FUNGSI DAN GRAFIK

Suatu pengaitan dari himpunan A ke himpunan B disebut **fungsi** bila mengaitkan setiap anggota dari himpunan A dengan tepat satu anggota dari himpunan B.

Notasi : $f : A \longrightarrow B$

$x \longrightarrow f(x) = y$

Himpunan A disebut **Domain / daerah asal** dari f(x), dinotasikan D_f , sedang $\{ y |\ f(x) = y, x \in A \} \subseteq B$ disebut **Range / daerah hasil** dari f(x) dinotasikan R_f .

Beberapa macam fungsi dan sifat-sifat yang dimiliki akan dibahas berikut.

Fungsi Polinom

Bentuk umum fungsi polinom **order** atau **pangkat** n (n bilangan bulat positif) dinyatakan oleh

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$$

dengan $a_n \neq 0$. Berikut bentuk khusus dari fungsi polinom, yaitu :

- Fungsi konstan : $f(x) = a_0$.
- Fungsi Linear : $f(x) = a_0 + a_1 x$. (f(x) = x : fungsi identitas)
- Fungsi Kuadrat : $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

Misal f(x) merupakan fungsi polinom order n maka akan mempunyai paling banyak n buah pembuat nol yang berbeda. Untuk mendapatkan pembuat nol fungsi polinom dapat digunakan aturan horner.

Fungsi Rasional

Bentuk umum fungsi rasional adalah $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ dengan p(x) dan q(x) merupakan fungsi polinom. Fungsi rasional f(x) tidak terdefinisi pada nilai x yang menyebabkan penyebut sama dengan nol atau q(x) = 0. Sedangkan pembuat nol dari pembilang atau p(x) tetapi bukan pembuat nol penyebut merupakan pembuat nol dari fungsi rasional f(x).

Contoh:

Tentukan nilai x yang menyebabkan fungsi $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ sama dengan nol

Jawab :

Permbuat nol pembilang, x = 2 dan x = 1. Pembuat nol penyebut, x = -2 dan x = 2. Jadi nilai x yang memenuhi adalah x = -2.

Fungsi bernilai mutlak

Bentuk dasar fungsi bernilai mutlak dinyatakan oleh f(x) = | x |. Grafik fungsi f(x) simetris terhadap sumbu Y dan terletak di atasdan atau pada sumbu X. Secara umum fungsi bernilai mutlak dapat dinyatakan oleh :

$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) \ , x \in A \\ -g(x) \ , x \in A^C \end{cases} \ ; \ D_f = A \cup A^C$$

Contoh :

Tentukan nilai x agar grafik fungsi $f(x) = |x^2 + 1|$ terletak di bawah garis y = 2.

Jawab :

Dicari nilai x yang memenuhi pertidaksamaan, $f(x) = |x^2 + 1| < 2$. Menggunakan sifat pertidaksamaan nilai mutlak $|x^2 + 1| < 2 \Leftrightarrow (x^2 + 1)^2 < 4$ didapatkan $(x^2 + 3)(x^2 - 1) < 0$. Sebab $x^2 + 3$ definit positif yaitu selalu bernilai positif untuk setiap x real maka $x^2 - 1 < 0$. Sehingga nilai x yang memenuhi adalah $-1 < x < 1$ atau $| x | < 1$.

Fungsi banyak aturan

Fungsi ini merupakan bentuk pengembangan dari fungsi bernilai mutlak, untuk fungsi dengan dua aturan dinyatakan oleh:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) \ , \ x \in A \\ f_2(x) \ , x \in A^C \end{cases} \ ; \ A \cup A^C = D_f$$

Fungsi banyak aturan dapat dikembangkan sampai n buah fungsi $f_j(x)$ dengan j = 1,2,…,n.

Fungsi Genap dan Fungsi Ganjil

Fungsi f(x) disebut **fungsi genap** bila f(x) = f(-x) untuk setiap x di domain f(x) [grafik f(x) simetris terhadap sumbu y]. Fungsi f(x) disebut **fungsi ganjil** bila f(x) = - f(-x) untuk setiap x di domain f(x) [grafik f(x) simetris terhadap titik pusat atau pusat sumbu]. Bila suatu fungsi bukan merupakan fungsi genap maka belum tentu merupakan fungsi ganjil.

Contoh :

Manakah diantara fungsi berikut yang merupakan fungsi genap, ganjil atau bukan keduanya

1. $f(x) = x^2 - 2$
2. $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$
3. $f(x) = x^2 - 2x + 1$

Jawab :

1. Fungsi genap sebab $f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x)$
2. Fungsi ganjil sebab $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 2}{-x} = -\frac{x^2 - 2}{x} = -f(x)$
3. Bukan keduanya

Fungsi Trigonometri

Bentuk dasar dari fungsi trigonometri diberikan berikut

- f(x) = sin x ; f(x) = csc x
- f(x) = cos x ; f(x) = sec x
- f(x) = tan x ; f(x) = cot x

Sedangkan beberapa persamaan atau identitas yang berlaku pada fungsi trigonometri diberikan :

1. sin (-x) = - sin x
2. cos (-x) = cos x
3. tan (-x) = - tan x
4. csc (-x) = - csc x
5. sec (-x) = sec x
6. cot (-x) = cot x
7. sin (π/2 - x) = cos x
8. cos (π/2 - x) = sin x
9. tan (π/2 - x) = cot x
10. sin (x + y) = sin x cos y + sin y cos x

11. $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
12. $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
13. $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$
14. $\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
15. $\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
16. $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
17. $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$
18. $\tan 2x = \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
19. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
20. $\cos x - \cos y = -2 \sin \dfrac{x+y}{2} \sin \dfrac{x-y}{2}$
21. $\sin x + \sin y = 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
22. $\cos x + \cos y = 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$
23. $\sin x \sin y = \dfrac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$
24. $\sin x \cos y = \dfrac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}$
25. $\cos x \cos y = \dfrac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}$

Fungsi Periodik

Fungsi f(x) disebut **fungsi periodik** jika ada bilangan real positif p sehingga berlaku f(x+p) = f(x) untuk setiap x di domain f(x). Nilai p terkecil disebut **periode** dari f(x). Fungsi dasar trigonometri merupakan fungsi periodik dengan periode,

- $f(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi) = f(x + 2\pi)$
- $f(x) = \cos x = \cos(x + 2\pi) = f(x + 2\pi)$
- $f(x) = \tan x = \tan(x + \pi) = f(x + \pi)$

Translasi (Pergeseran)

Bila grafik fungsi f(x) digeser ke kanan (searah atau sejajar sumbu x) sepanjang k maka hasil pergeseran merupakan grafik dari fungsi f(x - k). Bila grafik fungsi f(x) digeser ke atas (searah atau sejajar sumbu y) sepanjang a maka hasil pergeseran merupakan grafik fungsi f(x) + a.

Fungsi Komposisi

Komposisi dari fungsi f(x) dan g(x) didefinisikan sebagai

$$(g \circ f)(x) = g (f (x))$$

Sebagai catatan bahwa tidak semua fungsi dapat dilakukan komposisi. Agar dapat dilakukan komposisi antara fungsi f dan g yaitu g o f maka syarat yang harus dipenuhi adalah $R_f \cap D_g \neq \emptyset$

Contoh :

Diketahui fungsi $f(x) = \sqrt{1-x}$ dan $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

1. Tentukan domain dan range dari fungsi f(x) dan g(x).
2. Apakah g o f terdefinisi ? Bila ya tentukan rumusannya.
3. Apakah f o g terdefinisi ? Bila ya, tentukan rumusannya.

Jawab :

1. Domain , $D_f = (-\infty,1)$; $D_g = (-\infty,1) \cup (1,\infty)$. Range, $R_f = (0,\infty)$; $R_g = \Re$
2. Sebab $R_f \cap D_g = (1,\infty)$ maka g o f terdefinisi dan rumusannya yaitu:

   $$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{1-x}\right) = \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{1-x}}$$

3. Sebab, $R_g \cap D_f = (-\infty,1)$ maka f o g terdefinsi dan rumusannya yaitu :

   $$(fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \sqrt{1-\frac{x}{1-x}}$$

Sifat-sifat :

1. f o g ≠ g o f
2. (f o g) o h = f o (g o h)
3. $D_{g\,o\,f} \subseteq D_f$ dan $D_g \subseteq R_f$
4. Bila $D_g = R_f$ maka $D_{gof} = D_f$

Soal Latihan

1. Diketahui : $f(x) = \begin{cases} 1/x & ,x > 3 \\ 2x & ,x \leq 3 \end{cases}$. Hitung :

   a. f(-4)

b. f(0)

c. f(t^2 + 5)

2. Nyatakan fungsi berikut tidak dalam nilai mutlak.

a. f(x) = | x | + | 3x + 1 |

b. f(x) = 3 + | 2x - 5 |

c. f(x) = 3 | x - 2 | - | x + 1 |

3. Tentukan domain dan range dari :

a. $f(x) = \sqrt{2x+3}$

b. $g(x) = \dfrac{1}{4x-1}$

c. $h(x) = \sqrt{(x+1)^{-1}}$

d. $f(t) = t^{2/3} - 4$

e. g(u) = | 2u + 3 |

f. $h(y) = -\sqrt{625 - y^4}$

g. $f(x) = \dfrac{\cos(x+1)}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}$

4. Gambarkan grafik dari fungsi berikut :

a. f(x) = x^2 - 1

b. $f(x) = (x-2)^2$

c. $f(x) = (x-2)^2 - 1$

d. $f(x) = [x+2] - 2$

e. f(x) = | x -2 | + 2

5. Tentukan (fog) (x) dan (gof) (x) bila terdefinisi dari :

a. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$; $g(x)=\dfrac{2}{x}$

b. $f(x)=\sqrt{16-x^2}$; $g(x)=1-x^2$

c. $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$; $g(x)=x^2$

d. $f(x)=\sqrt{x-4}$; $g(x)=|x|$

6. Tentukan domain dan range dari soal di atas.

7. Hitung (fog) (x). bila $f(x)=\begin{cases} 5x & ,x\le 0 \\ -x & ,0<x\le 8 \\ \sqrt{x} & ,x>8 \end{cases}$; $g(x)=x^3$

8. Carilah f(x), bila :

a. $f(x+1)=x^2+3x+5$

b. $f(3x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

c. $g(x)=2x-1$ $\;dan\;$ $(gof)(x)=x^2$

d. $g(x)=\sqrt{x+5}$ $\;dan\;$ $(gof)(x)=3|x|$

e. $g(x)=\sqrt{x+5}$; $(fog)(x)=\dfrac{1}{x}\sqrt{4-x^2}$

F. $g(x)=x^2$; $(fog)(x)=ax^2+b$