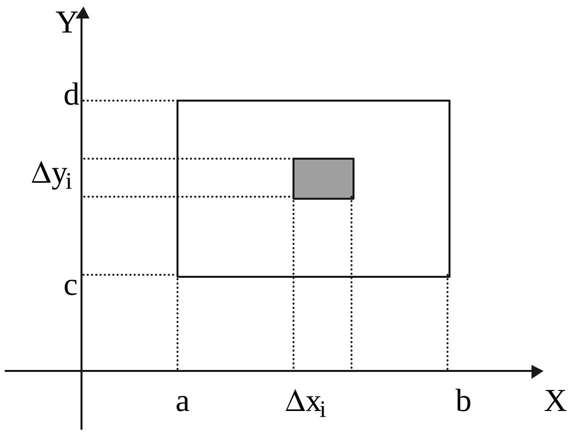
INTEGRAL RANGKAP DUA

Misal diberikan daerah di bidang XOY yang berbentuk persegi panjang, $D = \{(x,y) \mid a \le x \le b \,,\, c \le y \le d\}$ dan fungsi dua peubah z = f (x,y) > 0 . Maka untuk menghitung volume benda ruang yang dibatasi di atas oleh kurva z = f (x,y) dan di bawah oleh D dilakukan sebagai berikut.



Bagi daerah D menjadi sub persegi panjang yang berukuran Δx_i dan Δy_i. Ambil sebuah titik pada sub persegi panjang, misal titik potong diagonal (x_i,y_i), sehingga kita dapatkan bangun ruang yang dibatasi di atas oleh z = f (x,y) dan di bawah oleh sub persegi panjang. Bangun ruang (partisi) tersebut akan mendekati bangun balok dengan tinggi f (x_i,y_i). Maka kita dapatkan volume tiap-tiap partisi adalah hasilkali luas alas ($\Delta A_i = \Delta x_i \, \Delta y_i$) dan tinggi (f (x_i,y_i)), yakni $V_i = f(x_i,y_i)\,\Delta A_i$. Bila tiap-tiap partisi kita jumlahkan maka dapat dituliskan dalam bentuk : $\sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i$. Jumlah volume partisi tersebut akan merupakan volume bangun ruang yang dibatasi di atas oleh z = f (x,y) dan di bawah oleh D bila diambil sebanyak tak hingga partisi atau n $\to \infty$, yakni :

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta A_i$$

Integral rangkap dua dari z = f (x,y) atas daerah D didefinisikan sebagai berikut:

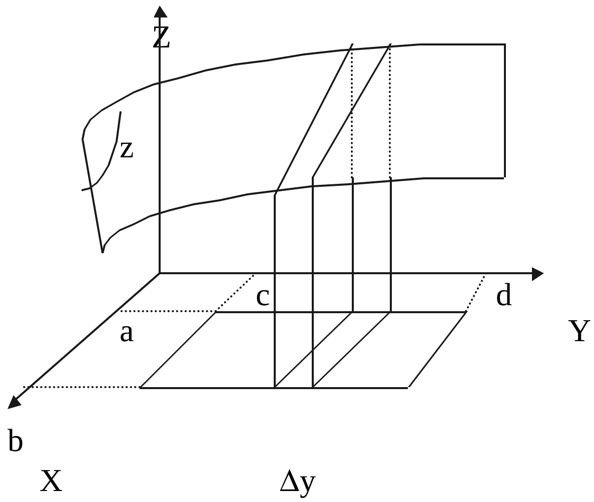
$$\iint_D f(x,y)\; dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\,\Delta A_i$$

Sifat-sifat dari integral rangkap dua diberikan berikut :

1. $\iint_D [a\; f(x,y) + bg(x,y)]dA = a\iint_D f(x,y)\,dA + b\iint_D g(x,y)\,dA$
2. Bila D = B $\cup$ C dan B $\cap$ C = $\varnothing$ maka $\iint_D f(x,y)\,dA = \iint_B f(x,y)\,dA + \iint_C f(x,y)\,dA$

Iterasi Integral

Untuk menghitung integral rangkap dua dari z = f (x,y) atas daerah berbentuk persegi panjang D kita lakukan sebagai berikut.



Luas penampang benda yang tegak lurus terhadap sumbu Y dengan c ≤ y ≤ d , misal $A(y_i)$ adalah $A(y_i) = \int_a^b f(x,y)\,dx$.

Volume bangun ruang merupakan jumlah volume : $\sum_{i=1}^{n} A(y_i)\,\Delta y$ untuk $n \to \infty$.

Oleh karena itu, integral rangkap dua dari z = f (x,y) atas daerah D dapat diselesaikan dengan cara berikut :

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_c^d A(y)\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\ dy\right] dx .$$

Dengan menggunakan pendekatan yang sama seperti di atas, integral rangkap dua dari z = f (x,y) atas daerah D dapat diselesaikan dengan cara sebagai berikut :

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dx\right] dy$$

Metode penyelesaian integral rangkap dua di atas dinamakan **<u>Iterasi Integrasi</u>**.

Contoh 1

Hitung integral $\iint_D f(x,y)\,dA$ bila

a. $f(x,y) = 2xy$ dan $D = \{(x,y) \mid 0 < x < 2, 1 < y < 3\}$

b. $f(x,y) = x^2$ dan D daerah tertutup yang dibatasi oleh garis x = -1, x = 1 , y = 0 , y = 1.

Jawab :

a. $\iint_D f(x,y)\,dA = \int_0^2 \int_1^3 2xy\ dy\ dx = \int_0^2 x\left(\int_1^3 2y\ dy\right) dx = 16$

b. $\iint_D f(x,y)\, dA = \int_0^1 \int_{-1}^1 x^2\, dx\, dy = \int_0^1 \left(\int_{-1}^1 x^2\, dx \right) dy = \frac{2}{3}$

Integral Rangkap atas Daerah Sembarang

Misal R merupakan daerah sembarang . Maka untuk menghitung integral rangkap dua dari z = f (x,y) atas daerah R dilakukan berikut. Dibentuk daerah persegi panjang D yang melingkupi daerah R dan didefinisikan suatu fungsi baru, g (x, y) yaitu:

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ; \quad (x,y) \in R \\ 0 & ; \quad (x,y) \in D - R \end{cases}$$

Nilai integral rangkap dua dari g (x,y) atas D sama dengan integral rangkap dua dari f (x,y) atas R, dituliskan :

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \iint_D g(x,y)\, dA$$

Hal ini menunjukkan bahwa untuk menghitung integral rangkap dua atas suatu daerah sembarang dapat dicari dengan menggunakan pendekatan yang sama seperti menghitung integral rangkap atas daerah berbentuk persegi panjang.

Adapun daerah sembarang secara umum dapat dibedakan menjadi dua tipe yaitu :

1. Tipe I, $R = \{(x,y) | a \le x \le b\, , v(x) \le y \le w(x)\}$

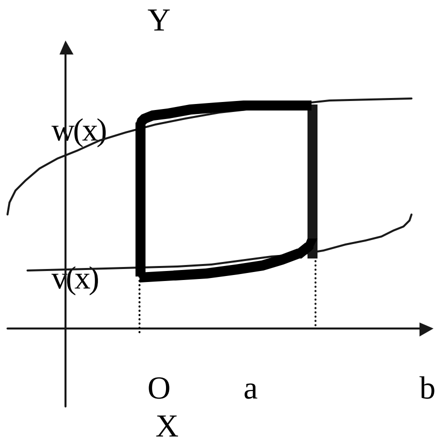
   Integral rangkap dua dari z = f (x,y) atas R dituliskan dengan :

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \left[\int_{v(x)}^{w(x)} f(x,y)\, dy \right] dx$$

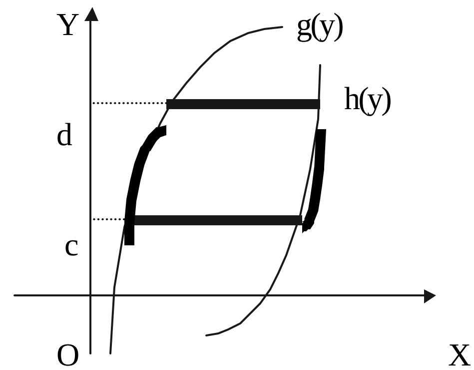
2. Tiep II, $R = \{(x,y) \big| g(y) \le x \le h(y), c \le y \le d\}$

   Integral rangkap dua dari z = f (x,y) atas R ditlusikan dengan :

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_c^d \left[\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\, dx \right] dy$$



Tipe I



Tipe II

Contoh 2

Hitung integral $\iint_R f(x,y)\, dA$ bila

a. $f(x,y) = 2x$ dan $R = \left\{ (x,y) \middle| 0 < x < 1,\ x < y < -x^2 + 1 \right\}$

b. f(x,y) = 2y dan R merupakan daerah tertutup yang dibatasi oleh x = 2, y = x^2 , sumbu X.

Jawab :

a. $\iint_R f(x,y)\, dA = \int_0^1 \int_x^{-x^2+1} 2x\ dy\ dx = \int_0^1 2x \left(\int_x^{-x^2+1} dy \right) dx = -\frac{1}{6}$

b. Daerah R dapat dituliskan menjadi :

i. $R_1 = \left\{ (x,y) \middle| 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2 \right\}$ atau

ii. $R_2 = \left\{ (x,y) \middle| \sqrt{y} \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4 \right\}$

Untuk R_1, $\iint_{R_1} f(x,y)\, dA = \int_0^2 \int_0^{x^2} 2y\ dy\ dx = \int_0^2 \left(\int_0^{x^2} 2y\ dy \right) dx = \frac{32}{5}$

Untuk R_2 , $\iint_{R_2} f(x,y)\, dA = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 2y\ dx\ dy = \int_0^4 2y \left(\int_{\sqrt{y}}^2 dx \right) dy = \frac{32}{5}$

Perubahan Urutan Integrasi

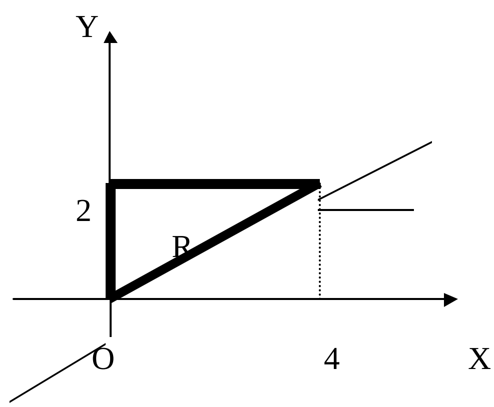
Seringkali dijumpai dalam perhitungan integral rangkap dua, kita dihadapkan kepada bentuk iterasi yang diberikan tidak dapat dilakukan secara langsung seperti apa yang diminta. Sebagai contoh, perhitungan integral rangkap dua berikut tidak dapat dilakukan dengan iterasi yang diberikan (dengan mengintegralkan terhadap y kemudian terhadap x).

$$\int_0^4 \int_{x/2}^{2} e^{y^2}\, dy\, dx$$

Untuk menyelesaikan integral di atas kita harus merubah urutan integrasi. Bila integral dituliskan dalam bentuk :

$$\iint_R e^{y^2}\, dA$$

maka $R = \left\{ (x,y) \middle| 0 \le x \le 4,\ \frac{x}{2} \le y \le 2 \right\}$. Daerah R digambarkan berikut :



Daerah R dapat juga dinyatakan dengan :
$R = \left\{ (x,y) \middle| 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2y \right\}$

Oleh karena itu, nilai integral dari :

$$\int_0^4 \int_{x/2}^{2} e^{y^2}\, dy\, dx = \int_0^2 \int_0^{2y} e^{y^2}\, dx\, dy$$

Contoh 3

Ubahlah urutan integrasi dari integral rangkap berikut

a. $\int_0^2 \int_0^{y^2} f(x,y)\, dx\, dy$

b. $\int_{-1}^{0} \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\, dy\, dx$

Jawab :

a. Misal $R = \left\{ (x,y) \middle| 0 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le 2 \right\}$. Maka $R = \left\{ (x,y) \middle| 0 \le x \le 4,\ 0 \le y \le \sqrt{x} \right\}$.

Jadi $\int_0^2 \int_0^{y^2} f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\ dy\ dx$.

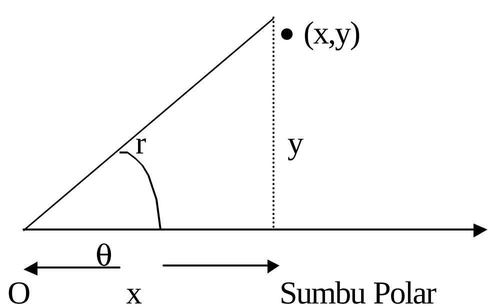
b. Misal $R = \left\{ (x,y) \middle| -1 \le x \le 0,\ -x^2 \le y \le x^2 \right\}$.

Maka $R = \left\{ (x,y) \middle| -1 \le x \le -\sqrt{-y},\ -1 \le y \le 0 \right\} \cup \left\{ (x,y) \middle| -1 \le x \le -\sqrt{y},\ 0 \le y \le 1 \right\}$

Jadi $\int_{-1}^{0} \int_{-x^2}^{x^2} f(x,y)\ dy\ dx = \int_{-1}^{0} \int_{-1}^{-\sqrt{-y}} f(x,y)\ dx\ dy + \int_{0}^{1} \int_{-1}^{-\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ dy$

Koordinat Kutub

Kadang-kadang perhitungan integral rangkap dua dalam koordinat cartesius (x dan y) membutuhkan perhitungan yang rumit. Untuk lebih menyederhanakan perhitungan kita kenalkan koordinat kutub (polar).



Misal (x,y) merupakan titik pada koordinat cartesius. Maka dalam koordinat kutub didapatkan hubungan : x = r cos θ dan y = r sin θ.

Integral rangkap dua dari f (x,y) atas daerah R dapat dituliskan :

$$\iint_R f(x,y)\ dA = \iint_R f\left(r\cos\theta, r\sin\theta\right) dA$$

$$= \iint_R F(r,\theta)\ dA$$

Dalam koordinat cartesius, dA = dx dy atau dA = dy dx , sedangkan dalam dalam koordinat kutub : dA = | J(r,θ) | dr dθ atau dA = | J(r,θ) | dθ dr dengan

$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

disebut **<u>determinan Jacobi</u>** dari r dan θ.

Sehingga bentuk integral dalam koordinat kutub dituliskan berikut :

$$\iint_R f(x,y)\ dA = \iint_R F(r,\theta)\ \left|J(r,\theta)\right|\ dr\,d\theta = \iint_R F(r,\theta)\ r\ dr\,d\theta$$

Contoh 4

Gunakan koordinat kutub untuk menyelesaikan $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\; dy\; dx$

Jawab :

Misal $R = \left\{(x,y) \middle| 0 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$. Maka R merupakan daerah setengah lingkaran dengan $0 \le r \le 1$ dan $\frac{-\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

Jadi $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x\; dy\; dx = \int_0^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos\theta\; d\theta\; dr = \int_0^1 r^2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta\; d\theta \right) dr = \frac{2}{3}$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 6) Hitung nilai integral rangkap dua berikut :

1. $\iint_D (1+8xy)\, dA$; $D = \left\{(x,y) \middle| 1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2\right\}$
2. $\iint_D \left(4xy^3\right) dA$; $D = \left\{(x,y) \middle| -1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\right\}$
3. $\iint_D \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+1}} \right) dA$; $D = \left\{(x,y) \middle| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\right\}$
4. $\iint_D (x \sin y - y \sin x)\, dA$; $D = \left\{(x,y) \middle| 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \frac{\pi}{3}\right\}$
5. $\int_1^2 \int_0^3 (2x - xy)\, dx\; dy$
6. $\int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 x \cos(xy)\, dy\; dx$

(Nomor 7 sd 16) Hitung integral rangkap dua berikut :

7. $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} xy^2\; dy\, dx$

8. $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} y\, dx\, dy$

9. $\int_{\sqrt{p}}^{\sqrt{2p}} \int_0^{x^3} \sin\frac{y}{x}\, dy\, dx$

10. $\int_0^{p/2} \int_0^{x^2} \left(x^2 - y^2\right) dy\, dx$

11. $\int_1^2 \int_0^{y^2} e^{x/y^2}\, dx\, dy$

12. $\iint_R 6xy\, dA$; R daerah dibatasi oleh y = 0, x = 2 dan y = x^2.

13. $\iint_R xy\, dA$; R merupakan trapesium dengan titik sudut (1,3), (5,3) , (2,1) dan (4,1).

14. $\iint_R x\cos(xy)\, dA$; R daerah dibatasi oleh x = 1, x = 2, y = ½π dan y = 2π / x.

15. $\iint_R (x+y)\, dA$; R daerah dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = \sqrt{x}$

16. $\iint_R xy^2\, dA$; R daerah dibatasi oleh y =1, y = 2, x = 0 dan y = x.

(Nomor 17 sd 22) Hitung integral rangkap dua berikut dengan merubah urutan integrasinya terlebih dahulu.

17. $\int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2}\, dy\, dx$

18. $\int_0^2 \int_{y/2}^1 \cos\left(x^2\right) dx\, dy$

19. $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\, dx\, dy$

20. $\int_1^3 \int_0^{\ln x} x\, dy\, dx$

21. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\cos^{-1} x} x \, dy \, dx$

22. $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sin^{-1} x}^{P/2} \sec^2(\cos x) \, dx \, dy$

(Nomor 23 sd 29) Selesaikan integral rangkap dua berikut (Gunakan koordinat kutub)

23. $\displaystyle\iint_R e^{x^2+y^2} \, dA$; R daerah di dalam lingkaran $x^2 + y^2 = 4$

24. $\displaystyle\iint_R \sqrt{4 - x^2 - y^2} \, dA$; R daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh : $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$ dan $y = x$.

25. $\displaystyle\iint_R \frac{1}{4 + x^2 + y^2} \, dA$; R daerah di kuadran pertama yang dibatasi oleh : $x^2 + y^2 = 4$, $y = 0$ dan $y = x$.

26. $\displaystyle\iint_R y \, dA$; R daerah di dalam $x^2 + y^2 = 4$ dan di luar $x^2 + y^2 = 1$ yang terletak di kuadran pertama.

27. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left(4 - x^2 - y^2\right)^{-1/2} dy \, dx$

28. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin\left(x^2 + y^2\right) dx \, dy$

29. $\displaystyle\int_1^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \left(x^2 + y^2\right)^{-1/2} dy \, dx$