

INTEGRAL BAGIAN

Misal $f(x)$ dan $g(x)$ merupakan fungsi yang dapat diturunkan. Maka dengan teorema rantai dapat diperoleh turunan dari hasil kali kedua fungsi, yaitu :

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d(g(x))}{dx} + g(x)\frac{d(f(x))}{dx}$$

Bila dilakukan integrasi pada kedua ruas maka didapatkan :

$$\int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \int f(x)\frac{d(g(x))}{dx} dx + \int g(x)\frac{d(f(x))}{dx} dx$$

$$f(x)g(x) + C = \int f(x)\frac{d(g(x))}{dx} dx + \int g(x)\frac{d(f(x))}{dx} dx$$

atau

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx + C.$$

Karena integral pada kedua ruas juga akan menghasilkan konstanta C, maka dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x) dx$$

Misal $u = f(x)$ $du = f'(x) dx$
 $v = g(x)$ $dv = g'(x) dx$

Substitusi ke dalam rumus integral di atas didapatkan rumus integral bagian untuk integral tak tentu adalah :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Bila $f(x)$ dan $g(x)$ integrabel pada $[a, b]$ maka rumus integral bagian untuk integral tentu dapat dituliskan :

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Contoh

Hitung integral berikut

a. $\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$

b. $\int_1^e \ln x dx = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x d(\ln x) = [x \ln x - x]_1^e = 1$

$$\begin{aligned} \text{c. } \int e^x \sin x \, dx &= -\int e^x d(\cos x) = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x d(\sin x) \\ &= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \end{aligned}$$

Bila suku paling kanan dipindah ke ruas kiri maka didapatkan :

$$\int e^x \sin x = \frac{1}{2} e^x (-\cos x + \sin x) + C.$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 13) Gunakan metode integral bagian untuk menyelesaikan integral berikut:

1. $\int x e^{-x} \, dx$

2. $\int x e^{3x} \, dx$

3. $\int \ln(2x+3) \, dx$

4. $\int x \sec^2 x \, dx$

5. $\int x^2 \cos x \, dx$

6. $\int \sin^{-1} x \, dx$

7. $\int \tan^{-1} x \, dx$

8. $\int x \tan^{-1} x \, dx$

9. $\int e^{-x} \cos x \, dx$

10. $\int_0^2 \ln(x^2+1) \, dx$

11. $\int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

12. $\int_0^{p/2} x \sin 4x \, dx$

13. $\int_{p/6}^{p/2} x \csc^2 x \, dx$