DERET KUASA

Bentuk umum deret kuasa dalam (x - b) yaitu :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k = a_0 + a_1(x-b) + a_2(x-b)^2 + \ldots \qquad (*)$$

Sedang untuk b = 0 maka bentuk deret sebagai berikut :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad (**)$$

Deret kuasa bentuk (*) konvergen untuk x = b dan bentuk (**) konvergen untuk x = 0 (yaitu konvergen ke a_0). Pengujian apakah ada nilai x yang lain yang menyebabkan deret konvergen dilakukan sebagai berikut :

Misal diberikan deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k$ dan $\lim_{x\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}(x-b)^{k+1}}{a_k (x-b)^k} \right| = L$

Maka : (1) L < 1, deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k$ konvergen (mutlak)

(2) L > 1, deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-b)^k$ divergen.

Untuk L = 1 tidak dapat disimpulkan, pengujian konvergensi deret dilakukan dengan mensubstitusikan nilai x yang bersesuaian dengan L = 1 sehingga didapatkan bentuk deret bilangan. Pengujian konvergensi deret bilangan dilakukan dengan berbagai uji (Uji perbandingan, rasio, integral dll) baik deret positif maupun deret berganti tanda. Nilai x yang didapatkan dari pengujian di atas disebut **radius konvergensi** atau **selang konvergensi** deret.

Contoh :

Tentukan selang konvergensi deret kuasa : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k x^k}{(k+1)}$

Jawab : $L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{3^{k+1} x^{k+1}}{(k+2)} \frac{(k+1)}{3^k x^k} \right| = |3x| \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k+2} = |3x|$

Deret konvergen bila L < 1. Oleh karena itu, | 3 x | < 1 atau $\frac{-1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

Bila x = - 1/3 maka didapatkan deret berganti tanda $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)}$ konvergen (Tunjukkan : menggunakan tes deret berganti tanda). Sedang untuk x = 1/3 didapatkan deret $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)}$ divergen (Tunjukkan : menggunakan tes perbandingan). Jadi radius konvergensi deret kuasa adalah $\frac{-1}{3} \le x < \frac{1}{3}$.

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 9) Tentukan semua nilai x yang menyebabkan deret konvergen.

1. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)2^k}$
2. $\sum k!\, x^k$
3. $\sum \frac{x^k}{k!}$
4. $\sum \frac{(-1)^k x^k}{3^k (k+1)}$
5. $\sum \frac{5^k}{k^2} x^k$
6. $\sum \frac{(-2)^k x^{k+1}}{k+1}$
7. $\sum \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$
8. $\sum (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
9. $\sum (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k\left(Ln\ k\right)^2}$

(Nomor 10 sd 18) Tentukan selang kekonvergenan dari deret:

10. $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(x-2)^k}{k+1}$
11. $\sum \frac{(x-1)^k}{k}$
12. $\sum \frac{(x+2)^k}{k!}$
13. $\sum \frac{(x-5)^k}{k^2}$
14. $\sum (-1)^{k+1} \frac{(x+1)^k}{k}$
15. $\sum (-1)^k \frac{(x-4)^k}{(k+1)^2}$
16. $\sum \frac{(2k+1)!}{k^3} (x-2)^k$
17. $\sum \frac{\left(Ln\ k\right)(x-3)^k}{k}$
18. $\sum \frac{(2x-3)^k}{4^{2k}}$