

## DALIL DELHOSPITAL

Dalam perhitungan limit fungsi seringkali dijumpai bentuk tak tentu dari limit yaitu :  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$  dan  $\infty - \infty$ . Untuk menyelesaikannya digunakan cara yang dikenalkan oleh Delhospital.

**Bentuk**  $\frac{0}{0}$  dan  $\frac{\infty}{\infty}$

Misal  $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$  atau  $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$ . Maka  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ . Bila masih dijumpai ruas kanan merupakan bentuk  $\frac{0}{0}$  atau  $\frac{\infty}{\infty}$

maka dilakukan penurunan lagi sehingga didapatkan nilai yang bukan merupakan bentuk tak tentu tersebut. Penulisan  $\lim$  mengandung maksud

$\lim_{x \rightarrow a}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^+}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-}$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$  atau  $\lim_{x \rightarrow \infty}$ .

Contoh :

Hitung limit berikut

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x}{x^4 + 1}$

Jawab :

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos 2x}{2} = 2$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x}{x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{24x} = 0$

**Bentuk 0 . ∞**

Misal  $\lim f(x) = 0$  dan  $\lim g(x) = \infty$ . Maka  $\lim f(x) g(x)$  merupakan bentuk  $0 \cdot \infty$ .

Untuk menyelesaikannya kita ubah menjadi bentuk  $\frac{0}{0}$  atau  $\frac{\infty}{\infty}$  yaitu :

$$\lim f(x) g(x) = \lim \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}.$$

Selanjutnya solusi dari limit tersebut

diselesaikan dengan cara seperti bentuk sebelumnya.

Contoh :

Hitung limit berikut

a.  $\lim_{x \rightarrow p/2} \left( x - \frac{p}{2} \right) \sec x$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc x$

Jawab :

a.  $\lim_{x \rightarrow p/2} \left( x - \frac{p}{2} \right) \sec x = \lim_{x \rightarrow p/2} \frac{x - \frac{p}{2}}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow p/2} \frac{1}{-\sin x} = -1$

b.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \csc x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\cos x} = 0$

### Bentuk $\infty - \infty$

Misal  $\lim f(x) = \lim g(x) = \infty$ . Maka untuk menyelesaikan  $\lim [ f(x) - g(x) ]$  dilakukan dengan menyederhanakan bentuk  $[ f(x) - g(x) ]$  sehingga dapat dikerjakan menggunakan cara yang telah dikenal sebelumnya.

Contoh

Hitung  $\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x)$

Jawab :

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\csc x - \cot x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

Sebagai catatan bahwa tidak semua bentuk limit tak tentu dapat diselesaikan menggunakan dalil Delhospital. Hal ini seringkali terjadi di dalam menyelesaikan limit fungsi  $f(x)$  dengan  $f(x)$  bukan merupakan fungsi rasional. Untuk lebih jelasnya diberikan contoh berikut.

Contoh

Hitung limit berikut :

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x}}{1 - x}$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} \right)$

Jawab:

a.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x} \frac{|x|}{|x|}}{1 - x \frac{|x|}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x} (-x)}{1 - x \sqrt{x^2}} = 1$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{1}{2}$

### Soal latihan

Hitung limit berikut ( bila ada )

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{2 - 5x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - x}{2x^3 - 1}$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 3x^3}{x + 4}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{3x - 5}{6x + 2}}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 1}}{1 + x}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1}{\sqrt{1 + 2x^2}}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} 2x \csc x$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \cot 2x (1 - \cos 2x)$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x} - x \right)$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 3} - x \right)$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right)$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 - 3} \right)$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + 6x - 5} - x \right)$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 5x}{\sin 2x}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(5x)}{x^2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1 - \cos x}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{1 - \cos 5x}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos x}$$