

## PERSAMAAN DIFERENSIAL DENGAN KOEFISIEN HOMOGEN

Fungsi  $F(x,y)$  disebut fungsi homogen bila terdapat  $n \in \mathbb{R}$  sehingga berlaku  $F(kx,ky) = k^n F(x,y)$ .  $n$  disebut order dari fungsi homogen  $F(x,y)$ .

Beberapa bentuk PD tak linier order satu dengan peubah tak terpisah namun koefisiennya merupakan fungsi homogen dengan order sama dapat dicari solusinya menggunakan metode substitusi sehingga didapatkan bentuk PD peubah terpisah.

Bentuk PD order satu dengan koefisien konstan dapat dituliskan sebagai :  $M(x,y) dy = N(x,y) dx$  dengan  $M(x,y)$  dan  $N(x,y)$  merupakan fungsi homogen dengan order sama atau  $\frac{dy}{dx} = F(x,y)$  dengan  $F(x,y)$  merupakan fungsi homogen order nol. Maka solusi PD dicari dengan mensubstitusikan :  $y = v x$  dan  $dy = v dx + x dv$  ke dalam PD sehingga didapatkan bentuk PD dengan peubah terpisah.

Contoh

Diketahui PD :  $(x^2 + y^2) dy - xy dx = 0$ . Tentukan :

- Solusi umum PD
- Solusi khusus PD bila  $y(0) = 1$

Jawab :

- Substitusikan  $y = v x$  dan  $dy = v dx + x dv$  ke dalam PD, didapatkan :

$$(x^2 + v^2 x^2)(v dx + x dv) - vx^2 dx = 0$$

$$(1 + v^2)(v dx + x dv) - v dx = 0$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{-(1 + v^2) dv}{v^3}$$

$$\ln x = \frac{1}{2v^2} - \ln v - \ln C \quad \text{atau} \quad Cxv = e^{\left(\frac{1}{2v^2}\right)}$$

$$\text{Solusi umum PD, } C y = e^{\left(\frac{x^2}{2y^2}\right)}$$

$$\text{b. Solusi khusus PD, } y = e^{\left(\frac{x^2}{2y^2}\right)}$$

**Soal latihan**

( Nomor 1 sd 5 ) Tentukan solusi umum PD berikut.

1.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2}$
2.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}$
3.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x + 3y}{x - y}$
4.  $2y dx - x dy = 0$
5.  $(x^2 + 3xy + y^2) dx - x^2 dy = 0$

Dalam Matematika terapan, seringkali dijumpai permasalahan untuk mendapatkan keluarga kurva yang tegak lurus terhadap suatu keluarga kurva yang diberikan. Masalah ini disebut **Trayektori Ortogonal**. Pengertian dari ortogonal / tegak lurus dari dua keluarga kurva adalah pada titik potongnya kedua garis singgung kurva saling tegak lurus. Misal diberikan keluarga kurva  $f(x,y) = C$  dengan  $C$  merupakan parameter. Maka untuk mendapatkan trayektori ortogonal dilakukan langkah sebagai berikut :

- (i) Turunkan  $f(x,y) = C$  secara implisit terhadap  $x$ , misal  $Df(x,y)$ .
- (ii) Menggunakan fakta bahwa gradien dari dua buah garis (  $m_1$  dan  $m_2$  ) yang tegak lurus berlaku :  $m_1 = \frac{-1}{m_2}$ . Keluarga kurva yang tegak lurus dengan  $f(x,y) = C$  mempunyai turunan pertama,  $\frac{-1}{Df(x,y)}$ . Bila dari turunan pertama tersebut masih mengandung parameter  $C$  maka nyatakan  $C$  sebagai fungsi dalam  $x$  atau  $y$ .
- (iii) Trayektori ortogonal dari  $f(x,y) = C$  didapatkan dengan mencari solusi PD :  

$$y' = \frac{-1}{Df(x,y)}$$

( Nomor 6 sd 15 ) Tentukan trayektori ortogonal dari keluarga kurva yang diberikan berikut.

6.  $y = C$
7.  $xy = C$
8.  $y = Cx^2$
9.  $y = Cx^3$
10.  $x^2 - y^2 = C$
11.  $x^2 + y^2 = C$
12.  $4x^2 + y^2 = C$
13.  $x^2 = 4cy^3$
14.  $x^2 + (y - C)^2 = C$
15.  $y = \sqrt{x + C}$