasi oleh tabung $x^2 + y^2 = 9$ dan bidang $z = 0$ dan $z = 3 - x$.
5. Dibatasi di atas oleh $z = x + 2y + 2$ dan di bawah oleh bidang XOY antara $y = 0$ dan $y = 1 - x^2$.
6. Dibatasi di atas oleh $z = 9 - x^2$ dan di bawah oleh $z = 0$ dan $y^2 = 3x$.

(Nomor 7 sd 9) Tentukan massa dan pusat massa dari lamina dengan massa jenis $\delta (x,y)$ bila lamina diberikan berikut :

7. Sumbu X, garis $x = 1$ dan kurva $y = \sqrt{x}$; $\delta (x,y) = x \cdot y$

8. $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ dan $x = \pi$. ; $\delta (x,y) = x + y$

9. $y = x$ dan $y = 2 - x^2$; $\delta (x,y) = x$