DERET TAK HINGGA

Bentuk deret tak hingga dinyatakan dengan notasi sigma sebagai berikut :

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_k + ...$ $\qquad$ a_k disebut suku-suku deret.

Jumlah Deret

Misal S_n menyatakan jumlah parsial n suku pertama deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Maka

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
....
....
....

$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ disebut **barisan jumlah parsial** deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Misal $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan jumlah parsial deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke S. Maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dikatakan **deret konvergen** ke S dan S disebut jumlah dari deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, dinotasikan dengan : $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Sedangkan bila barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergen maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dikatakan **deret divergen** dan tidak ada jumlah.

Deret Geometri

Bentuk deret geometri yaitu : $\sum_{k=1}^{\infty} a\, r^{k-1} = a + a r + ... + a r^{k-1} + ...$ dengan a $\neq 0$ dan r merupakan rasio. Pandang jumlah parsial n suku deret geometri berikut :

$$S_n \; = a + a r + ... + a r^{n-1}$$

$$r\, S_n = \qquad a\, r + ... + a\, r^{n-1} + a\, r^n$$

.... $-$

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

Bila r =1 maka S_n tidak terdefinisi. Sedang untuk | r | > 1 maka $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$, sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ atau barisan $\left\{S_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ divergen. Oleh karena itu, deret $\sum_{k=1}^{\infty} a\, r^{k-1}$ divergen.. Untuk | r | < 1 maka $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$ atau barisan $\left\{S_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $\frac{a}{1-r}$ $(a \neq 0)$. Jadi deret $\sum_{k=1}^{\infty} a\, r^{k-1}$ konvergen ke $\frac{a}{1-r}$ $(a \neq 0)$ atau $\sum_{k=1}^{\infty} a\, r^{k-1} = \frac{a}{1-r}$ $(a \neq 0)$.

Deret Harmonis

Bentuk deret harmonis yaitu : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k} + ...$

Pandang jumlah parsial n suku pertama deret :

$$\begin{aligned} S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ... + \frac{1}{n} \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + ... + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Untuk n $\rightarrow \infty$ maka (1+ ½+ ½+ … + 1/n) $\rightarrow \infty$, sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Oleh karena itu, deret harmonis $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergen.

Tes Konvergensi

Misal $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ merupakan deret positif ($a_k \geq 0$). Maka $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$ bila deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen . Hal ini menunjukkan bahwa bila $\lim\limits_{k\to\infty} a_k \neq 0$ maka deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen.

Untuk mengetahui lebih jauh tentang konvergensi suatu deret dilakukan tes konvergensi sebagai berikut :

1. <u>Tes Integral</u>

Misal $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ merupakan deret positif. Maka :

(i) Deret konvergen bila $\int\limits_{1}^{\infty} a_k \; dk$ konvergen

(ii) Deret divergen bila $\int\limits_{1}^{\infty} a_k \; dk$ divergen

Contoh :

Selidiki kekonvergenan deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}}$

Jawab :

$$\int\limits_{1}^{\infty} a_k \; dk = \lim_{b\to\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{k}{a^{k^2}} \; dk = \frac{-1}{2} \lim_{b\to\infty} e^{-k^2} \Big|_{1}^{b} = \frac{-1}{2} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{e^{b^2}} - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{2e}$$

Karena integral tak wajar di atas konvergen ke $\frac{1}{2e}$ maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}}$ konvergen ke $\frac{1}{2e}$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{k^2}} = \frac{1}{2e}$.

2. Tes Deret-p

Bentuk deret-p atau deret hiperharmonis : $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ dengan p > 0.

Menggunakan tes integral didapatkan :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{k^p}\, dk = \frac{1}{1-p} \lim_{b\to\infty} \left(\frac{1}{b^{p-1}} - 1 \right)$$

Bila p > 1 maka $\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = 0$, sehingga $\int_1^{\infty} \frac{1}{k^p}\, dk = \frac{1}{p-1}$ (konvergen). Oleh karena itu, deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ untuk p > 1 konvergen ke $\frac{1}{p-1}$. Untuk 0 < p < 1 maka $\lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{p-1}} = \infty$ sehingga $\int_1^{\infty} \frac{1}{k^p}\, dk$ divergen. Sedang untuk p = 1 didapatkan deret harmonis. Oleh karena itu, deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ untuk 0 < p ≤ 1 divergen.

3. Tes Perbandingan

Misal $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ merupakan deret positif dan berlaku $a_k \le b_k \quad, \forall k$.

Maka:

(i) Bila deret $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergen maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen

(ii) Bila deret $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ divergen maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen

Contoh :

Tentukan konvergensi deret berikut

a. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1}$

b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}$

Jawab :

a. Pandang : $\frac{1}{k} < \frac{1}{k-1}$ dan karena deret harmonis $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergen maka deret $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-1}$ juga divergen.

b. Pandang : $\frac{k}{k^3+1} < \frac{1}{k^2}$ dan karena deret-p $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergen maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}$ juga konvergen.

4. Tes Ratio

Misal $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ deret positif dan $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = r$. Maka :

(i) Bila r < 1 maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen

(ii) Bila r > 1 maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen

(iii) Bila r = 1 maka tes gagal melakukan kesimpulan (dilakukan dengan tes lain).

Contoh :

Selidiki kekonvergenan deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Jawab :

Misal $a_k = \frac{1}{k!}$. Maka $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$. Jadi deret $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ konvergen

5. Tes Akar

Misal $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ deret positif dan $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = a$. Maka :

(i) Bila a < 1 maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen

(ii) Bila a > 1 atau a = ∞ maka deret $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergen

(iii) Bila a = 1 maka tes gagal melakukan kesimpulan (dilakukan dengan tes lain).

Contoh :

Tentukan kekonvergenan deret $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k$

Jawab :

Misal $a_k = \left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k$. Maka $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k+2}{2k-1} = \frac{3}{2}$. Jadi deret $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k+2}{2k-1}\right)^k$ konvergen.

6. Tes Limit Perbandingan

Misal $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ merupakan deret positif dan $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = l$. Maka kedua deret konvergen atau divergen secara bersama-sama bila l < ∞ dan l ≠ 0.

Contoh :

Tentukan konvergensi deret $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$

Jawab :

Pandang deret-p , $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergen. Misal $a_k = \frac{1}{k^2}$ dan $b_k = \frac{1}{k^2-1}$. Maka $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2-1}{k^2} = 1$. Jadi deret $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1}$ konvergen.

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 23) Tentukan konvergensi deret berikut

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k + 5}$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5k^2 - k}$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 1}{3^k + 2k}$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 k}{k!}$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^4 + k}$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k - 1/4}$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{\sqrt{k} + 1}$
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2 - k}$
9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+8}}$
10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{2 + \sin^2 k}$
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2 - 2k + 6}{8k^7 + k - 8}$
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3^k + 1}$
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)(k+5)}$
14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8k^2 - 3k}}$
15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)^{17}}$
16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 2k + 1}$
17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k - 2}$
18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{k^3 + 1}$
19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3+k)^{2/5}}$
20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$
21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{2 + 3^k k}$
22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$
23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k + k}{k! + 3}$