

INTEGRAL RANGKAP TIGA

Misal diberikan fungsi tiga peubah, $w = f(x, y, z)$. Maka untuk menentukan integral rangkap tiga dari $w = f(x, y, z)$ terhadap suatu balok, B dilakukan sebagai berikut. bagi balok, B menjadi sejumlah n sub balok, B_i ; $i = 1, 2, \dots, n$. Didapatkan volume sub balok $\Delta V_i = \Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$, sehingga volume balok, B yaitu :

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i$$

Integral rangkap tiga dari $w = f(x, y, z)$ terhadap B didefinisikan sebagai berikut:

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

Syarat yang harus dipenuhi untuk integral rangkap tiga di atas adalah $w = f(x, y, z)$ kontinu pada B .

Misal G merupakan benda ruang sembarang. Maka untuk menghitung integral rangkap tiga dari $w = f(x, y, z)$ atas G dilakukan dengan cara mendefinisikan fungsi $g(x, y, z)$ berikut :

$$g(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & ; (x, y, z) \in G \\ 0 & ; (x, y, z) \in B - G \end{cases}$$

B merupakan balok yang melingkupi benda ruang, G . Sehingga didapatkan :

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_B g(x, y, z) dV$$

Dalam perhitungan, G dapat dipandang sebagai benda ruang yang dibatasi oleh G_z - batas bawah dan batas atas dari G_z berturut-turut $z_1 = u(x, y)$ dan $z_2 = v(x, y)$ atau dalam notasi himpunan, $G_z = \{z \mid u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$ - dan G_{xy} yang merupakan proyeksi dari G pada bidang XOY . Sehingga bentuk integral rangkap tiga dari $w = f(x, y, z)$ atas G dituliskan :

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_{G_{xy}} \left[\int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dA$$

Bentuk dari G_{xy} dapat dibedakan menjadi dua yaitu :

$$1. G_{xy} = \{(x,y) | a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq g(x)\}$$

$$\iint_{G_{xy}} \left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dA = \int_a^b \int_{h(x)}^{g(x)} \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx$$

$$2. G_{xy} = \{(x,y) | h(y) \leq x \leq g(x), c \leq y \leq d\}$$

$$\iint_{G_{xy}} \left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z) dz \right] dA = \int_c^d \int_{h(y)}^{g(y)} \int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x,y,z) dz dx dy$$

Urutan integrasi sangat mungkin bergantung dari bentuk bangun ruang G , sehingga selain merupakan gabungan dari G_z dan G_{xy} . Namun dapat juga G dipandang sebagai gabungan antara G_x dan G_{yz} atau G_y dan G_{xz} . Sedangkan G_{yz} dan G_{xz} berturut-turut merupakan proyeksi dari bangun ruang G pada bidang YOZ dan XOZ.

Contoh 7

Hitung integral $\int_0^2 \int_1^z \int_0^{\sqrt{x/z}} 2xyz dy dx dz$

Jawab :

$$\int_0^2 \int_1^z \int_0^{\sqrt{x/z}} 2xyz dy dx dz = \int_0^2 \left[\int_1^z x \left(\int_0^{\sqrt{x/z}} 2y dy \right) dx \right] dz = \frac{2}{3}$$

Contoh 8

Hitung integral $\iiint_G 2x dV$ bila

$$a. G = \left\{ (x,y,z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq 4, 0 \leq z \leq \frac{3}{2}x \right\}$$

b. G merupakan daerah di oktan pertama yang dibatasi oleh tabung $y^2 + z^2 = 1$, bidang $x = 1$ dan $x = 4$.

Jawab :

$$a. \iiint_G 2x \, dV = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} \int_0^{3x/2} 2x \, dz \, dx \, dy = \int_0^4 \left[\int_0^{\sqrt{y}} 2x \left(\int_0^{3x/2} dz \right) dx \right] dy = \frac{65}{4}$$

$$b. G \text{ dituliskan, } G = \left\{ (x, y, z) \mid 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{1-z^2}, 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

$$\text{Jadi } \iiint_G 2x \, dV = \int_1^4 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} 2x \, dy \, dz \, dx = \int_1^4 2x \left[\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-z^2}} dy \right) dz \right] dx = -4p.$$

Secara geometris nilai integral rangkap tiga dari $w = f(x, y, z)$ atas bangun ruang G merupakan volume dari bangun ruang G bila $f(x, y, z) = 1$.

Contoh 9

Hitung volume bangun ruang, G yang terletak di oktan pertama dibatasi oleh $y = 2x^2$ dan $y + 4z = 8$.

Jawab :

$$G \text{ dituliskan, } G = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x^2, 0 \leq z \leq \frac{8-y}{4} \right\}.$$

$$\text{Volume, } V = \iiint_G dV = \int_0^2 \int_0^{2x^2} \int_0^{(8-y)/4} dz \, dy \, dx = \int_0^2 \left[\int_0^{2x^2} \left(\int_0^{(8-y)/4} dz \right) dy \right] dx = \frac{224}{30}$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 5) Hitung nilai integral rangkap tiga berikut.

$$1. \int_{-2}^5 \int_0^{3x} \int_0^{x+2} 4x \, dz \, dy \, dx$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \int_0^z \int_0^y \sin(x+y+z) \, dx \, dy \, dz$$

$$3. \int_0^2 \int_{-1}^4 \int_0^{3y+x} dz \, dy \, dx$$

$$4. \int_{-2}^4 \int_{x-1}^{x+1} \int_0^{\sqrt{2y/x}} 3xyz \, dz \, dy \, dx$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \int_{\sin z}^0 \int_0^{2yz} \sin\left(\frac{x}{y}\right) dx dy dz$$

(Nomor 6 sd 9) Hitung nilai integral $\iiint_G xyz \, dV$ bila :

$$6. G = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq \frac{1}{6}(12 - 3x - 2y) \right\}$$

$$7. G = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{4 - y^2}, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3 \right\}$$

$$8. G = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 3z, 0 \leq y \leq 4 - x - 2z, 0 \leq z \leq 2 \right\}$$

$$9. G = \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{z}, 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

(Nomor 10 sd 13) Hitung volume bangun ruang G bila G dibatasi oleh :

$$10. y = 2x^2, y + 4z = 8 \text{ dan terletak di oktan pertama.}$$

$$11. y^2 + 4z^2 = 4, y = x, y = 0 \text{ dan terletak di oktan pertama}$$

$$12. x^2 = y, z^2 = y \text{ dan } y = 1$$

$$13. y = x^2 + 2, y = 4, z = 0 \text{ dan } 3y - 4z = 0$$