

LUAS DAERAH

Perhitungan luas suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = f(x)$, garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu X telah kita bahas dalam pembahasan integral tentu. Namun untuk daerah yang lebih kompleks akan kita bahas secara detil pada perhitungan luas daerah dengan menggunakan integral tentu. Selain dari itu, integral tentu akan kita gunakan juga untuk menghitung volume benda pejal yaitu benda yang dihasilkan bila suatu daerah diputar dengan suatu sumbu putar. Panjang kurva akan kita bahas pada bagian akhir dari bab ini.

Misal suatu daerah dibatasi oleh $y = f(x) \geq 0$, $x = a$, $x = b$ dan sumbu X . Maka luas daerah dihitung dengan integral tentu sebagai berikut :

$$L = \int_a^b f(x) dx$$

Bila $f(x) \leq 0$ maka integral dari $f(x)$ pada selang $[a, b]$ akan bernilai negatif atau nol. Oleh karena itu luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x) \leq 0$, garis $x = a$, $x = b$ dan sumbu X , dituliskan sebagai berikut :

$$L = -\int_a^b f(x) dx$$

Untuk daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi yang dinyatakan secara eksplisit dalam peubah y , yakni $x = v(y)$, garis $y = c$, $y = d$ dan sumbu Y , maka luas daerah :

$$L = \int_c^d v(y) dy$$

Contoh :

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, sumbu X, garis $x = 0$ dan $x = 3$.

Jawab :

Kita lihat bahwa $f(x) \geq 0$ pada selang $[0,1]$ dan $f(x) \leq 0$ pada selang $[1,3]$.

Luas daerah :

$$L = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^3 f(x) dx = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx - \int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3) dx$$

$$= 5\frac{3}{4}$$

Bila suatu daerah dibatasi oleh dua buah grafik fungsi, misal $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ diberikan sebagai berikut :

(1) Misal daerah dibatasi oleh grafik $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = a$ dan $x = b$ dengan $f(x) \geq g(x)$ untuk $x \in [a,b]$. Maka luas daerah :

$$L = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

(2) Misal daerah dibatasi oleh grafik $x = w(y)$, $x = v(y)$, $y = c$ dan $y = d$ dengan $w(y) \geq v(y)$ untuk $y \in [c,d]$. Maka luas daerah :

$$L = \int_c^d [w(y) - v(y)] dy$$

Contoh :

Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh $y^2 = 4x$ dan garis $4x - 3y = 4$.

Jawab :

Langkah pertama yang dilakukan adalah mencari titik potong kedua kurva. Didapatkan titik potong keduanya yaitu $(\frac{1}{4}, -1)$ dan $(4, 4)$.

Pada selang $[-1, 4]$, $\frac{3y+4}{4} \geq \frac{y^2}{4}$. Maka luas daerah $L = \int_{-1}^4 \left(\frac{3y+4-y^2}{4} \right) dy = \frac{125}{24}$

Soal Latihan

Hitung luas daerah yang dibatasi oleh grafik berikut :

1. $y = x^3 - 4x^2 + 3x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 3$
2. $x = y^2 - 4y$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$
3. $x^2 = y$, $y = x + 2$
4. $y = x^3$, $y = -x$, $y = 8$
5. $y^2 = -x$, $y = x - 6$, $y = -1$, $y = 4$
6. $y = x$, $y = 4x$, $y = -x + 2$
7. $y = x^3 - 2x^2$, $y = 2x^2 - 3x$, $x = 0$, $x = 3$
8. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$, $x = 2\pi$.