

## LIMIT DAN KEKONTINUAN

Pengertian dan notasi dari limit suatu fungsi,  $f(x)$  di suatu nilai  $x = a$  diberikan secara intuitif berikut.

Bila nilai  $f(x)$  mendekati  $L$  untuk nilai  $x$  mendekati  $a$  dari arah kanan maka dikatakan bahwa limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  dari kanan sama dengan  $L$  dan dinotasikan

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad (1)$$

Bila nilai  $f(x)$  mendekati  $l$  untuk nilai  $x$  mendekati  $a$  dari arah kiri maka dikatakan bahwa limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  dari arah kiri sama dengan  $l$  dan dinotasikan

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l \quad (2)$$

Bila  $L = l$  maka dikatakan bahwa limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  sama dengan  $L$  dan dinotasikan

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad (3)$$

Sedangkan bila  $L \neq l$  maka dikatakan bahwa limit fungsi  $f(x)$  untuk  $x$  mendekati  $a$  tidak ada.

Bentuk (1) dan (2) disebut **limit sepihak**, . Sedangkan bentuk (3) mengisyaratkan bahwa nilai limit fungsi pada suatu titik dikatakan ada bila nilai limit sepihaknya sama atau nilai limit kanan ( 1) sama dengan nilai limit kiri ( 2).

### Sifat-sifat limit:

Misal  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  dan  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$ . Maka :

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + G$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L - G$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = LG$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{G}$  ,bila  $G \neq 0$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L} \text{ untuk } L > 0 \text{ bila } n \text{ genap.}$$

Sebagai catatan bahwa sifat-sifat di atas juga berlaku untuk limit sepihak.

Contoh :

$$\text{Selesaikan limit fungsi } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases} \text{ bila ada}$$

1.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

Jawab :

$$1. \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + 1) = 2$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x = 2$$

$$3. \text{ Sebab limit kiri sama dengan limit kanan maka limit fungsi ada dan } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Contoh :

$$\text{Selesaikan } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$$

Jawab :

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+1}{x-2} = \frac{1}{4}$$

Fungsi  $f(x)$  dikatakan **kontinu** pada suatu titik  $x = a$  bila nilai limit  $f(x)$  pada  $x$  mendekati  $a$  sama dengan nilai fungsi di  $x = a$  atau  $f(a)$ . Secara lebih jelas,  $f(x)$  dikatakan kontinu di  $x = a$  bila berlaku :

1.  $f(a)$  terdefinisi atau  $f(a) \in \mathfrak{R}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ada, yakni :  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Bila minimal salah satu dari persyaratan di atas tidak dipenuhi maka  $f(x)$  dikatakan tidak kontinu atau diskontinu di  $x = a$  dan titik  $x = a$  disebut **titik diskontinu**. Secara geometris, grafik fungsi kontinu tidak ada loncatan atau tidak terputus. Bilamana kita menggambarkan suatu grafik fungsi sembarang dengan mengerakkan pensil kita di kertas dan tanpa pernah mengangkat pensil tersebut sebelum selesai maka akan kita dapatkan fungsi kontinu.

Fungsi  $f(x)$  dikatakan **kontinu pada interval buka**  $( a,b )$  bila  $f(x)$  kontinu pada setiap titik di dalam interval tersebut. Sedangkan  $f(x)$  dikatakan **kontinu pada interval tutup**  $[ a,b ]$  bila :

1.  $f(x)$  kontinu pada  $( a,b )$
2.  $f(x)$  kontinu kanan di  $x = a$   $\left( \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \right)$
3.  $f(x)$  kontinu kiri di  $x = b$   $\left( \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b) \right)$

Bila  $f(x)$  kontinu untuk setiap nilai  $x \in \mathfrak{R}$  maka dikatakan  $f(x)$  kontinu atau kontinu dimana-mana .

Contoh :

Tentukan nilai  $k$  agar fungsi  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2kx + 1 & , x < -1 \\ x + 1 & , x \geq -1 \end{cases}$  kontinu di  $x = -1$ .

Jawab :

Nilai fungsi di  $x = -1$ ,  $f(-1) = 3$ .

Sebab nilai limit kanan sama dengan 3 maka nilai limit kiri juga sama dengan 3. Untuk itu pembilang dari bentuk  $\frac{x^2 + 2kx + 1}{x + 1}$  harus mempunyai faktor  $x + 1$ . Dengan melakukan pembagian pembilang oleh penyebut didapatkan,

$$\frac{x^2 + 2kx + 1}{x + 1} = x + 2k - 1 + \frac{-2k + 2}{x + 1}$$

maka didapatkan  $k = 1$ .

### Soal Latihan

1. Diketahui :  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases}$

a. Hitung  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  dan  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

b. Selidiki apakah  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  ada, jika limit ini ada tentukan nilainya.

2. Diketahui  $g(x) = |x - 2| - 3x$ , hitung ( bila ada ) :

a.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

3. Diketahui  $f(x) = \frac{|x - 2|}{x - 2}$ , hitung ( bila ada ) :

a.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

b.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

c.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

4. Diketahui  $f(x) = \begin{cases} 2x - a, & x < -3 \\ ax + 2b, & -3 \leq x \leq 3 \\ b - 5x, & x > 3 \end{cases}$ , tentukan nilai a dan b agar  $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$  dan

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  ada.

5. Diketahui  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq -1 \\ 2x + 2, & x > -1 \end{cases}$ , selidiki kekontinuan fungsi  $f(x)$  di  $x = -1$

6. Agar fungsi  $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ ax+b, & 1 \leq x < 2 \\ 3x, & x \geq 2 \end{cases}$ , kontinu pada  $\mathbb{R}$ , maka  $a + 2b =$

7. Tentukan  $a$  dan  $b$  agar fungsi  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 4, & x < 2 \\ \frac{x-2}{2-4x}, & x \geq 2 \end{cases}$ , kontinu di  $x = 2$

8. Tentukan nilai  $a$ ,  $b$  dan  $c$  agar fungsi berikut kontinu di  $x = 1$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax^2 - x - 1}{x - 1} & ; x > 1 \\ b & ; x = 1 \\ -x + c & ; x < 1 \end{cases}$$

9. Tentukan nilai  $k$  agar membuat fungsi berikut kontinu :

a.  $f(x) = \begin{cases} 7x - 2 & , x \leq 1 \\ kx^2 & , x > 1 \end{cases}$

b.  $f(x) = \begin{cases} kx^2 & , x \leq 2 \\ 2x + k & , x > 2 \end{cases}$

c.  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7 & ; 0 < x \leq k \\ \frac{6}{x} & ; x > k \end{cases}$

10. Carilah titik diskontinu dari fungsi

a.  $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x + 3}$

c.  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$

b.  $f(x) = \frac{x - 2}{|x| - 2}$