VOLUME BENDA PUTAR

Benda putar yang sederhana dapat kita ambil contoh adalah tabung dengan besar volume adalah hasilkali luas alas (luas lingkaran) dan tinggi tabung. Volume dari benda putar secara umum dapat dihitung dari hasilkali antara luas alas dan tinggi. Bila luas alas kita nyatakan dengan A(x) dan tinggi benda putar adalah panjang selang [a,b] maka volume benda putar dapat dihitung menggunakan integral tentu sebagai berikut :

$$V = \int_a^b A(x)\ dx$$

Untuk mendapatkan volume benda putar yang terjadi karena suatu daerah diputar terhadap suatu sumbu, dilakukan dengan menggunakan dua buah metode yaitu metode cakram dan kulit tabung.

Metode Cakram

Misal daerah dibatasi oleh y = f(x), y = 0, x = a dan x = b diputar dengan sumbu putar sumbu X. Volume benda pejal/padat yang terjadi dapat dihitung dengan memandang bahwa volume benda padat tersebut merupakan jumlah tak berhingga cakram yang berpusat di titik-titik pada selang [a,b].

Misal pusat cakram (x_o,0) dan jari-jari r = f(x_o). Maka luas cakram dinyatakan : A(x_o) = $\pi f^2(x_o)$. Oleh karena itu, volume benda putar :

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x) \right]^2 dx$$

Sedang bila grafik fungsi dinyatakan dengan x = w(y), x = 0, y = c dan y = d diputar mengelilingi sumbu Y maka volume benda putar :

$$V = \int_c^d \pi \left[w(y) \right]^2 dy$$

Bila daerah yang dibatasi oleh y = f(x) $\geq$ 0 , y = g(x) $\geq$ 0 { f(x) $\geq$ g(x) untuk setiap x $\in$ [a,b] }, x = a dan x = b diputar dengan sumbu putar sumbu X maka volume :

$$V = \int_a^b \pi \left(\left[f(x) \right]^2 - \left[g(x) \right]^2 \right) dx$$

Bila daerah yang dibatasi oleh x = w(y) $\geq$ 0 , x = v(y) $\geq$ 0 { w(y) $\geq$ v(y) untuk setiap y $\in$ [c,d] }, y = c dan y = d diputar dengan sumbu putar sumbu Y maka volume :

$$V = \int_c^d \pi \left(\left[w(y) \right]^2 - \left[v(y) \right]^2 \right) dy$$

Contoh :

Hitung Volume benda putar bila daerah yang dibatasi oleh : y = x^2 dan y^2 = 8x diputar mengelilingi

a. Sumbu X.

b. Sumbu Y

Jawab :

Kedua kurva berpotongan di (0,2) dan (2,4).

a. Pada selang [0,2], $\sqrt{8x} \geq x^2$. Volume benda putar =

$$V = \pi \int_0^2 \left[\left(\sqrt{8x} \right)^2 - \left(x^2 \right)^2 \right] dx = \frac{48}{5} \pi$$

b. Pada selang [0,4], $\sqrt{y} \geq \frac{y^2}{8}$. Volume benda putar =

$$V = \pi \int_0^4 \left[\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\frac{y^2}{8}\right)^2 \right] dy = \frac{272}{15}\pi$$

Contoh :

Hitung volume benda putar bila daerah yang dibatasi oleh : $y = 2 - x^2$, $y = -x$ dan sumbu Y bila diputar mengelilingi garis $y = -2$

Jawab :

Kedua kurva berpotongan di (-1,1) dan (2,-2). Pada selang [-1,0] berlaku $2 - x^2 \geq -x$. Jarak kurva $y = 2 - x^2$ dan $y = -x$ terhadap sumbu putar (garis $y = -2$) dapat dipandang sebagai jari-jari dari cakram, berturut-turut adalah $(4 - x^2)$ dan $(2 - x)$. Oleh karena itu, volume benda putar :

$$V = \pi \int_{-1}^{0} \left[\left(4 - x^2\right)^2 - (2 - x)^2 \right] dx = \frac{36}{5}\pi$$

Metode Kulit Tabung

Metode berikut sebagai alternatif lain dalam perhitungan volume benda putar yang mungkin lebih mudah diterapkan bila kita bandingkan dengan metode cakram. Benda putar yang terjadi dapat dipandang sebagai tabung dengan jari-jari kulit luar dan dalamnya berbeda, maka volume yang akan dihitung adalah volume dari kulit tabung. Untuk lebih memperjelas kita lihat uraian berikut.

Pandang tabung dengan jari-jari kulit dalam dan kulit luar berturut-turut r_1 dan r_2, tinggi tabung h. Maka volume kulit tabung adalah :

$$\Delta V = \left(\pi r_2 - \pi r_1\right) h = 2\pi r h \, \Delta r$$

dengan : $\dfrac{r_2 - r_1}{2} = r$ (rata – rata jari – jari), $r_2 - r_1 = \Delta r$

Bila daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ dan $x = b$ diputar mengelilingi sumbu Y maka kita dapat memandang bahwa jari-jari $r = x$, $\Delta r = \Delta x$ dan tinggi tabung $h = f(x)$. Oleh karena itu volume benda putar =

$$V = \int_a^b 2\pi x \; f(x) \;\; dx$$

Misal daerah dibatasi oleh kurva y = f(x), y = g(x) { f(x) $\geq$ g(x) , x $\in$ [a,b] }, x = a dan x = b diputar mengelilingi sumbu Y. Maka volume benda putar =

$$V = \int_a^b 2\pi x \left[f(x) - g(x) \right] \, dx$$

Bila daerah dibatasi oleh grafik yang dinyatakan dengan x = w(y), x = 0, y = c dan y = d diputar mengelilingi sumbu X, maka volume =

$$V = \int_c^d 2\pi y \;\; w(y) \; dy$$

Sedang untuk daerah yang dibatasi oleh x = w(y), x = v(y) { w(y) $\geq$ v(y), y$\in$[c,d]}, y = c dan y = d diputar mengelilingi sumbu X. Maka volume benda putar =

$$V = \int_c^d 2\pi y \left[w(y) - v(y) \right] \, dy$$

Contoh :

Hitung volume benda putar bila daerah yang terletak di kuadran pertama dibawah parabola y = 2 - x^2 dan di atas parabola y = x^2 diputar mengelilingi sumbu Y.

Jawab :

Kedua parabola berpotongan di (-1,1) dan (1,1). Pada selang [0,1], $2 - x^2 \geq x^2$. Bila digunakan metode kulit tabung, volume =

$$V = 2\pi \int_0^1 x \left[\left(2 - x^2 \right) - x^2 \right] dx = \pi$$

Bila kita gunakan metode cakram, maka daerah kita bagi menjadi dua bagian yaitu : pada selang $0 \le y \le 1$ dibatasi $x = \sqrt{2 - y}$ dan sumbu Y sedang pada selang $1 \le y \le 2$ dibatasi $x = \sqrt{y}$ dan sumbu Y. Oleh karena itu volume =

$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy + \pi \int_1^2 \left(\sqrt{2 - y}\right)^2 dy = \pi$$

Contoh :

Hitung volume benda putar bila daerah D yang dibatasi oleh $y = 1 - x^2$, sumbu X dan sumbu Y bila diputar mengelilingi garis x = 1

Jawab :

Misal di ambil sembarang nilai x pada daerah D maka didapatkan tinggi benda pejal, ($1 - x^2$) dan jari-jari (jarak x terhadap sumbu putar / garis x = 1), (1 + x). Oleh karena itu, volume benda putar :

$$V = 2\pi \int_{-1}^{0} (1 + x)\left(1 - x^2\right) dx = \frac{5}{6}\pi$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 8) Hitung volume benda putar bila daerah berikut diputar dengan sumbu putar sumbu X.

1. $y = x^2$, x = 0 , x = 2 , y = 0
2. y = 1/x, x = 1, x = 4 , y = 0
3. $y = 9 - x^2$, y = 0
4. $y = x^2$, y = 4x
5. y = sin x, y = cos x, x = 0 , x = $\pi/4$
6. $y = x^2 + 1$, y = x + 3
7. $y = \sqrt{x}$, y = x
8. $y = x^2$, $y = x^3$.

(Nomor 9 sd 15). Hitung volume benda putar bila daerah berikut diputar mengelilingi sumbu Y.

9. $x = 1 - y^2$, x = 0
10. $x = \sqrt{\cos y}$, $y = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$, $x = 0$
11. y = 2/x, y = 1, y = 3, x = 0

12. $y = x^2 - 1, x = 2, y = 0$
13. $y = x^2, x = y^2$.
14. $x = y^2, x = y + 2$
15. $x = 1 - y^2, x = 2 + y^2, y = -1, y = 1$

16. Hitung volume benda putar dari daerah yang terletak di kuadran pertama yang dibatasi oleh $y^2 = x^3$, garis $x = 4$ dan sumbu X. Bila diputar mengelilingi
    a. Garis $x = 4$
    b. Garis $y = 8$
17. Hitung volume benda putar dari daerah yang terletak di kuadran pertama yang dibatasi oleh $y^2 = x^3$, garis $y = 8$ dan sumbu Y. Bila diputar mengelilingi
    a. Garis $x = 4$
    b. Garis $y = 8$

(Nomor 18 sd 21) Hitung volume benda putar dengan sumbu putar sumbu Y untuk daerah yang dibatasi oleh:

18. $y = \cos x^2, y = 0, x = 0, x = ½\sqrt{\pi}$,
19. $y = 2x - 1, y = -2x + 3, x = 3$
20. $x = y^2, y = x^2$.
21. $y = 2x - x^2, y = 0$

(Nomor 22 sd 25) Hitung volume benda putar dengan sumbu putar sumbu X untuk daerah yang dibatasi oleh:

6. $y^2 = x, y = 1, x = 0$
7. $x = 2y, y = 2, y = 3, x = 0$
8. $y = x^2, x = 1, y = 0$
9. $xy = 4, x + y = 5$

(Nomor 26 sd 29) Gambar dan arsir daerah D dan hitung volume benda putar yang terjadi bila daerah D dan sumbu putarnya diberikan berikut :

26. $y = \sqrt{x}\ , x = 4 , y = 0$; garis x = 4

27. $y = 1 - x^2$ ($x \geq 0$), x = 0 , y = 0 ; garis x = 2

28. $x = y^2$, y = 2 , x = 0 ; garis y = 2

29. $x = \sqrt{2y} + 1, y = 2 , x = 0, y = 0$; garis y = 3