TURUNAN FUNGSI

Misal diberikan grafik fungsi y = f(x) dengan P (a, b) terletak pada kurva f(x). Bila Q (x,y) merupakan titik sembarang pada kurva f(x) maka gradien garis PQ dapat dinyatakan dengan :

$$m_{PQ} = \frac{y-b}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Bila titik Q berimpit dengan dengan titik P maka garis PQ akan merupakan garis singgung kurva f(x) di P sehingga gradien :

$$m = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Turunan dari fungsi f(x) di titik x = a didefinisikan sebagai gradien dari garis singgung kurva f(x) di x = a dan diberikan:

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Bila nilai limit ada maka f(x) dikatakan **diferensiabel** atau **dapat diturunkan** di x = a.

Misal h = x - a . Maka turunan f(x) di x = a dapat dituliskan :

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Notasi lain : $f'(a) = \dfrac{df(a)}{dx} = \dfrac{dy(a)}{dx} = y'(a)$

Secara fisis, pengertian dari turunan fungsi f(x) di titik x = a dinyatakan sebagai kecepatan, V(x) benda yang bergerak dengan lintasan f(x) pada saat x = a. Oleh karena itu, didapatkan hubungan $V(a) = f'(a)$ dan percepatan , A(x) , $A(a) = \dfrac{dV(a)}{dx}$

Bila y = f(x) diferensiabel di x = a maka kontinu di x = a. Sifat tersebut tidak berlaku sebaliknya. Hal ini, ditunjukkan oleh contoh berikut.

Contoh

Tunjukkan bahwa f (x) = | x | kontinu di x = 0 tetapi tidak diferensiabel di x = 0

Jawab :

Fungsi f (x) kontinu di x = 0 , sebab $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

Turunan f (x) di x = 0 dicari menggunakan rumus berikut :

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

Karena $-1 = \lim\limits_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} \neq \lim\limits_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1$ maka f(x) = |x| tidak diferensiabel di x = 0.

Untuk menentukan turunan suatu fungsi diberikan rumus sebagai berikut :

1. $\frac{d\left(x^r\right)}{dx} = r\, x^{r-1} \quad ; \quad r \in R$
2. $\frac{d\left(f(x) + g(x)\right)}{dx} = \frac{d\left(f(x)\right)}{dx} + \frac{d\left(g(x)\right)}{dx}$
3. $\frac{d\left(f(x)\, g(x)\right)}{dx} = g(x)\, \frac{d\left(f(x)\right)}{dx} + f(x)\, \frac{d\left(g(x)\right)}{dx}$
4. $\frac{d\left(f(x)/g(x)\right)}{dx} = \frac{g(x)\, d\left(f(x)\right) - f(x)\, d\left(g(x)\right)}{g^2(x)}$

Soal latihan

(Nomor 1 sd 10) Tentukan $\frac{dy}{dx}$ dari :

1. $y = \frac{-12}{2x^6}$

2. $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

3. y = x (x^2 + 1)

4. $y = \left(x^4 + 2x\right)\left(x^3 + 2x^2 + 1\right)$

5. $y = \left(3x^2 + 2x\right)\left(x^4 - 3x + 1\right)$

6. $y = \frac{1}{3x^2 + 9}$

7. $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$

8. $y = \frac{2x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

9. $y = \frac{x^2 - 2x + 5}{x^2 + 2x - 3}$

10. $y = \frac{5x^2 + 2x + 6}{3x - 1}$

(Nomor 11 sd 13) Tentukan nilai a dan b agar fungsi berikut diferensiabel di nilai yang diberikan.

11. $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x+3} & ; 0 \le x < 1 \\ x^2 - bx & ; x \ge 1 \end{cases}$; x = 1

12. $f(x) = \begin{cases} ax - b & ; x < 2 \\ 2x^2 - 1 & ; x \ge 2 \end{cases}$; x = 2

13. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; x < 3 \\ 2ax + b & ; x \ge 3 \end{cases}$; x = 3