

## KEMONOTONAN DAN KECEKUNGAN KURVA

Pada bagian ini penggunaan turunan akan di titik beratkan untuk mengetahui sifat-sifat yang dimiliki suatu kurva antara lain kemonotonan, kecekungan, nilai ekstrim, titik belok dan asymtot. Hal ini ditekankan agar kita mudah dalam menganalisa dan menggambarkan grafik fungsi. Pada bagian akhir dari sub bab penggunaan turunan ini, akan dijelaskan tentang dalil De lhospital untuk menghitung limit fungsi baik limit di suatu titik, limit di tak hingga maupun limit tak hingga.

### Definisi : Fungsi Monoton

Grafik fungsi  $f(x)$  dikatakan **naik** pada selang  $I$  bila  $f(x_1) > f(x_2)$  untuk  $x_1 > x_2$ ;  $x_1, x_2 \in I$ . Sedangkan  $f(x)$  dikatakan **turun** pada selang  $I$  bila  $f(x_1) < f(x_2)$  untuk  $x_1 > x_2$ ;  $x_1, x_2 \in I$ . Fungsi naik atau turun disebut **fungsi monoton**.

Dalam menentukan selang fungsi monoton naik atau turun digunakan pengertian berikut. Gradien dari suatu garis didefinisikan sebagai tangen sudut ( $\alpha$ ) yang dibentuk oleh garis tersebut dengan sumbu X positif,  $m = \tan \alpha$ . Bila sudut lancip ( $\alpha < \frac{1}{2} \pi$ ) maka  $m > 0$  dan  $m < 0$  untuk  $\alpha > \frac{1}{2} \pi$ . Karena gradien garis singgung suatu kurva  $y = f(x)$  di titik ( $x, y$ ) diberikan dengan  $m = f'(x)$  dan selang fungsi naik atau turun berturut-turut ditentukan dari nilai gradiennya, maka selang atau selang dimana fungsi monoton diberikan berikut :

1. Fungsi  $f(x)$  naik bila  $f'(x) > 0$
2. Fungsi  $f(x)$  turun bila  $f'(x) < 0$

Contoh :

Tentukan selang fungsi naik dan fungsi turun dari fungsi  $f(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - 5$

Jawab :

Turunan pertama,  $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x$ .

Untuk  $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x > 0$ , maka fungsi naik pada  $-1 < x < -\frac{1}{2}$  atau  $x > 0$  dan fungsi turun pada  $x < -1$  atau  $-\frac{1}{2} < x < 0$ .

Secara geometris, grafik fungsi  $y = f(x)$  cekung ke bawah di suatu titik bila kurva terletak di bawah garis singgung kurva di titik tersebut. Sedangkan grafik fungsi  $y = f(x)$  cekung ke atas di suatu titik bila kurva terletak di atas garis singgung yang melalui titik tersebut.

### Definisi : Kecekungan Fungsi

Fungsi  $f(x)$  dikatakan **cekung ke atas** pada selang  $I$  bila  $f'(x)$  naik pada selang  $I$ , sedang  $f(x)$  dikatakan **cekung ke bawah** bila  $f'(x)$  turun pada selang  $I$ .

Oleh karena itu dapat disimpulkan :

1. Bila  $f''(x) > 0, x \in I$  maka  $f(x)$  cekung ke atas pada  $I$  dan
2. Bila  $f''(x) < 0, x \in I$  maka  $f(x)$  cekung ke bawah pada  $I$ .

Contoh :

Tentukan selang kecekungan dari fungsi :  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x}$

Jawab :

$$\text{Turunan pertama, } f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{(1+x)^2}$$

$$\text{Turunan kedua, } f''(x) = \frac{4}{(1+x)^3}$$

Cekung ke atas,  $f''(x) > 0$  pada selang  $x > -1$  dan cekung ke bawah pada selang  $x < -1$ .

### Soal Latihan

Tentukan selang kemonotonan dan kecekungan dari kurva berikut

1.  $f(x) = (x-3)^3$
2.  $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 13$
3.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$
4.  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$
5.  $f(x) = x^6 - 3x^4$

6.  $f(x) = \frac{2-x}{x^2}$

7.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$