INTEGRAL TENTU

Pengertian atau konsep integral tentu pertama kali dikenalkan oleh Newton dan Leibniz. Namun pengertian secara lebih modern dikenalkan oleh Riemann. Materi pembahasan terdahulu yakni tentang integral tak tentu dan notasi sigma akan kita gunakan untuk mendefinisikan tentang integral tentu.

Pandang suatu fungsi f(x) yang didefinisikan pada suatu selang tutup [a,b]. Pada tahap awal akan lebih mudah untuk dapat dimengerti bilamana f(x) diambil selalu bernilai positif , kontinu dan grafiknya sederhana.

Pandang suatu partisi P pada selang [a,b] yang dibagi menjadi n sub selang (dalam hal ini diambil yang panjangnya sama walaupun hal ini tidaklah mutlak), misal $a = x_0 < x_1 <\dots< x_{n-1} < x_n = b$ dan $\Delta x_k = \Delta x = x_k - x_{k-1}$. Pada setiap sub selang $\left[x_{k-1}, x_k\right]$ kita ambil suatu titik $\overline{x_k}$ (titik sembarang namun untuk memudahkan penjelasan dipilih titik tengah selang) yaitu $\overline{x_k} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{2}$.

Partisi yang terbentuk merupakan segiempat dengan ukuran Δx dan $f\left(\overline{x_k}\right)$ sebagai panjang dan lebarnya , sehingga luas tiap partisi adalah $f\left(\overline{x_k}\right)\Delta x$. Oleh karena itu didapatkan jumlah luas partisi pada selang [a,b] yaitu : $\sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x_k}\right)\Delta x$. Jumlah tersebut dinamakan jumlah Riemann untuk f(x) yang bersesuaian dengan partisi P. Maka luas daerah yang dibatasi oleh y = f(x) , garis x = a , garis x = b dan sumbu X akan didekati oleh jumlah Riemaan di atas bila diambil n → ∞. Dari sini dapat didefinisikan suatu integral tentu yaitu integral dari f(x) pada suatu selang [a,b] berikut.

Definisi : Integral Riemann

Misal fungsi f(x) kontinu pada selang [a,b], $\Delta x_k = \dfrac{b-a}{n} = \Delta x$ lebar partisi dari [a,b], a = x_0 , b = x_n , $\overline{x_k} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{2}$. Maka integral dari f(x) atas [a,b] didefinisikan sebagai limit jumlah Riemann yaitu :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x_k}\right)\Delta x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(\overline{x_k}\right)\Delta x$$

Bila limit ada maka f(x) dikatakan **integrabel** (dapat diintegralkan) pada [a,b]. Integral ini disebut **Integral Riemann** atau **Integral Tentu**.

Teorema

1. Misal f(x) fungsi terbatas pada [a,b] (yaitu terdapat M $\in \Re$ sehingga | f(x) | $\leq$ M untuk setiap x $\in$ [a,b]) dan kontinu kecuali pada sejumlah hingga titik pada [a,b]. Maka f(x) integrabel pada [a,b].
2. Bila f(x) kontinu pada [a,b] maka f(x) integrabel pada [a,b].

Contoh

Fungsi berikut tidak integrabel pada [-2,2] :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} , & x \neq 0 \\ 1 , & x = 0 \end{cases}$$

Tunjukkan (dengan membuat grafik) bahwa f(x) tidak terbatas pada [-2,2]!

Teorema Dasar Kalkulus (Pertama)

Misal f(x) kontinu pada [a,b] dan F(x) adalah anti turunan dari f(x). Maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Contoh :

Selesaikan integral tentu berikut :

a. $\displaystyle\int_{p/2}^{p} \sin(2x)\,dx$

b. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx$

Jawab :

a. Misal u = 2x . Maka du = 2 dx. Untuk x = ½π dan x = π maka u = π dan u = 2π.

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin(2x)\ dx = \frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi} \sin u\ du = -\frac{1}{2}\cos u\Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{-1}{2}\left(\cos 2\pi - \cos \pi\right) = -1$$

b. Misal u = x^2 + 1. Maka du = 2 x dx.

Dari bentuk integral tak tentu didapatkan : $\int x\sqrt{x^2+1}\ dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\ du = \frac{1}{3}u\sqrt{u} + C$

Jadi : $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\ dx = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

Teorema Dasar Kalkulus (Kedua)

Misal f(x) kontinu pada [a,b]. Maka terdapat c ∈ (a,b) sehingga :

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(c)\ (b-a)$$

Teorema ini disebut juga **Teorema Nilai Rata-rata Integral** dengan f(c) merupakan nilai rata-rata integral dari f(x).

Contoh :

Tentukan nilai rata-rata fungsi $f(x) = x\sqrt{2x^2+1}$ pada selang [0,2].

Jawab :

Misal u = 2 x^2 + 1. Maka du = 4 x dx. Bila x = 0 dan x = 2 maka berturut-turut u = 1 dan u = 9. Jadi :

$$\text{Rata} - \text{rata} = \frac{1}{2}\int_0^2 x\sqrt{2x^2+1}\ dx = \frac{1}{8}\int_1^9 \sqrt{u}\ du = \frac{1}{12}u\sqrt{u}\Big|_1^9 = \frac{9}{4} - \frac{1}{12} = \frac{13}{6}$$

Sifat-sifat lain yang berkaitan dengan integral tentu diberikan berikut :

1. $\int_a^b [p\, f(x) + q\, g(x)]\, dx = p\int_a^b f(x)\, dx + q\int_a^b g(x)\, dx$ (sifat linear)
2. Misal f(x) dan g(x) integrabel pada [a,b] dan f(x) $\leq$ g(x) untuk setiap x $\in$ [a,b]. Maka $\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$ (sifat perbandingan)
3. Misal f(x) integrabel pada [a,b] dan m $\leq$ f(x) $\leq$ M untuk setiap x $\in$ [a,b]. Maka $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b-a)$
4. $\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$
5. $\int_a^a f(x)\, dx = 0$ dan $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$
6. Bila f(x) fungsi ganjil maka $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 0$
7. Bila f(x) fungsi genap maka $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$
8. Bila f(x) fungsi periodik dengan periode p maka $\int_{a+p}^{b+p} f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx$
9. $\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\, du$
10. $D\left[\int_{w(x)}^{v(x)} f(t)\, dt\right] = f(v(x))\, v'(x) - f(w(x))\, w'(x)$

Contoh :

Hitung integral $\int_0^5 f(x)\,dx$ bila $f(x)=\begin{cases} -2 & , x<0 \\ 1+x & , 0<x<2 \\ 3x^2 & , x>2 \end{cases}$

Jawab :

$$\int_0^5 f(x)\,dx=\int_0^2 (1+x)\,dx+\int_2^5 3x^2\,dx=121$$

Contoh :

Tentukan turunan pertama dari $G(x)=\int_{2x}^{x^2}\sqrt{t^2+1}\,dt$

Jawab :

$$G'(x)=2x\sqrt{x^4+1}-2\sqrt{4x^2+1}$$

Soal Latihan

(Nomor 1 sd 5) Hitung nilai integral dari $\int_0^5 f(x)\,dx$, bila :

1. $f(x)=4x^3+3$
2. $f(x)=x^{4/3}-2x^{1/3}$
3. $f(x)=\sqrt{x-4}+\sqrt{2x+6}$
4. $f(x)=\begin{cases} x+2 & , 0\le x<2 \\ 6-x & , 2\le x\le 5 \end{cases}$
5. $f(x)=\begin{cases} x & , 0\le x<1 \\ 1 & , 1\le x\le 3 \\ x-4 & , 3<x\le 5 \end{cases}$

(Nomor 6 sd 13) Hitung nilai integral tentu berikut :

6. $\int_{1}^{4} \frac{s^4 - 8}{s^2}\, ds$

7. $\int_{p/6}^{p/2} 2 \sin t \;\; dt$

8. $\int_{-1}^{0} 3x^2 \sqrt{x^3 + 1}\; dx$

9. $\int_{-3}^{3} 8t\sqrt{7 + 2t^2}\; dt$

10. $\int_{1}^{3} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^3 + 3x}}\, dx$

11. $\int_{0}^{p/2} \sin^2 3x \cos 3x\; dx$

12. $\int_{1}^{5} |x - 2|\, dx$

13. $\int_{0}^{2} |2x - 3|\, dx$

(Nomor 14 sd 17) Tentukan G'(x) dari :

14. $G(x) = \int_{1}^{x} \frac{1}{t^2 + 1} dt$

15. $G(x) = \int_{1}^{x^2} \frac{1}{t^2 + 1} dt$

16. $G(x) = \int_{x}^{x^2} \frac{1}{t^2 + 1} dt$

17. $G(x) = \int_{2}^{x^2+1} \sqrt{2 + \sin t}\; dt$

(Nomor 18 sd 23) Misal f(x) = f(-x), f(x) ≤ 0, g(-x) = - g(x), $\int_0^2 f(x)\,dx = 0,\ \int_0^2 g(x)\,dx = 5$. Hitung :

18. $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

19. $\int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx$

20. $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx$

21. $\int_{0}^{2} [3f(x) + 2g(x)]\,dx$

22. $\int_{-2}^{2} [f(x) + f(-x)]\,dx$

23. $\int_{-2}^{0} g(x)\,dx$

(24 sd 26) Tentukan nilai rata-rata dari fungsi berikut pada selang yang diketahui:

24. f(x) = $4x^3$, [1,3]

25. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 16}}, [-1,3]$

26. f(x) = $\sin^2 x \cos x$, [0, π/2]