

## FUNGSI INVERS TRIGONOMETRI

Fungsi Trigonometri merupakan fungsi periodik sehingga pada daerah  $\mathbb{R}$  bukan merupakan fungsi satu-satu. Oleh karena itu untuk mendapatkan fungsi inversnya maka domain dari fungsi trigonometri harus dibatasi.

Misal  $f(x) = \sin x$ . Maka agar  $f(x) = \sin x$  merupakan fungsi satu-satu maka domainnya diambil :

$$\left[ -\frac{\mathbf{P}}{2} \leq x \leq \frac{\mathbf{P}}{2} ; -1 \leq f(x) \leq 1 \right]$$

Pada daerah di atas  $f(x) = \sin x$  merupakan fungsi satu-satu dan oleh karena itu mempunyai invers. Notasi invers :  $x = \sin^{-1} f(x) = \text{arc sin } f(x)$

### Turunan fungsi invers Trigonometri

Misal  $y = \sin^{-1} u$   $\left[ -1 \leq u \leq 1 ; -\frac{\mathbf{P}}{2} \leq y \leq \frac{\mathbf{P}}{2} \right]$  dengan  $u$  merupakan fungsi

dalam  $x$ . Maka turunan  $\left( y' = \frac{dy}{dx} \right)$  didapatkan sebagai berikut :

$$y = \sin^{-1} u \Leftrightarrow u = \sin y \Leftrightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{\cos y}$$

Bila  $\sin y = u$  maka  $\cos y = \sqrt{1-u^2}$ . Oleh karena itu,  $\frac{dy}{du} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ .

$$\text{Jadi : } y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

Dengan menggunakan anti turunan dari invers sinus didapatkan rumus integral :

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sin^{-1} u + C$$

Untuk fungsi invers trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan cara sama :

$$1. y = \cos^{-1} u \left[ -1 \leq u \leq 1 ; 0 \leq y \leq \mathbf{p} \right]$$

$$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}} \Leftrightarrow \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\cos^{-1} u + C$$

$$2. y = \tan^{-1} u \left[ -\infty < u < \infty ; -\frac{\mathbf{p}}{2} < y < \frac{\mathbf{p}}{2} \right] \Rightarrow y' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$3. y = \cot^{-1} u \left[ 0 \leq u < \infty ; -\frac{\mathbf{p}}{2} \leq y < 0 \vee 0 < y \leq \frac{\mathbf{p}}{2} \right] \Rightarrow y' = \frac{-u'}{1+u^2}$$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \begin{cases} \tan^{-1} u + C \\ -\cot^{-1} u + C \end{cases}$$

$$4. y = \sec^{-1} u \left[ |u| \geq 1 ; 0 \leq y < \frac{\mathbf{p}}{2} \vee \frac{\mathbf{p}}{2} < y \leq \mathbf{p} \right] \Rightarrow y' = \frac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$5. y = \csc^{-1} u \left[ |u| \geq 1 ; -\frac{\mathbf{p}}{2} \leq y < 0 \vee 0 < y \leq \frac{\mathbf{p}}{2} \right] \Rightarrow y' = \frac{-u'}{u\sqrt{u^2-1}}$$

$$6. \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \begin{cases} \sec^{-1} u + C \\ -\csc^{-1} u + C \end{cases}$$

### Soal Latihan

( Nomor 1 sd 10 ) Carilah turunan dari :

$$1. y = \cos^{-1}(2x+1)$$

$$2. y = \cot^{-1}(\sqrt{x})$$

$$3. y = \cos^{-1}(\cos x)$$

$$4. y = \sqrt{\tan^{-1} x}$$

$$5. y = x^2(\sin^{-1} x)^3$$

$$6. y = (1 + x \sec^{-1} x)^2$$

$$7. y = \sin^{-1}(e^{-3x})$$

$$8. y = \csc^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

$$9. y = \tan^{-1}(x e^{2x})$$

$$10. y = \sin^{-1}(x^2 \ln x)$$

( Nomor 11 sd 17 ) Hitung integral berikut :

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$$

$$12. \int \frac{dx}{x \sqrt{9x^2-1}}$$

$$13. \int \frac{t dt}{t^4+1}$$

$$14. \int \frac{\sec^2 x dx}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$$

$$15. \int \frac{dx}{x \sqrt{1-(\ln x)^2}}$$

$$16. \int_{\ln 2}^{\ln\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)} \frac{e^{-x} dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$$

$$17. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$$