# DERET TAYLOR DAN MAC LAURIN

Misal f(x) dapat diturunkan sampai k kali pada x = b. Maka f(x) dapat diperderetkan menjadi menjadi deret kuasa dalam bentuk (2.1) yaitu:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k = f(b) + f'(b)(x-b) + \frac{f''(a)}{2!}(x-b)^2 + \ldots$$

Deret di atas disebut **Deret Taylor** dengan pusat x = b atau disebut dengan **polinomial Taylor** pada x = b. Bila b = 0 maka disebut **Deret Mac Laurin**, yaitu berbentuk :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots$$

Contoh :
Perderetkan fungsi berikut ke dalam deret Mac Laurin

a. $f(x) = e^x$
b. $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

Jawab :

a. Bila $f(x) = e^x$ maka $f^{(n)}(x) = e^x$ dan $f^{(n)}(0) = 1$. Oleh karena itu, deret Mac Laurin dari $f(x) = e^x$, yaitu : $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Dari perderetan tersebut terlihat bahwa deret konvergen untuk setiap nilai riil x atau selang / radius konvergensi deret adalah $\Re$.

b. Bila $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ maka $f^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{(1-x)^n}$ dan $f^{(n)}(x) = n!$. Oleh karena itu, deret Mac Laurin : $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ . Selang konvergensi deret yaitu | x | < 1 atau ( -1,1 ).

Kedua bentuk deret di atas dapat digunakan untuk membantu memperderetkan fungsi ke dalam deret Mac Laurin atau Taylor tanpa harus menghitung turunannya terlebih dahulu, dengan syarat bahwa radius atau selang konvergensinya sebanding.

Contoh :
Perderetkan fungsi berikut ke dalam deret taylor dengan pusat diberikan berikut

a. $f(x) = e^{3x}$ ; x = 0
b. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ; x = 1

Jawab :

a. Karena $f(x) = e^{3x}$ mempunyai turunan ke-n untuk setiap nilai riil x maka selang konvergensinya adalah $\Re$. Oleh karena itu, dengan membandingkan pola perderetan $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ maka didapatkan perderetan dari $f(x) = e^{3x}$ yaitu $e^{3x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3x)^k}{k!}$.

b. Karena $f(x) = \frac{1}{x}$ tidak diferensiabel di x = 0 dan fungsi akan diperderetkan ke dalam deret taylor dengan pusat di x = 1 maka tempat kedudukan titik-titik | x - 1 | < 1 merupakan selang konvergensinya. Oleh karena itu, perderetan fungsi $f(x) = \frac{1}{x}$ dalam deret taylor dengan pusat di x = 1 : $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{1 + (x-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (x-1)^k$.

**Soal Latihan**

( Nomor 1 sd 10 ) Perderetkan fungsi berikut dalam deret Mac Laurin

1. $f(x) = e^{2x}$
2. $f(x) = \frac{1}{1+x}$
3. $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
4. $f(x) = \frac{1}{2+x}$
5. $f(x) = \frac{1}{1+2x}$
6. $f(x) = \frac{x}{1+x}$
7. f(x) = sinh x
8. f(x) = sin x
9. f(x) = cos x
10. f(x) = sec x

( Nomor 11 sd 16 ) Carilah polinomial Taylor pada x = b, bila :

11. f(x) = Ln x ; b = 1
12. $f(x) = \frac{1}{x}$ ; $b = -1$
13. $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ; $b = 3$
14. f(x) = cos x ; b = ½π
15. f(x) = sinh x ; b = Ln 4
16. f(x) = sin πx ; b = ½