

FUNGSI LOGARITMA DAN EKSPONEN

Fungsi logaritma dan fungsi eksponen merupakan dua fungsi yang saling invers dan dinyatakan sebagai :

$$y = {}^b \log x \Leftrightarrow x = b^y ; x, b > 0$$

Sifat-sifat logaritma :

1. ${}^b \log 1 = 0$
2. ${}^b \log b = 1$
3. ${}^b \log ac = {}^b \log a + {}^b \log c$
4. ${}^b \log a/c = {}^b \log a - {}^b \log c$
5. ${}^b \log a^r = r {}^b \log a$
6. ${}^b \log a = \frac{{}^c \log a}{{}^c \log b}$

Bilangan Natural

Bilangan natural dinotasikan dengan e dan didefinisikan sebagai :

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 2,718\dots$$

Fungsi logaritma natural didefinisikan sebagai :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt, x > 0$$

$$\ln x = {}^e \log x$$

Turunan fungsi logaritma natural : $D_x[\ln x] = \frac{1}{x}$

Jadi secara umum : $D_x[\ln u] = \frac{1}{u} \frac{du}{dx} \Leftrightarrow \int \frac{1}{u} du = \ln u + C$.

Eksponen Natural

Fungsi eksponen natural didefinisikan sebagai inverse dari logaritma natural dan dinotasikan :

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$$

Sifat yang dapat diturunkan langsung dari definisi adalah :

1. $e^{\ln y} = y$, $\forall y > 0$
2. $\ln e^x = x$, $\forall x \in R$

Turunan dan integral dari eksponen natural:

$$D_x(e^u) = e^u \frac{du}{dx} \Leftrightarrow \int e^u du = e^u + C$$

Misal $a > 0$ dan $x \in R$. Didefinisikan : $a^x = e^{x \ln a}$. Maka :

$$(i) D_x[a^u] = (\ln a) a^u \frac{du}{dx}$$

$$(ii) \int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$$

Misal $y = {}^a \log x = \frac{\ln x}{\ln a}$. Maka $D_x({}^a \log x) = \frac{1}{x \ln a}$.

Jadi secara umum $D_x(a \log u) = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 7) Tentukan turunan pertama dari :

1. $y = \ln(x^2 - 5x + 6)$

2. $y = x \ln x$

3. $y = \frac{\ln x}{x^2}$

4. $y = \frac{\sqrt{x+13}}{(x-4)\sqrt[3]{2x+1}}$

5. $y = \frac{(x^2 + 3)^{2/3} (3x + 2)^2}{\sqrt{x+1}}$

6. $y = \ln(\sin x)$

7. $y + \ln(xy) = 1$

(Nomor 8 sd 13) Selesaikan integral berikut :

8. $\int \frac{4}{2x+1} dx$

9. $\int \frac{4x+2}{x^2+x+5} dx$

10. $\int \frac{2}{x(\ln x)^2} dx$

11. $\int \frac{x^3}{x^2+1} dx$

12. $\int_1^4 \frac{3}{1-2x} dx$

13. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} dx$

(Nomor 14 sd 16) Carilah y' dari :

14. $y = 3^{2x^4-4x}$

16. $y = \sqrt{\log x}$

15. $y = {}^{10}\log(x^2 + 9)$

(Nomor 17 sd 22) Selesaikan integral tak tentu berikut :

17. $\int x 2^{x^2} dx$

20. $\int e^{-x} \sec^2(2 - e^{-x}) dx$

18. $\int 10^{5x-1} dx$

21. $\int (\cos x) e^{\sin x} dx$

19. $\int (x+3) e^{x^2+6x} dx$

22. $\int e^{2 \ln x} dx$

(Nomor 23 sd 29) Hitung nilai integral tentu :

23. $\int_0^{\ln 2} e^{-3x} dx$

27. $\int_0^{\ln 5} e^x (3 - 4e^x) dx$

24. $\int_0^e \frac{dx}{x+e}$

28. $\int_0^1 e^{2x+3} dx$

25. $\int_1^2 (3 - e^x) dx$

29. $\int_1^2 \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^2} dx$

26. $\int_{-\ln 3}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 4} dx$