PANJANG KURVA

Persamaan kurva seringkali dinyatakan dengan peubah x dan y. Namun adakalanya dinyatakan dengan parameter. Kita dapat mengambil contoh berikut. Persamaan lingkaran: $x^2 + y^2 = a^2$ dapat juga dituliskan dengan x = a cos t dan y = a sin t dengan 0 ≤ t ≤ 2π. t disebut **parameter**.

Dalam perhitungan panjang kurva bidang yang dinyatakan dalam parameter, kita membatasi untuk kurva bidang yang smooth atau mulus. Untuk itu diberikan definisi berikut :

Definisi : Kurva Mulus

Kurva yang ditentukan oleh pasangan persamaan parameter, x = f(t), y = g(t) , a ≤ t ≤ b dikatakan **smooth (mulus)** bila turunan pertama f ‘ dan g ‘ ada dan kontinu pada selang [a,b], f ‘ dan g ‘ tidak secara bersama-sama bernilai nol pada selang [a,b].

Misal f(x) kontinu pada [a,b]. Maka untuk menghitung panjang kurva f(x) sepanjang selang [a,b] dilakukan sebagai berikut :

Bagi selang [a,b] menjadi n sub selang sama panjang dengan panjang sub selang Δx. Pada sub selang ke-k, [x_{k-1}, x_k] didapatkan nilai fungsi pada ujung sub selang yaitu $f(x_{k-1})$ dab $f(x_k)$. Misal L_k merupakan panjang ruas garis dari titik $\left(x_{k-1}, f\left(x_{k-1}\right)\right) ke \left(x_k, f\left(x_k\right)\right)$. Maka :

$$L_k = \sqrt{(\Delta x)^2 + \left[f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right)\right]^2}$$

Dari teorema nilai rata-rata, $\dfrac{f\left(x_k\right) - f\left(x_{k-1}\right)}{\Delta x} = f'\left(x_k^*\right)$, $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ maka didapatkan:

$$L_k = \sqrt{1 + \left[f'\left(x_k^*\right)\right]}\,\Delta x$$

Jadi panjang kurva f(x) sepanjang selang [a,b] didekati oleh :

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\left[f'\left(x_k^*\right)\right]^2}\,\Delta x \quad \text{untuk } n \to \infty.$$

Atau

$$L = \int_a^b \sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\; dx$$

Bila kurva dinyatakan sebagai x = w(y), maka panjang kurva pada selang [c,d] :

$$L = \int_c^d \sqrt{1+\left[w'\left(y\right)\right]^2}\; dy$$

Sedangkan bila persamaan dinyatakan dengan persamaan parameter, x = f(t), y = g(t) , a ≤ t ≤ b maka panjang kurva =

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[f'(t)\right]^2 + \left[g'(t)\right]^2}\; dt$$

atau

$$L = \int_a^b \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2}\; dt$$

Contoh :

Hitung panjang kurva $y = x^{3/2}$ dari titik (1,1) sampai titik (4,8) !

Jawab :

$$L = \int_1^4 \sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}\, dx = \int_1^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\;\; dx = \left[\frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}\right]_1^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10} - \frac{13}{8}\sqrt{13}\right)$$

Contoh :

Hitung panjang keliling lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$

Jawab :

Persamaan $x^2 + y^2 = a^2$ diubah menjadi persamaan parameter : x = a cos t dan y = a sin t dengan $0 \leq t \leq 2\pi$. Substitusikan : dx/dt = - a sin t dan dy/dt = a cos t ke dalam :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left[\frac{dy}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dx}{dt}\right]^2}\, dt = 2\pi a$$

Catatan : Bandingkan hasil di atas dengan hasil yang diperoleh bila kita gunakan rumus untuk mencari keliling lingkaran dengan jari-jari r = a.

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 7) Hitung panjang kurva berikut :

1. $y = x^{3/2}$ dari (1,1) ke $(2,2\sqrt{2})$
2. $y = 3x^{3/2}$ dari x = 0 ke x = 1
3. $y = \frac{x^4}{16} + \frac{1}{2x^2}$ dari x = 2 ke x = 4
4. $24xy = y^4 + 48$ dari y = 2 ke y = 4
5. $x = \frac{y^4}{8} + \frac{y^{-2}}{4}$ dari y = 1 ke y = 4
6. $x = \frac{1}{3}\left(y^2 + 2\right)^{3/2}$ dari y = 0 ke y = 1
7. $y = \int_1^x \sqrt{u^3 - 1}\, du \quad , 1 \leq x \leq 2$

(Nomor 8 sd 11) Sket grafik dari persamaan parameter yang diberikan dan tentukan panjangnya.

8. $x = t^3$, $y = t^2$; $0 \le t \le 4$.
9. $x = 3t^2 + 2$, $y = 2t^3 - 1$; $1 \le t \le 3$.
10. $x = 4 \cos t + 5$, $y = 4 \sin t - 1$; $0 \le t \le 2\pi$.
11. $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$, $0 \le t \le 4\pi$.

12. Daerah D merupakan daerah tertutup yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x^3}$, $y = 1$ dan $x = 4$.
    a. Gambar dan arsir daerah D
    b. Hitung luas daerah D
    c. Hitung keliling daerah D
    d. Hitung volume benda putar yang terjadi bila daerah D diputar terhadap garis $x = 1$.