

INTEGRAL FUNGSI TRIGONOMETRI

Bentuk integral yang dicakup disini adalah bentuk integral dari $\int f(x) dx$ dengan $f(x)$ merupakan fungsi :

- $\sin^m x \cos^n x$
- $\tan^m x \sec^n x$, $\cot^m x \csc^n x$
- $\tan^m x \cot^n x$
- $\sin(mx) \cos(nx)$, $\sin(mx) \sin(nx)$, $\cos(mx) \cos(nx)$

Integral bentuk $\int \cos^n x dx$ & $\int \sin^n x dx$ dengan $n \in \mathbb{B}^+$.

Misal n bilangan ganjil. Maka $\sin^n x$ dan $\cos^n x$ difaktorkan menjadi $\sin x \sin^{n-1} x$ dan $\cos x \cos^{n-1} x$ dengan $(n-1)$ merupakan bilangan genap. Untuk mencari solusi digunakan identitas $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ dan dengan substitusi integrasi.

Contoh

$$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = -\int (1 - \cos^2 x) d(\cos x) = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C$$

Sedang untuk n bilangan genap, maka $\sin^n x$ dan $\cos^n x$ diuraikan sehingga menjadi jumlah suku-suku dalam cosinus, yaitu digunakan identitas $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$.

Contoh.

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x + C$$

Bentuk integral $\int \sin^n x dx$ dan $\int \cos^n x dx$ dapat juga dihitung dengan rumus reduksi, yaitu integral di atas dinyatakan dalam suku-suku dari integral yang sejenis namun untuk pangkat yang lebih rendah. Disini akan diberikan rumus reduksi untuk $\int \cos^n x dx$ sebagai berikut :

Misal $\cos^n x = \cos^{n-1} x \cos x$, $u = \cos^{n-1} x$ & $dv = \cos x dx$. Maka $du = -(n-1) \cos^{n-2} x \sin x dx$ & $v = \sin x$

Dengan menggunakan metode integral bagian didapatkan :

$$\begin{aligned} \int \cos^n x dx &= \int \cos^{n-1} x \cos x dx = \int u dv = uv - \int v du \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \sin^2 x \cos^{n-2} x dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x dx \\ &= \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x dx - (n-1) \int \cos^n x dx \end{aligned}$$

Bila suku paling kanan dipindahkan ke ruas kiri maka didapatkan:

$$n \int \cos^n x \, dx = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \, dx$$

atau

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx$$

Dengan cara serupa diperoleh rumus reduksi untuk $\int \sin^n x \, dx$, yaitu :

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx$$

Contoh

$$\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \int \cos x \, dx = \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \sin x + C$$

Integral bentuk $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$ dengan $m, n \in \mathbb{B}^+$.

Bila m atau n merupakan bilangan ganjil maka untuk suku yang berpangkat ganjil difaktorkan dengan $\sin x$ atau $\cos x$ sebagai salah satu faktornya dan digunakan identitas $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Namun bila m dan n keduanya merupakan bilangan genap ($m = n$) maka digunakan identitas $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ dan $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$. Sedang untuk m dan n bilangan genap tetapi $m \neq n$ dapat diselesaikan menggunakan metode yang kita bahas pada bagian selanjutnya dengan identitas dan cara yang digunakan tetap sama seperti bilamana $m = n$ di atas.

Contoh.

$$\begin{aligned} \text{a. } \int \sin^3 x \cos^2 x \, dx &= \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x \, dx = -\int (1 - \cos^2 x) \cos^2 x \, d(\cos x) \\ &= \frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{1}{3} \cos^3 x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \frac{1 + \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) \, dx = \frac{1}{8} x - \frac{\sin 4x}{32} + C \end{aligned}$$

Integral bentuk $\int \tan^m x \sec^n x \, dx$ & $\int \cot^m x \csc^n x \, dx$ dengan $n \in \mathbb{B}^+$.

Untuk $m = 1$ dan $n = 0$ kita lakukan integrasi sebagai berikut :

$$\text{(i) } \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = \int -\frac{1}{\cos x} \, d(\sin x) = -\ln(\cos x) + C$$

$$(ii) \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \ln(\sin x) + C$$

Sedang untuk $m = 0$ dan $n = 1$ kita lakukan manipulasi integrasi sebagai berikut:

$$(i) \int \sec x \, dx = \int \sec x \left(\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \right) dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} = \ln(\sec x + \tan x) + C$$

$$(ii) \int \csc x \, dx = -\ln(\csc x + \cot x) + C$$

Untuk $n = 0$ atau $m = 0$ dapat digunakan rumus reduksi, dengan menggunakan identitas $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ & $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ didapatkan:

$$(i) \int \tan^m x \, dx = \int \tan^{m-2} x \tan^2 x \, dx = \int \tan^{m-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

$$= \int \tan^{m-2} x \, d(\tan x) - \int \tan^{m-2} x \, dx = \frac{\tan^{m-1} x}{m-1} - \int \tan^{m-2} x \, dx$$

$$(ii) \int \cot^m x \, dx = -\frac{\cot^{m-1} x}{m-1} - \int \cot^{m-2} x \, dx$$

$$(iii) \int \sec^n x \, dx = \int \sec^{n-2} x \sec^2 x \, dx = \int \sec^{n-2} x \, d(\tan x)$$

$$= \frac{\sec^{n-2} x \tan x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

$$(iv) \int \csc^n x \, dx = -\frac{\csc^{n-2} x \cot x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x \, dx$$

Untuk m ganjil, maka integral akan mudah diselesaikan bila digunakan bentuk $d(\sec x) = \sec x \tan x \, dx$ atau $d(\csc x) = -\csc x \cot x \, dx$ dan identitas: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ & $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$. Sedang untuk m genap akan mudah diselesaikan bila kita reduksi ke dalam suku-suku dari $\sec x$ atau $\csc x$.

Contoh.

$$a. \int \tan^3 x \sec^3 x \, dx$$

Misal $u = \sec x$. Maka $du = \sec x \tan x \, dx$

$$\int \tan^3 x \sec^3 x \, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x (\tan x \sec x) \, dx$$

$$\int (\sec^2 x - 1) \sec^2 x (\tan x \sec x) \, dx = \int (u^2 - 1) u^2 \, du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 - \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{5} \sec^5 x - \frac{1}{3} \sec^3 x + C$$

$$b. \int \tan^2 x \sec x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \sec x \, dx = \int \sec^3 x \, dx - \int \sec x \, dx$$

Dengan rumus reduksi didapatkan: $\int \sec^3 x \, dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx$

Jadi: $\int \tan^2 x \sec x \, dx = \frac{\sec x \tan x}{2} - \frac{1}{2} \ln(\sec x + \tan x) + C$

c. $\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx$

Misal $u = \tan x$. Maka $du = \sec^2 x \, dx$

$$\int \tan^2 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx = \int u^2 (u^2 + 1) \, du$$

$$= \frac{1}{5} u^5 + \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{3} \tan^3 x + C$$

Integral bentuk : $\int \sin(mx) \cos(nx) \, dx, \int \sin(mx) \sin(nx) \, dx, \int \cos(mx) \cos(nx) \, dx$

Bentuk di atas diselesaikan dengan mengubah integran ke dalam bentuk penjumlahan atau pengurangan, sebagai berikut:

$$\sin(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin(mx) \sin(nx) = -\frac{1}{2} [\cos(m+n)x - \cos(m-n)x]$$

$$\cos(mx) \cos(nx) = \frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

Contoh.

a. $\int \sin(2x) \cos(3x) \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin(5x) - \sin x] \, dx = \frac{-1}{10} \cos(5x) + \frac{1}{2} \cos x + C$

b.

$$\int \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \sin(2x) \, dx = -\frac{1}{2} \int \left[\cos\left(\frac{5}{2}x\right) - \cos\left(\frac{3}{2}x\right) \right] \, dx = -\frac{1}{5} \sin\left(\frac{5}{2}x\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + C$$

c. $\int \cos(4x) \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} \int [\cos(6x) + \cos(2x)] \, dx = \frac{1}{12} \sin(6x) + \frac{1}{4} \sin(2x) + C$

d. $\int \cos^2 x \sin^4 x \, dx = \int \left(\frac{\cos 2x + 1}{2} \right) \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx =$

$$\frac{1}{8} \int (\cos 2x + 1) (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{8} \int (\cos 2x + 1) \left(1 - 2 \cos 2x + \frac{\cos 4x - 1}{2} \right) \, dx =$$

$$\frac{1}{16} \int (\cos 2x + 1) (1 - 4 \cos 2x + \cos 4x) \, dx = \frac{1}{16} \int (-1 - 3 \cos 2x - \cos 4x + \cos 2x \cos 4x) \, dx =$$

$$\frac{1}{16} \left(-x - \frac{5}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{12} \sin 6x \right) + C$$

Soal latihan

(Nomor 1 sd 20) Hitung integral berikut

1. $\int \sin^4(5x) dx$

2. $\int_0^{p/2} \sin^5 t dt$

3. $\int_0^{p/2} \cos^6 t dt$

4. $\int \sin^7(3x) \cos^3(3x) dx$

5. $\int \sin^4(2x) \cos^4 x dx$

6. $\int \tan^6(2x) dx$

7. $\int \cot^4(2x) dx$

8. $\int \tan^{-3} x \sec^2 x dx$

9. $\int \tan^5 x \sec^{-3/2} x dx$

10. $\int \sec^4 x \sqrt{\tan x} dx$

11. $\int \cot^3 x \csc^3 x dx$

12. $\int \cot^2(3x) \csc(3x) dx$

13. $\int \sin(5x) \cos(3x) dx$

14. $\int \sin(-3x) \cos x dx$

15. $\int \sin(2x) \sin(3x) dx$

16. $\int \sin(6x) \sin(5x) dx$

17. $\int \cos(6x) \cos(2x) dx$

18. $\int \cos(8x) \cos(2x) dx$

19. $\int \cos^4 x \sin^2 x dx$

20. $\int \cos^2(2x) \sin^4 x dx$