

## TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

Fungsi trigonometri ( sinus dan cosinus ) merupakan fungsi kontinu, sehingga limit fungsi sinus dan cosinus di setiap titik sama dengan nilai fungsinya, yaitu :

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a \quad \text{dan} \quad \lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

Turunan dari fungsi sinus dapat diperoleh dari definisi, yaitu :

$$\frac{d(\sin a)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(a + \frac{h}{2}\right)}{h}$$

Karena  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h} = 1$  maka  $\frac{d(\sin a)}{dx} = \cos a$

Sedangkan untuk turunan fungsi cosinus diperoleh berikut:

$$\frac{d(\cos a)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos a}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin\left(a + \frac{h}{2}\right)}{h} = -\sin a$$

Untuk turunan fungsi trigonometri yang lain dapat diperoleh dengan menerapkan rumus perhitungan turunan :

$$1. \frac{d(\tan x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)}{dx} = \sec^2 x$$

$$2. \frac{d(\cot x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)}{dx} = -\csc^2 x$$

$$3. \frac{d(\sec x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx} = \sec x \tan x$$

$$4. \frac{d(\csc x)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{dx} = -\csc x \cot x$$

Untuk menentukan / menghitung limit fungsi trigonometri di tak hingga dan limit tak hingga, digunakan sifat atau teorema yang diberikan tanpa bukti berikut.

### Teorema

Misal  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  berlaku untuk setiap  $x$  di dalam domainnya.

Bila  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = L$  maka  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L$

### Contoh

Hitung limit berikut ( bila ada )

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$$

$$a. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

Jawab :

a. Misal  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ . Dari  $-1 \leq \sin x \leq 1$  maka  $\frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ . Karena

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ maka } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

b. Bila  $x$  mendekati nol dari arah kanan maka  $1 - \cos x$  mendekati 2, sedangkan nilai  $\sin x$  akan mengecil atau mendekati nol. Oleh karena itu, bila 2 dibagi dengan bilangan positif kecil sekali ( mendekati nol ) maka akan menghasilkan bilangan yang sangat

besar ( mendekati tak hingga ). Jadi  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \infty$

### Soal latihan

( Nomor 1 sd 7 ) Hitung limit fungsi berikut ( bila ada )

1.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 + \cos x}{\sin x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos x$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$
5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{p}{6} + \frac{1}{x}\right)$
6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin\left(x + \frac{1}{x}\right) - \sin x \right)$
7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 - \cos \frac{1}{x} \right)$

( Nomor 8 sd 10 ) Tentukan turunan pertama dari:

$$8. y = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$9. y = \frac{\cos x}{x}$$

$$10. y = \frac{\tan x}{\sin x - \cos x}$$

11. Persamaan garis singgung kurva  $y = f(x)$  di titik  $( a, b )$  dengan gradien  $m$  dinyatakan dengan :  $y - b = m ( x - a )$ . Sedangkan persamaan garis normal dari  $y = f ( x, y )$  ( garis yang tegak lurus terhadap suatu garis singgung ) yang melalui titik  $( a, b )$  mempunyai persamaan :  $y - b = -1/m ( x - a )$ . Tentukan persamaan garis singgung dan normal kurva berikut di titik yang diketahui dengan menghitung gradiennya terlebih dahulu.

a.  $y = x^2 - 2x$  di  $( 0, 0 )$

b.  $y = \tan x$  di  $x = \frac{1}{4} \pi$

12. Tentukan nilai  $a$  agar fungsi berikut kontinu di  $x = 0$

$$\text{a. } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x} & , x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{b. } f(x) = \begin{cases} \frac{\tan ax}{x} & , x < 0 \\ 3x + 2a^2 & , x \geq 0 \end{cases}$$