PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDER DUA HOMOGEN

Bentuk umum PD linear order dua dengan koefisien konstan adalah : $a\,y''+b\,y'+c\,y = f\,(x)$ dengan a, b dan c konstanta. Bila f(x) = 0 maka $a\,y''+b\,y'+c\,y = 0$ disebut **PD linear order dua homogen**, sedang bila f(x) $\neq$ 0 maka disebut **PD linear order dua tak homogen**.

Solusi PD homogen ditentukan dengan memperkenalkan pengertian kebebasan linear dan Wronkian dari dua fungsi berikut terlebih dahulu. Dua buah fungsi f(x) dan g(x) dikatakan **bebas linear** pada interval I bila persamaan kombinasi linear dari dua fungsi tersebut, m f(x) + n g(x) = 0 untuk setiap x $\in$ I hanya dipenuhi oleh m = n = 0. Bila tidak demikian maka dikatakan f(x) dan g(x) **bergantung linear**.

Misal diberikan dua fungsi f(x) dan g(x) yang diferensiabel untuk setiap x $\in \Re$. Maka Wronkian dari f(x) dan g(x) didefinisikan :

$$W\big(f(x), g(x)\big) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}$$

Sifat dari kebebasan linear dan wronkian dari dua fungsi f(x) dan g(x) diberikan berikut. Dua fungsi f(x) dan g(x) dikatakan bebas linear pada I bila dan hanya bila wronkian dari dua fungsi tersebut, W [f(x),g(x)] $\neq$ 0 untuk setiap x $\in$ I.

Dari PD order satu didapatkan sebuah solusi sedangkan PD order dua homogen didapatkan dua buah solusi yang bebas linear. Misal $y_1(x)$ dan $y_2(x)$ merupakan solusi PD homogen dan keduanya bebas linear. Maka kombinasi linear dari keduanya merupakan solusi umum PD homogen, yaitu y = $C_1\ y_1(x) + C_2\ y_2(x)$. Selanjutnya dalam menentukan solusi PD homogen dilakukan hal berikut.

Misal $y = e^{mx}$ merupakan solusi PD homogen : $a\,y''+b\,y'+c\,y = 0$. Dengan mensubstitusikan solusi tersebut dan turunannya ke dalam PD didapatkan :

$$a\left(e^{mx}\right)'' + b\left(e^{mx}\right)' + c\,e^{mx} = 0$$

$$e^{mx}\left(a\,m^2 + b\,m + c\right) = 0$$

Sebab $e^{mx} \neq 0$, $\forall x \in \Re$, maka $a m^2 + b m + c = 0$ dan disebut **persamaan karakteristik dari PD**. Akar persamaan karakteristik dari PD adalah :

$$m_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \text{ dan } m_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

Kemungkinan nilai m_1 dan m_2 bergantung dari nilai D, yaitu :

1. Bila D > 0 maka $m_1 \neq m_2$ (Akar real dan berbeda)
2. Bila D = 0 maka $m_1 = m_2$ (Akar real dan sama)
3. Bila D < 0 maka m_1 , m_2 merupakan bilangan kompleks (imajiner)

1. Akar Karakteristik Real dan Berbeda.

Misal persamaan karakteristik dari PD : $a\,y''+b\,y'+c\,y=0$ merupakan bilangan real dan berbeda, $m_1 \neq m_2$. Maka $y_1 = e^{m_1 x}$ dan $y_2 = e^{m_2 x}$ merupakan solusi bebas linear dari PD homogen tersebut. Solusi umum PD dituliskan :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$$

Sedangkan solusi khusus PD dapat ditentukan dengan mencari nilai dari C_1 dan C_2 dari nilai awal yang diberikan.

Contoh

Diketahui PD : $y''-5y'+6y=0$. Tentukan :

a. Solusi umum PD
b. Solusi khusus PD bila nilai awal y(0) = 1 dan y ‘ (0) = 0.

Jawab :

a. Persamaan karakteristik PD : m^2 - 5 m + 6 = 0 = 0 mempunyai akar m = 3 dan m = 2. Solusi umum PD, $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$
b. Substitusi nilai awal ke dalam solusi umum, $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$ dan turunan pertamanya, $y' = 3C_1 e^{3x} + 2C_2 e^{2x}$ didapatkan C1 = -2 dan C2 = 3. Jadi solusi khusus PD, $y = -2e^{3x} + 3e^{2x}$

2. Akar Karakteristik Real dan Sama.

Misal persamaan karakteristik dari PD : $a\,y''+b\,y'+c\,y=0$ merupakan bilangan real dan sama, $m = \dfrac{-b}{2a}$. Maka salah satu solusi PD : $y_1 = e^{mx} = e^{-bx/2a}$. Untuk menentukan solusi yang lain, solusi kedua PD, didapatkan dengan memisalkan : $y_2 = v(x)\,y_1 = v(x)\,e^{-bx/2a}$. Fungsi v(x) dicari dengan mensubstitusikan solusi kedua dan turunannya ke dalam PD :

$$y_2 = v(x)\,e^{-bx/2a}$$

$$y_2' = v'(x)e^{-bx/2a} - \frac{b}{2a}v(x)e^{-bx/2a}$$

$$y_2'' = \left(v''(x) - \frac{b}{2a}v'(x) + \frac{b^2}{4a^2}v(x)\right)e^{-bx/2a}$$

$$a\left(v''(x)-\frac{b}{a}v'(x)+\frac{b^2}{4a^2}v(x)\right)e^{-bx/2a}+b\left(v'(x)-\frac{b}{2a}v(x)\right)e^{-bx/2a}+c\,v(x)e^{-bx/2a}=0$$

$$a\left(v''(x)-\frac{b}{a}v'(x)+\frac{b^2}{4a^2}v(x)\right)+b\left(v'(x)-\frac{b}{2a}v(x)\right)+c\,v(x)=0$$

$$a\,v''(x)-\left(\frac{b^2}{4a}-c\right)v(x)=0$$

Sebab $D=b^2-4ac=0$, maka $a\,v''(x)=0$. Oleh karena itu, v(x) dapat dinyatakan sebagai fungsi linear yaitu v(x) = p x + q.

Ambil p = 1 dan q = 0, didapatkan v(x) = x dan solusi kedua : $y_2=x\,e^{-bx/2a}$

Solusi pertama dan kedua PD, y_1 dan y_2 merupakan solusi bebas linear, sehingga solusi umum PD bila akar karakterisitik dimisalkan m, yaitu :

$$y=C_1e^{mx}+C_2\,xe^{mx}$$

Cara untuk mendapatkan solusi kedua di atas dikenal dengan nama **metode urutan tereduksi**.

Contoh

Diketahui PD : $y''-y=0$. Tentukan :

a. Solusi umum PD
b. Solusi khusus PD bila y(0) = 1 dan y '(0) = -1

Jawab :

a. Akar persamaan karakteristik PD, m = 1. Solusi umum , $y=C_1e^{x}+C_2\,xe^{x}$
b. Solusi khusus PD, $y=e^{x}-2\,xe^{x}$

3. Akar Karakteristik Kompleks

Misal akar karakteristik PD : $a\,y''+b\,y'+c\,y=0$ kompleks :

$$m_1=p+i\,q \quad dan \quad m_2=p-i\,q \quad dengan:\ i=\sqrt{-1},\ p=\frac{-b}{2a}\ dan\ \ q=\frac{\sqrt{D}}{2a}$$

Maka solusi umum PD dituliskan :

$$y=C_1e^{m_1x}+C_2\,e^{m_2x}=C_1e^{(p+iq)x}+C_2\,e^{(p-iq)x}$$

Menggunakan rumus Euler : $e^{iy}=\cos y+i\sin y$, didapatkan :

$$y=C_1e^{px}(\cos qx+i\sin qx)+C_2\,e^{px}(\cos qx-i\sin qx)$$
$$=(C_1+C_2)e^{px}\cos qx+i(C_1-C_2)e^{px}\sin qx$$

Karena solusi PD yang diharapkan dalam fungsi bernilai real, maka dapat diambil $C_3=C_1+C_2\ \ dan\ \ C_4=i(C_1-C_2)$. Sehingga didapatkan solusi umum PD :

$$y=e^{px}(C_3\cos qx+C_4\sin qx)$$

Hal ini dapat dilakukan karena terlihat bahwa solusi pertama dan solusi kedua PD, $y_1 = e^{px} \cos qx$ dan $y_2 = e^{px} \sin qx$ merupakan solusi bebas linear.

Contoh
Diketahui PD, $y'' + 4y = 0$. Tentukan :

a. Solusi umum PD
b. Solusi khusus PD bila y(0) = 1 dan y '(0) = -3

Jawab :

a. Akar persamaan karakteristik PD, m = ± 3 i. Didapatkan p = 0 dan q = 3. Solusi umum PD, $y = C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x$.
b. Substitusikan nilai awal ke dalam solusi umum dan turunannya, didapatkan C_3 = 1 dan C_4 = -1. Solusi khusus PD, $y = \cos 3x - \sin 3x$

Soal latihan

(Nomor 1 sd 5) Tentukan solusi umum PD berikut.

1. $y'' + 5y' - 6y = 0$
2. $y'' + 4y' + 4y = 0$
3. $y'' + 2y' + 5y = 0$
4. $y'' + 2y' + 8y = 0$
5. $3y'' + 4y' + 9y = 0$

(Nomor 6 sd 10) Tentukan solusi khusus PD berikut.

6. $y'' - 4y' - 5y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$
7. $y'' - y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
8. $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
9. $y'' - 6y' + 9y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
10. $y'' - 4y' + 7y = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$