INTEGRAL DENGAN SUBSTITUSI

Substitusi Trigonometri

Metode substitusi Trigonometri dapat digunakan untuk menghitung integral dengan bentuk integran adalah :$\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - a^2}$. Substitusi yang digunakan berturut-turut : x = a sin t , x = a tan t dan x = a sec t. Didapatkan diferensiasinya : dx = a cos t dt, dx = a $\sec^2$t dt dan dx = a sec t tan t dt. Oleh karena itu diperoleh :

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \ \cos t \text{ dengan } -\pi/2 \le t \le \pi/2$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = a \tan t \ \textit{dengan} - \boldsymbol{p} / 2 < t < \boldsymbol{p} / 2$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \sec t \ \textit{dengan} \ 0 \le t < \boldsymbol{p} / 2 \ \textit{atau} \ \ \boldsymbol{p} \le t < 3\boldsymbol{p} / 2$$

Contoh.

a. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$

Misal x = 2 sin t dan dx = 2 cos t dt. Maka :

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{2 \cos t \ dt}{(2 \sin t)^2 \, 2 \cos t} = \frac{1}{4}\int \sec^2 t \ dt = -\frac{1}{4} \cot \ t + C$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} + C$$

b. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}$

Misal x = tan t dan dx = $\sec^2$ t dt. Maka :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2 t \ dt}{\sec \ t} = \int \sec t \ dt \ = \ln(\sec t + \tan t) + C$$

$$= \ln\left(\sqrt{1 + x^2} + x\right) + C$$

c. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx$

Misal x = 5 sec t dan dx = sec t tan t dt. Maka :

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx = \int \frac{5 \tan t}{5 \sec \ t}(5 \sec t \ \tan t) dt = 5\int \tan^2 t \ dt = 5 \tan t - 5t + C$$

$$= \sqrt{x^2 - 25} - 5 \sec^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + C$$

Substitusi bentuk Akar

Bila integran memuat faktor berbentuk $\sqrt[n]{ax+b}$, maka kita dapat menyelesaikan integral dengan menggunakan substitusi : u = $\sqrt[n]{ax+b}$ sehingga didapatkan u^n = ax + b dan $\dfrac{nu^{n-1}du}{a} = dx$. Kadang-kadang kita jumpai juga suatu integral dengan integran dalam bentuk akar namun bukan merupakan suatu suku banyak akan tetapi merupakan fungsi eksponen, misal integran $\sqrt[n]{1+e^x}$. Maka seperti diatas juga kita ambil substitusi $u^n = 1+e^x \; atau \; x = \ln\left(u^n - 1\right) dan \;\; dx = \dfrac{n\,u^{n-1}}{u^n - 1}\,du$.
Sedang untuk integran yang terdiri dari beberapa bentuk akar yang pangkatnya berbeda namun dengan fungsi dasar sama, kita dapat melakukakan substitusi dengan memisalkan dengan u berpangkat KPK dari akar pangkatnya. Bentuk integral setelah dilakukan substitusi akan lebih mudah untuk diselesaikan menggunakan metode yang dikenal sebelumnya.

Contoh.

a. $\displaystyle\int \frac{dx}{2+2\sqrt{x}}$. Misal $u^2 = x \; dan \; 2u\,du = dx$. Maka :

$$\int \frac{dx}{2+2\sqrt{x}} = \int \frac{2u}{2+2u}du = \int\left(1 - \frac{1}{1+u}\right)du = u - \ln(1+u) + C$$
$$= \sqrt{x} - \ln\left(1+\sqrt{x}\right) + C$$

b. $\displaystyle\int \sqrt{1+e^x}\; dx$. Misal $u^2 = 1+e^x \Leftrightarrow x = \ln\left(u^2 - 1\right) \; dan \; dx = \dfrac{2u}{u^2-1}du$. Maka :

$$\int \sqrt{1+e^x}\; dx = \int u\left(\frac{2u}{u^2-1}\right)du = \int\left(2 + \frac{1}{u-1} - \frac{1}{u+1}\right)du$$
$$= 2u + \ln\left(\frac{u-1}{u+1}\right) + C = 2\sqrt{1+e^x} + \ln\left(\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right) + C$$

c. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$. Misal $u^6 = x \; dan \; 6u^5 du = dx$. Maka :

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx = 6\int \frac{u^8}{1+u^2}du = 6\int\left(u^6 - u^4 + u^2 - 1 + \frac{1}{1+u^2}\right)du$$
$$= \frac{6}{7}u^7 - \frac{6}{5}u^5 + 2u^3 - 6u + 6\tan^{-1}u + C$$
$$= \frac{6}{7}x^{7/6} - \frac{6}{5}x^{5/6} + 2x^{1/2} - 6x^{1/6} + 6\tan^{-1}\left(x^{1/6}\right) + C$$

Substitusi bentuk Kuadrat.

Integral dengan integran memuat bentuk kuadrat $ax^2 + bx + c$ dengan $b \neq 0$ dapat juga dikerjakan dengan menggunakan substitusi sebagai berikut :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Bila disubstitusikan $u = x + \dfrac{b}{2a}$ ke bentuk kuadrat di atas didapatkan bentuk :

$$au^2 + d \quad ; d = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Contoh.

a. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8}\,dx$

Misal u = x - 2 dan du = dx. Maka :

$$\int \frac{x}{x^2 - 4x + 8}dx = \int \frac{u+2}{u^2+4}du = \frac{1}{2}\ln\left(u^2 + 4\right) + \tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left[(x-2)^2 + 4\right] + \tan^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + C$$

b. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}}$

Misal u = x + 1, didapatkan dari $5 - 4x - 2x^2 = 7 - 2\,(x+1)^2$. Maka :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5 - 4x - 2x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{7 - 2u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{du}{\sqrt{(7/2) - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(u\sqrt{2/7}\right) + C$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left[\sqrt{2/7}(x+1)\right] + C$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 12) Pilihlah substitusi yang tepat untuk mencari solusi dari :

1. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9 - x^2}}$
2. $\displaystyle\int \frac{2x - 3}{\sqrt{4 - x^2}}dx$
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}$
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(x^2 + 9\right)^{3/2}}$
6. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{x + 4}\;\,dx$
7. $\displaystyle\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x + 1}}\,dx$
8. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t}}{t + 1}\,dt$
9. $\displaystyle\int \frac{3x\;\,dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$

10. $\int \sqrt{5-4x-x^2}\ dx$

11. $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+2}\ dx$

12. $\int \frac{2x-1}{x^2-6x+18}\ dx$