

FUNGSI INVERS

Definisi :

Misal dua fungsi f dan g berlaku komposisi berikut :

(i) $f(g(x)) = x$, untuk setiap $x \in D_g$.

(ii) $g(f(y)) = y$, untuk setiap $y \in D_f$.

Maka f disebut **invers** dari g (notasi $f = g^{-1}$) atau g disebut invers dari f ($g = f^{-1}$).

Sehingga diperoleh hubungan,

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$$

I merupakan fungsi identitas, yaitu fungsi yang memetakan ke dirinya sendiri.

Berikut merupakan contoh fungsi dan inversnya. Fungsi $f(x) = 1 + x$ mempunyai invers $f^{-1}(x) = x - 1$, sebab $(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(x - 1) = 1 + (x - 1) = x = I(x)$.

Satu hal yang menarik bagi kita, apakah setiap fungsi punya invers ? Bagaimana cara mendapatkan invers dari suatu fungsi ? Beberapa sifat berikut dapat digunakan untuk menjawab pertanyaan ini.

Sifat-sifat :

1. Sifat antara fungsi dan inversnya.

(i) Grafik fungsi f dan f^{-1} simetri terhadap garis $y = x$.

(ii) Domain f sama dengan range f^{-1} atau range f sama dengan domain f^{-1} .

2. Sifat Keberadaan fungsi invers

(i) Fungsi $f(x)$ punya invers bila dan hanya bila tidak ada garis mendatar yang memotong grafik $f(x)$ lebih dari satu titik.

(ii) Fungsi $f(x)$ punya invers bila dan hanya bila $f(x)$ berkorespondensi satu-satu [yaitu bila $f(x_1) \neq f(x_2)$ maka $x_1 \neq x_2$].

(iii) Misal interval I merupakan domain $f(x)$ dan $f(x)$ naik atau $f(x)$ turun pada I . Maka $f(x)$ punya invers pada I .

Misal $y = f^{-1}(x)$. Maka didapatkan $x = f(y)$. Hal ini memotivasi kepada kita suatu cara untuk menentukan invers dari fungsi $y = f(x)$. Untuk menentukan invers dari suatu fungsi $y = f(x)$ dilakukan dengan cara mensubstitusikan peubah y ke dalam x , sehingga fungsi dinyatakan secara eksplisit dalam peubah y . Tuliskan $f(y) = x$ dan nyatakan fungsi yang diperoleh tersebut menjadi fungsi eksplisit dalam peubah x . Hasil terakhir merupakan invers dari $y = f(x)$.

Contoh :

Tentukan invers dari fungsi $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

Jawab :

$$f(y) = \frac{y-1}{y+2} \Rightarrow x = \frac{y-1}{y+2} \Rightarrow y = \frac{-2x-1}{x-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-2x-1}{x-1}$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 5) Tentukan fungsi invers (bila ada) dari

1. $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x > 0$

2. $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$

3. $f(x) = \sqrt[5]{4x+2}$

4. $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$, $x \geq 0$

5. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

6. Tentukan range dari invers fungsi di atas (nomor 1 sd 5)