

INTEGRAL TAK WAJAR

Bentuk integral $\int_a^b f(x) dx$ disebut **Integral Tak Wajar**, jika

- Paling sedikit satu batas integrasinya tak berhingga, atau
- Integran $f(x)$ mempunyai titik tak kontinu pada $[a, b]$

Paling sedikit satu batas integrasinya tak hingga

$$A. \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$B. \int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$C. \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_c^b f(x) dx$$

Bila limit pada ruas kanan ada dan bernilai hingga, maka integralnya disebut **Konvergen** ke nilai limit tersebut. Sedang bila limit tidak ada atau nilainya menuju tak hingga maka disebut **Divergen**

Contoh

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+9} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) \Big|_0^b$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\tan^{-1}\left(\frac{b}{3}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{0}{3}\right) \right) = \frac{\mathbf{P}}{6} \quad (\text{konvergen}).$$

Integran mempunyai titik diskontinu pada $[a, b]$

- a. Jika $f(x)$ tidak kontinu di $x = a$ tetapi kontinu pada $(a, b]$ dan $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$

$$= \pm \infty \text{ maka } \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x) dx$$

- b. Jika $f(x)$ tidak kontinu di $x = b$ tetapi kontinu pada $[a, b)$ dan $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm \infty$

$$\infty \text{ maka } \int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$$

- c. Jika $f(x)$ kontinu pada $[a, b]$ kecuali di $x = c$, $a < c < b$ dan

$\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = +\infty$ maka :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow c^-} \int_a^t f(x) dx + \lim_{s \rightarrow c^+} \int_s^b f(x) dx$$

Contoh

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \text{ (integran tak kontinu di } x = 1)$$

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \int_0^t \frac{dx}{(x-1)^2} + \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

Gabungan keduanya

Misal $f(x)$ diskontinu di $x = c$ dengan $c \in [a, \infty)$. Maka integral tak wajar dari $f(x)$ atas interval $[a, \infty)$ dituliskan berikut :

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

Contoh

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (\text{Batas atas tak hingga dan } f(x) \text{ tak kontinu di } x=1)$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \lim_{t \rightarrow 1^+} \int_t^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} + \lim_{s \rightarrow +\infty} \int_2^s \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 16) Tentukan konvergensi integral tak wajar berikut :

$$1. \int_3^{\infty} \frac{x \, dx}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$2. \int_{-\infty}^0 x e^{-x^2} \, dx$$

$$3. \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} \, dx$$

$$4. \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$$

$$5. \int_{-\infty}^{\infty} x \cosh x \, dx$$

$$6. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \, dx}{(1+x^2)^2}$$

$$7. \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x \, dx$$

$$8. \int_3^7 \frac{dx}{\sqrt{x-3}}$$

$$9. \int_0^1 x \ln x \, dx$$

$$10. \int_0^1 \frac{\ln x}{x} \, dx$$

$$11. \int_0^3 \frac{x \, dx}{9-x^2}$$

$$12. \int_0^3 \frac{x \, dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$13. \int_0^2 \frac{3}{x^2+x-2} \, dx$$

$$14. \int_0^{\pi/2} \csc x \, dx$$

$$15. \int_0^{\infty} \sqrt{4x^2+1} \, dx$$

$$16. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$$

(Nomor 17 sd 19) Hitung luas daerah D yang diberikan berikut.

17. Antara kurva $y = (x-8)^{-2/3}$ dan $y = 0$ untuk $0 \leq x < 8$.

18. Antara kurva $y = \frac{1}{x}$ dan $y = \frac{1}{x^3+x}$ untuk $0 < x \leq 1$

19. Di kuadran pertama, di bawah kurva $y = x^{-2/3}$ dan di kiri $x = 1$.