ORDER PERSAMAAN DIFERENSIAL

Banyak permasalahan dalam bidang rekayasa yang berkaitan dengan persamaaan diferensial. Satu contoh yang ditampilkan disini, misal dalam rangkaian listrik seri , RL , besar kuat arus I (Ampere) dalam satuan waktu (t) yang melalui rangkaian tersebut dihitung menggunakan rumus berikut :

$$L\,\frac{dI}{dt} + R\,I = E(t) \quad \text{atau} \quad L\,I' + R\,I = E(t)$$

Bentuk rumus di atas merupakan persamaan diferensial dengan t merupakan satu-satunya peubah bebas. Sedangkan besaran Tahanan R (Ohm) dan Induksi L (Henry) diberikan. Fungsi E (t) merupakan besaran gaya elektromagnetik / voltase (Volt). Dalam notasi implisit, bentuk persamaan diferensial di atas dapat dituliskan :

$$f\left(I', I, t\right) = 0$$

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang berkaitan dengan turunan dari suatu fungsi atau memuat suku-suku dari fungsi tersebut dan atau turunannya. Bila fungsi tersebut tergantung pada satu peubah bebas riil maka disebut **Persamaan Diferensial Biasa (PDB).** Sedangkan bila fungsi fungsi terdiri dari lebih dari satu peubah bebas maka disebut **Persamaan Diferensial Parsial (PDP)**.

Untuk lebih memperjelas pengertian PDB dan PDP diberikan beberapa contoh berikut.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = xy$ [Persamaan Airy]
2. $\dfrac{dy}{dx} + y = y^2$ [Persamaan Bernoulli]
3. $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + \left(x^2 - 4\right)y = 0$ [Persamaan Bessel]
4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(1 - y^2\right)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ [Persamaan Van Der Pol]
5. $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ [Persamaan Flux]
6. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ [Persamaan Panas]
7. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ [Persamaan Gelombang]
8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ [Persamaan Laplace]

Persamaan 1 sd 4 merupakan PDB dengan peubah bebas, x dan peubah tak bebas, y, sedangkan persamaan 5 sd 8 merupakan PDP.

Mengawali pembahasan tentang PDB dikenalkan suatu istilah dalam persamaan diferensial yaitu order . **Order** dari PD adalah besar turunan tertinggi yang terjadi pada PD tersebut. Dari contoh di atas persamaan Bernoulli mempunyai order 1 sedangkan persamaan Airy, Bessel dan Van Der Pol berorder 2.

Berdasarkan sifat kelinieran (pangkat satu) dari peubah tak bebasnya, persamaan diferensial dapat dibedakan menjadi PD Linier dan PD tidak linier. Bentuk umum PD linier order n diberikan :

$a_n(x)\ y^{(n)} + \ldots + a_1(x)\ y' + a_0(x)\ y = f(x)$ dengan $a_n(x) \neq 0$

$a_n(x), \ldots, a_0(x)$ disebut koefisien PD.

Bila f(x) = 0 maka disebut **PD Linier Homogen** sedang bila f(x) $\neq$ 0 maka disebut **PD Linier tak Homogen**. Bila tidak dapat dinyatakan seperti bentuk di atas dikatakan **PD tidak Linier.** Dari contoh terdahulu, persamaan Airy dan Bessel merupakan PD Linier (Homogen) sedangkan persamaan Bernoulli dan Van Der Pol merupakan PD tidak linier.

Misal diberikan fungsi : y = sin x - cos x + 1. Bila dilakukan penurunan sampai duakali: $y' = \cos x + \sin x$ dan $y'' = -\sin x + \cos x$, didapatkan hubungan :

$y'' + y = 1$

Bentuk di atas merupakan PD Linier tak Homogen order 2 dengan koefisien konstan. Sedangkan fungsi y = sin x - cos x + 1 disebut **solusi PD**. Yang menjadi permasalahan disini, Bila diberikan suatu PD bagaimana cara mendapatkan solusinya ? Beberapa cara mendapatkan solusi PD akan dibahas pada sub bab berikut. Untuk mempermudah dalam mempelajari cara mendapatkan solusi PD akan dimulai dengan pembahasan dari bentuk PD order satu .

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 7) Klasifikasikan PD berikut menurut : order, linier atau tidak linier, homogen atau tidak homogen.

1. $\dfrac{dy}{dx} + xy^2 = 1$
2. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = 0$
3. $\dfrac{d^2u}{dt^2} + t\dfrac{du}{dt} + 3u = t$
4. $\dfrac{d^2v}{dt^2} = t^2 v$
5. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + y = \sin x$
6. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin(x+y) = \sin x$
7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y^2 = 0$