

SISTEM BILANGAN REAL

Bilangan real, dinotasikan dengan \mathfrak{R} memainkan peranan yang sangat penting dalam Kalkulus. Untuk itu, pertama kali akan diberikan beberapa fakta dan terminologi dari bilangan real. Secara geometri, bilangan real \mathfrak{R} dapat digambarkan sebagai garis bilangan, dinotasikan dengan $\mathfrak{R} = (-\infty, \infty)$. Sedangkan himpunan bagian dari garis bilangan berupa segmen garis atau interval dinotasikan dengan himpunan sebagai berikut.

Garis bilangan : Interval dan himpunan



$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}$$

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}$$

$$(b, \infty) = \{x | x > b\}$$

$$[b, \infty) = \{x | x \geq b\}$$

$$(-\infty, a) = \{x | x < a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x | x \leq a\}$$

Pertidaksamaan

Permasalahan Matematika yang berkaitan dengan interval terletak pada pertidaksamaan aljabar. Himpunan jawab atau solusi dari pertidaksamaan aljabar merupakan salah satu dari bentuk interval di atas. Adapun penjelasannya diberikan berikut.

Bentuk umum pertidaksamaan aljabar :

$$\frac{A(x)}{B(x)} < \frac{C(x)}{D(x)}, \quad A(x), B(x), C(x) \text{ dan } D(x) : \text{ suku banyak. (tanda } < \text{ dapat}$$

digantikan oleh $\leq, \geq, >$).

Himpunan semua bilangan real x yang memenuhi pertidaksamaan disebut **himpunan penyelesaian atau solusi** pertidaksamaan.

Cara mencari solusi pertidaksamaan aljabar sebagai berikut :

1. Nyatakan pertidaksamaan tersebut sehingga didapatkan salah satu ruasnya menjadi nol,

$$\frac{A(x)}{B(x)} - \frac{C(x)}{D(x)} < 0. \text{ Kemudian sederhanakan bentuk ruas kiri, misal } \frac{P(x)}{Q(x)} < 0.$$

2. Cari dan gambarkan pada garis bilangan semua pembuat nol dari P(x) dan Q(x).
3. Tentukan setiap tanda (+ atau -) pada setiap interval yang terjadi dari garis bilangan di atas. Interval dengan tanda (-) merupakan solusi pertidaksamaan.

Contoh :

Tentukan himpunan solusi dari pertidaksamaan berikut :

$$1. \quad x + 1 \geq \frac{-1}{x - 1}$$

$$2. \quad \frac{x - 2}{x - 1} > \frac{x + 3}{x + 1}$$

Jawab :

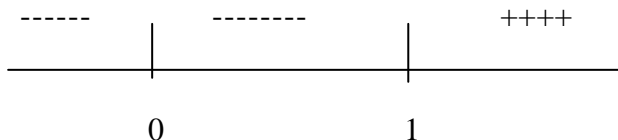
$$1. \quad x + 1 \geq \frac{-1}{x - 1}$$

$$x + 1 + \frac{1}{x - 1} \geq 0$$

$$\frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} + \frac{1}{x - 1} \geq 0$$

$$\frac{x^2}{x - 1} \geq 0$$

Pembuat nol dari pembilang dan penyebut adalah 0 dan 1. Pada garis bilangan didapatkan nilai dari tiap selang, yaitu :



Himpunan solusi pertidaksamaan, $\{0\} \cup (1, \infty)$

Pertaksamaan dengan Nilai Mutlak

Secara geometris, **nilai mutlak** atau **nilai absolut** dari bilangan real x didefinisikan sebagai jarak dari x terhadap 0, sehingga nilai mutlak dari setiap bilangan selalu bernilai positif. Notasi yang digunakan adalah :

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

Sifat-sifat nilai mutlak :

1. $|x| = \sqrt{x^2}$
2. $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
3. $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ atau } x > a$
4. $|x + y| < |x| + |y|$ (ketidaksamaan segitiga)
5. $|x y| = |x| |y|$
6. $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$
7. $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$

Soal latihan

(Nomor 1 sd 25) Tentukan himpunan penyelesaian pertidaksamaan

- | | |
|---------------------------------|--|
| 1. $4x - 7 < 3x + 5$ | 7. $\frac{2}{x} < \frac{3}{x-4}$ |
| 2. $3x < 5x + 1 < 16$ | 8. $\frac{1}{x+1} \geq \frac{3}{x-2}$ |
| 3. $6 \leq x^2 + x < 20$ | 9. $\frac{x-2}{x} - \frac{1}{x+1} < 1$ |
| 4. $-5 < x^4 - x^2 - 5 < 1$ | 10. $x + \frac{5}{x} > 6$ |
| 5. $\frac{x+5}{2x-1} \leq 0$ | 11. $ x+1 < 4$ |
| 6. $\frac{6}{x} - 5 + x \leq 0$ | |

12. $|2x - 7| > 3$

13. $|x - 2| < 3|x + 7|$

14. $|x - 1| \leq 5$

15. $x|x - 1| \geq \frac{6}{|x + 1|}$

16. $2x + 3 < |4x - 5|$

17. $2(x - 1)^2 - |x - 1| \leq 1$

18. $3(x - 1)^2 + 8|x - 1| \leq 3$

19. $|3x + 1| \geq (3x + 1)^2 - 6$

20. $\left| \frac{3 - 2x}{1 + x} \right| \leq 4$

21. $\left| \frac{x}{2x - 1} \right| \leq 1$

22. $\frac{1}{|x - 4|} < \frac{1}{|x + 7|}$

23. $\frac{1}{|x - 3|} - \frac{1}{|x + 4|} \geq 0$

24. $2|3 - x| + 3|x + 1| \geq 2$

25. $|x - 2| + 3|x - 1| \geq 1$

(Nomor 26 sd 27) Tentukan nilai x yang mungkin agar berikut menghasilkan bilangan real :

26. $\sqrt{x^2 + x - 6}$

27. $\sqrt{\frac{x + 2}{x - 1}}$

28. Selesaikan : $|x - 3|^2 - 4|x - 3| = 12$

