INTEGRAL FUNGSI RASIONAL

Pecahan parsial

Integran berbentuk fungsi rasional yaitu : $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, P(x) dan Q(x) suku banyak atau dapat dituliskan menjadi : $f(x)=\dfrac{a_0\,x^n+a_1\,x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0\,x^m+b_1\,x^{m-1}+\ldots+b_m}$

Jika pangkat P(x) > pangkat Q(x) atau n > m, maka dilakukan pembagian terlebih dahulu sehingga didapatkan bentuk : $\int f(x)\,dx=\int\left[R(x)+\dfrac{h(x)}{g(x)}\right]dx$ dengan R(x) merupakan hasil bagi P(x) oleh Q(x) dan $\dfrac{h(x)}{g(x)}$ *adalah sisa pembagian* dengan pangkat h(x) < pangkat g(x).

Jika pangkat P(x) < pangkat Q(x) atau n < m, maka penyelesaian integral tersebut bergantung pada faktor-faktor dari Q(x). Setiap suku banyak dengan kefisien real dapat dinyatakan sebagai perkalian dari faktor-faktor linear dan kuadrat sedemikian sehingga tiap-tiap faktor mempunyai koefisien real.

Ada 4 kasus dari pemfaktoran penyebut (Q(x)) yaitu :
1. Faktor linear dan tidak berulang.
2. Faktor linear dan berulang.
3. Faktor kuadratik dan tidak berulang.
4. Faktor kuadratik dan berulang.

KASUS 1 : Penyebut terdiri dari faktor -faktor Linier tidak Berulang

Misal $Q(x)=\left(a_1\,x+b_1\right)\left(a_2x+b_2\right)\ldots\left(a_nx+b_n\right)$.

Maka $\dfrac{P(x)}{Q(x)}\equiv\dfrac{A_1}{a_1x+b_1}+\dfrac{A_2}{a_2x+b_2}+\ldots+\dfrac{A_n}{a_nx+b_n}$

dengan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ konstanta yang akan dicari.

Contoh

$$\int\frac{1}{4x^2-9}\,dx$$

$$\frac{1}{4\,x^2-9}\equiv\frac{A}{(2x+3)}+\frac{B}{(2x-3)}$$

$$\Leftrightarrow 1\equiv A(2x-3)+B(2x+3)\Leftrightarrow 1\equiv(2A+2B)x+(-3A+3B)$$

$2A + 2B = 0$ *dan* $-3A + 3B = 1$ *sehingga diperoleh* $A = -\dfrac{1}{6}$ *dan* $B = \dfrac{1}{6}$

$$\int \frac{1}{4x^2 - 9}\,dx = \int \frac{-1/6}{(2x+3)}\,dx + \int \frac{1/6}{(2x-3)}\,dx$$

KASUS 2 : Penyebut terdiri dari faktor-faktor linier Berulang

Misal $Q(x) = (a_i x + b_i)^p$ dengan $p \in B^+$.

Maka $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \equiv \dfrac{A_1}{(a_i x + b_i)^p} + \dfrac{A_2}{(a_i x + b_i)^{p-1}} + \ldots + \dfrac{A_{p-1}}{(a_i x + b_i)^2} + \dfrac{A_p}{(a_i x + b_i)}$

dengan $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}, A_p$ konstanta yang akan dicari.

Contoh

$$\int \frac{1}{(x+2)^2 (x-1)}\,dx$$

$$\frac{1}{(x+2)^2 (x-1)} \equiv \frac{A}{(x+2)^2} + \frac{B}{(x+2)} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow 1 \equiv A(x-1) + B(x+2)(x-1) + C(x+2)^2$$

diperoleh $A = -\dfrac{1}{3}$, $B = -\dfrac{1}{9}$ *dan* $C = \dfrac{1}{9}$

$$\int \frac{1}{(x+2)^2 (x-1)}\,dx = \int \frac{-1/3}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{-1/9}{(x+2)}\,dx + \int \frac{1/9}{(x-1)}\,dx$$

KASUS 3 : Penyebut terdiri dari faktor-faktor kuadrat tidak Berulang

Misal $Q(x) = (a_1 x^2 + b_1 x + c_1)(a_2 x^2 + b_2 x + c_2) \ldots (a_n x^2 + b_n x + c_n)$

Maka $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \equiv \dfrac{A_1 x + B_1}{a_1 x^2 + b_1 x + c_1} + \dfrac{A_2 x + B_2}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2} + \ldots + \dfrac{A_n x + B_n}{a_n x^2 + b_n x + c_n}$

dengan $A_1, A_2, \ldots, A_n$, *dan* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ konstanta yang akan dicari.

Contoh

$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)}\, dx$$

$$\frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)} \equiv \frac{A}{(4x+1)} + \frac{Bx + C}{(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 3x + 1 \equiv A(x^2+1) + (Bx + C)(4x+1)$$

$$diperoleh\ \ A = 2\ ,\ B = 1\ dan\ \ C = -1$$

$$\int \frac{6x^2 - 3x + 1}{(4x+1)(x^2+1)}\, dx = \int \frac{2}{(4x+1)}\, dx + \int \frac{x-1}{(x^2+1)}\, dx$$

KASUS 4 : Penyebut terdiri dari faktor-faktor kuadrat berulang .

Misal $Q(x) = \left(a_i x^2 + b_i x + c_i\right)^p$. Maka :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1 x + B_1}{\left(a_i x^2 + b_i x + c_i\right)^p} + \frac{A_2 x + B_2}{\left(a_i x^2 + b_i x + c_i\right)^{p-1}} + \ldots + \frac{A_{p-1} x + B_{p-1}}{\left(a_i x^2 + b_i x + c_i\right)^2} + \frac{A_p x + B_p}{\left(a_i x^2 + b_i x + c_i\right)}$$

dengan $A_1, A_2, \ldots, A_{p-1}, A_p$ dan $B_1, B_2, \ldots, B_{p-1}, B_p$ konstanta yang akan dicari.

Contoh

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2}\, dx$$

$$\frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2} \equiv \frac{A}{(x+3)} + \frac{Bx + C}{(x^2+2)} + \frac{Dx + E}{(x^2+2)^2}$$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 15x + 22 \equiv A(x^2+2)^2 + (Bx + C)(x+3)(x^2+2) + (Dx + E)(x+3)$$

$$diperoleh\ \ A = 1\ ,\ B = -1\ ,\ C = 3,\ D = -5\ \ dan\ \ E = 0$$

$$\int \frac{6x^2 - 15x + 22}{(x+3)(x^2+2)^2}\, dx = \int \frac{1}{(x+3)}\, dx - \int \frac{x-3}{(x^2+2)}\, dx - 5\int \frac{x}{(x^2+2)^2}\, dx$$

Integral Fungsi Rasional yang memuat sinus dan cosinus

Bila integran merupakan fungsi rasional yang memuat suku-suku dari sin dan cos maka akan lebih mudah bila dikerjakan menggunakan substitusi, yaitu u = tan (x/2)

, $-\pi < x < \pi$. Integran ditransformasikan ke dalam fungsi rasional dari u dan ini dikerjakan sebagaimana metode pecahan parsial di atas.

Keseluruhan dari bentuk yang akan disubstitusikan ke dalam integran dapat diperlihatkan seperti di bawah ini.

Dari : u = tan (x/2). Maka :

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sec\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$$

Jadi : $\sin x = \dfrac{2u}{1+u^2}$ & $\cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$ dan

$$\frac{x}{2} = \tan^{-1} u \Rightarrow dx = \frac{2}{1+u^2}\,du$$

Contoh

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = \int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}}\left(\frac{2}{1+u^2}\right)du = \int \frac{2}{(1+u)^2}\,du = \frac{-2}{1+u} + C$$

$$= \frac{-2}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)} + C$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 13) Selesaikan integral berikut :

1. $\int \dfrac{2}{x^2+2x}\,dx$
2. $\int \dfrac{5x+3}{x^2-9}\,dx$
3. $\int \dfrac{x+1}{(x-3)^2}\,dx$
4. $\int \dfrac{5x+7}{x^2+4x+4}\,dx$
5. $\int \dfrac{x^2+19x+10}{2x^4+5x^3}\,dx$
6. $\int \dfrac{2x^2-3x-36}{(2x-1)(x^2+9)}\,dx$

7. $\int \frac{20x-11}{\left(3x+2\right)\left(x^2-4x+5\right)}\,dx$

8. $\int \frac{2x^3+5x^2+16x}{x^5+8x^3+16x}\,dx$

9. $\int \frac{1}{2+\sin x}\,dx$

10. $\int \frac{dx}{x+\sin x+\cos x}$

11. $\int \frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

12. $\int \frac{dx}{4\sin x-3\cos x}$

13. $\int \frac{dx}{\sin x+\tan x}$