

Διονύσης Μάργαρης

Φυσική

Γ' Λυκείου

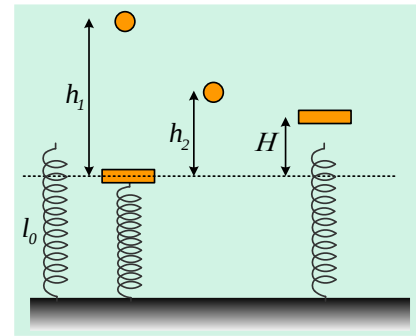


Κρούσεις

Ασκήσεις 2025-26

1) Μια ελαστική κρούση και τα ύψη πριν και μετά

Μια σφαίρα μάζας m αφήνεται από ύψος h_1 να πέσει και να συγκρουσθεί κεντρικά και ελαστικά, με μια πλάκα μάζας M η οποία ηρεμεί στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, το οποίο έχει συμπίεσει, όπως φαίνεται στο σχήμα, χωρίς να είναι δεμένη με αυτό. Μετά την κρούση η σφαίρα κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω και φτάνει σε μέγιστο ύψος h_2 . Η πλάκα ενώ κινείται αρχικά προς τα κάτω, τελικά κινείται προς τα πάνω και αφού εγκαταλείψει το ελατήριο φτάνει σε μέγιστο ύψος H , όπου όλα τα ύψη μετρούνται από την αρχική θέση ισορροπίας της πλάκας.



i) Να αποδείξετε ότι η πλάκα έχει μεγαλύτερη μάζα από την σφαίρα ($M > m$).

ii) Αν p_1 το μέγιστο **μέτρο** της ορμής της σφαίρας κατά την παραπάνω κίνηση, ενώ το αντίστοιχο μέτρο της ορμής της πλάκας, αμέσως μετά την κρούση, είναι p_2 θα ισχύει:

$$\alpha) p_2 = 2p_1, \quad \beta) 2p_1 < p_2 < p_1, \quad \gamma) p_2 = p_1.$$

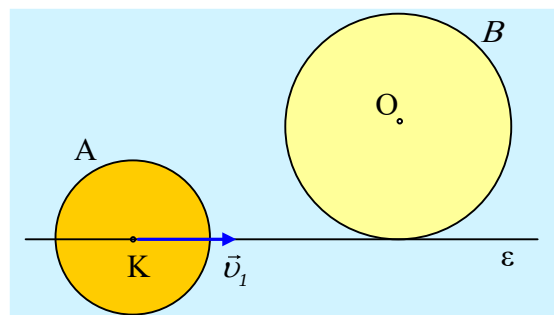
iii) Αν $M = 2m$, τότε για τα προαναφερόμενα ύψη ισχύει:

$$\alpha) h_1 - h_2 > 2H, \quad \beta) h_1 - h_2 = 2H, \quad \gamma) h_1 - h_2 < 2H$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

2) Μια πλάγια ελαστική κρούση δύο σφαιρών

Μια σφαίρα Α ακτίνας 2cm, κινείται στο χώρο, εκτός πεδίου βαρύτητας, με το κέντρο της Κ να έχει σταθερή ταχύτητα v_1 κατά μήκος μιας ευθείας (ϵ), χωρίς να περιστρέφεται. Μια δεύτερη σφαίρα Β, κέντρου Ο και ακτίνας 3cm, είναι ακίνητη. Σχεδιάζοντας ένα σχήμα, στο επίπεδο της σελίδας (το οποίο ταυτίζεται με το επίπεδο που ορίζει η διάκεντρος ΚΟ και η ταχύτητα v_1), η ευθεία (ϵ) εφάπτεται στη σφαίρα Β.



Αν η κρούση που θα ακολουθήσει είναι ελαστική, ενώ οι σφαίρες έχουν ίσες μάζες και οι επιφάνειές τους είναι λείες:

i) Σε ποιες διευθύνσεις θα κινηθούν οι δυο σφαίρες μετά την κρούση;

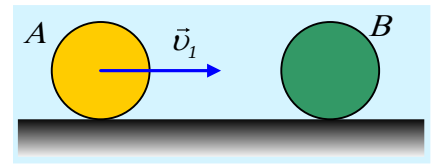
ii) Αν λ ο λόγος των κινητικών ενεργειών των δύο σφαιρών, μετά την κρούση ($K_1/K_2 = \lambda$), τότε:

$$\alpha) \lambda < 0,5, \quad \beta) \lambda = 0,5, \quad \gamma) \lambda > 0,5.$$

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

3) Η ελάχιστη κινητική ενέργεια

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, κινούνται στην ίδια ευθεία, χωρίς να περιστρέφονται, δύο σφαίρες Α και Β με ίσες ακτίνες και μάζες m και $3m$, αντίστοιχα, οι οποίες κάποια στιγμή συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά. Αν πριν την κρούση η Α σφαίρα έχει ταχύτητα μέτρου v_1 με φορά προς τα δεξιά.

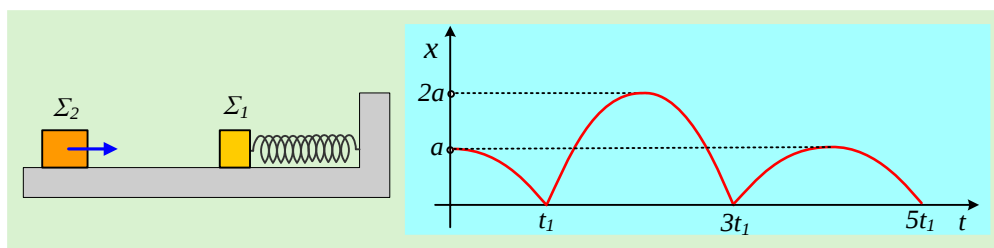


- Υποστηρίζεται η άποψη ότι η σφαίρα Α θα επιβραδυνθεί, εξαιτίας της δύναμης που θα δεχτεί από την σφαίρα Β, με αποτέλεσμα μετά την κρούση να έχει ταχύτητα με μέτρο μικρότερο από v_1 . Να εξετάσετε αν αυτό είναι σωστό ή όχι.
- Αν μετά την κρούση η σφαίρα Α έχει την ελάχιστη δυνατή κινητική ενέργεια, να βρεθεί η ταχύτητα της Β σφαίρας πριν την κρούση.
- Να υπολογιστεί το ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας και του μέτρου της ορμής της σφαίρας Β, που οφείλεται στη κρούση.

4) Κρούσεις και ταλαντώσεις

Κάτι σαν φύλλο εργασίας

Ένα σώμα Σ_1 είναι δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k και συγκρατείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο, έχοντας συμπίεσει το ελατήριο κατά a . Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 κινείται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου πλησιάζοντας το σώμα Σ_1 . Σε μια στιγμή $t_0=0$, αφήνουμε το Σ_1 να ταλαντωθεί και στο διπλανό σχήμα βλέπετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσής του από τη θέση ισορροπίας, σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου κάποια στιγμή τα δυο σώματα συγκρούονται μετωπικά.



Αντλώντας πληροφορίες από το παραπάνω διάγραμμα $x=f(t)$, να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις, δίνοντας και σύντομες δικαιολογήσεις:

- Να εξηγήσετε γιατί έχουμε κρούση των δύο σωμάτων τη στιγμή t_1 . Σε ποια θέση έγινε η κρούση αυτή;
- Να εξηγήσετε γιατί η παραπάνω κρούση των δύο σωμάτων δεν μπορεί να είναι πλαστική.
- Πόσες κρούσεις μεταξύ των δύο σωμάτων έχουμε, μέχρι τη στιγμή $5t_1$;

Αν οι κρούσεις μεταξύ των σωμάτων είναι ελαστικές:

- Σε τι ποσοστό αυξήθηκε η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ_1 , λόγω της πρώτης κρούσης;
- Να υπολογιστεί το ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 το οποίο μεταφέρεται στο

Σ_1 , κατά την κρούση αυτή.

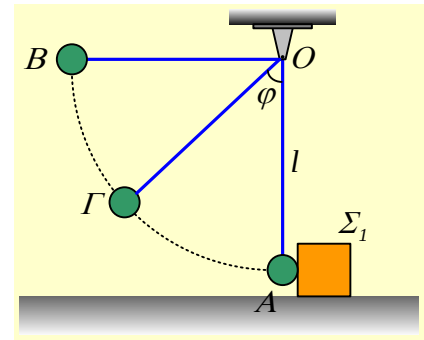
vi) Να υπολογιστεί συναρτήσει της σταθεράς του ελατηρίου k και της αρχικής του συσπείρωσης α , η κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 , τις χρονικές στιγμές $t=0$ και $t'=5t_1$.

vii) Να αποδειχτεί ότι το σώμα Σ_2 έχει τριπλάσια μάζα από το σώμα Σ_1 .

viii) Ποιο από τα δύο σώματα έχει μεγαλύτερη κατά μέτρο ταχύτητα, ελάχιστα πριν την πρώτη κρούση;

5) Δύο ελαστικές κρούσεις μιας σφαίρας

Μια σφαίρα μάζας $m=1\text{kg}$, είναι δεμένη στο κάτω άκρο αβαρούς και μη ελαστικού νήματος, μήκους $l=1,25\text{m}$, το άλλο άκρο του οποίου είναι δεμένο σε σταθερό σημείο O . Η σφαίρα ηρεμεί στη θέση A , με το νήμα κατακόρυφο, σε επαφή με ένα σώμα Σ_1 , όπως στο σχήμα. Εκτρέπουμε τη σφαίρα φέρνοντάς την στη θέση B , με το νήμα οριζόντιο και την αφήνουμε να κινηθεί. Φτάνοντας στη θέση A συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα Σ_1 και στη συνέχεια επιστρέφει φτάνοντας μέχρι τη θέση Γ , όπου το νήμα σχηματίζει με την κατακόρυφο γωνία φ , όπου $\sin\varphi=0,64$, ενώ το Σ_1 μετακινείται κατά $x_1=1\text{m}$, στο οριζόντιο επίπεδο, όπου και σταματά.



i) Να βρεθεί η ταχύτητα της σφαίρας στη θέση A , ελάχιστα πριν και ελάχιστα μετά την κρούση.

ii) Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής της σφαίρας στη διάρκεια της κρούσης.

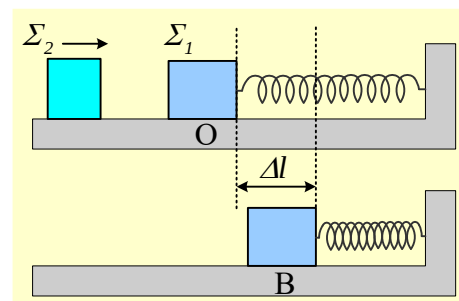
iii) Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος Σ_1 μετά την κρούση καθώς και ο συντελεστής τριβής ολίσθησης που παρουσιάζει με το επίπεδο.

iv) Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία, αντικαθιστώντας το σώμα Σ_1 , με ένα άλλο σώμα Σ_2 , το οποίο παρουσιάζει τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης με το επίπεδο, ενώ η σφαίρα αφήνεται να κινηθεί τώρα από την θέση Γ . Αν μετά την κεντρική ελαστική κρούση το σώμα Σ_2 διανύει απόσταση $x_2=2,25\text{m}$ στο οριζόντιο επίπεδο και σταματά, να βρείτε την μάζα του m_2 .

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

6) Μια ελαστική κρούση και οι μετέπειτα κινήσεις

Πάνω σε ένα μη λείο οριζόντιο επίπεδο, ηρεμεί ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1=2\text{kg}$, στη θέση O , δεμένο στο άκρο οριζοντίου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k , το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Ένα δεύτερο σώμα Σ_2 μάζας $m_2=1\text{kg}$ κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με κατεύθυνση προς το σώμα Σ_1 , με το οποίο μετά από λίγο συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά. Τα δυο σώματα παρουσιάζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης με το επίπεδο $\mu=0,25$. Μετά την κρούση το Σ_1 αφού συμπιέσει το ελατήριο κατά $\Delta l=0,4\text{m}$ όταν μηδενίζεται η ταχύτητά του στη θέση B , επιστρέφει και σταματά στην αρχική του θέση O .

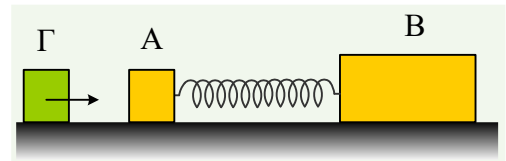


- i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος Σ_1 καθώς και η επιτάχυνσή του, αμέσως μετά την κρούση.
- ii) Να βρεθεί η επιτάχυνση του σώματος στη θέση της μέγιστης συσπείρωσης του ελατηρίου B, ελάχιστα πριν τον μηδενισμό της ταχύτητάς του και ελάχιστα μετά όταν αρχίσει να κινείται προς τα αριστερά.
- iii) Τι ποσοστό της κινητικής ενέργειας του σώματος Σ_2 μεταφέρθηκε στο σώμα Σ_1 κατά την κρούση;
- iv) Να βρεθεί η τελική απόσταση μεταξύ των δύο σωμάτων, όταν πάψει η κίνησή τους.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

7) Θα μετακινηθεί το βαρύ σώμα;

Δυο σώματα A και B με μάζες $m_1=2\text{kg}$ και $m_2=7\text{kg}$ αντίστοιχα, ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο εμφανίζουν συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,4$, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=70\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του.



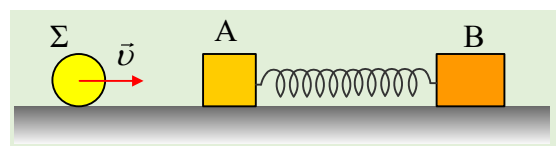
Ένα τρίτο σώμα Γ, μάζας $m=1\text{kg}$, το οποίο επίσης παρουσιάζει με το επίπεδο τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης $\mu=0,4$, κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου και συγκρούεται ακαριαία, κεντρικά και ελαστικά με το σώμα A, έχοντας τη στιγμή της κρούσης ταχύτητα $u=3\text{m/s}$.

- i) Ποιες οι ταχύτητες των τριών σωμάτων, αμέσως μετά την κρούση;
- ii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος αμέσως μετά την κρούση;
- iii) Σε μια στιγμή t_1 , το σώμα A έχει μετατοπισθεί κατά $\Delta x=0,2\text{m}$. Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:
 - α) Η ταχύτητα το σώματος A.
 - β) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του σώματος A και ο ρυθμός αύξησης της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου.
- iv) Να εξετασθεί αν θα μετακινηθεί το σώμα B κάποια στιγμή ή όχι.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$, ενώ δεχόμαστε ότι η οριακή στατική τριβή είναι ίση με την τριβή ολίσθησης.

8) Μια κρούση και δυο «κρούσεις»...

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δυο σώματα A και B, με μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$, δεμένα στα άκρα ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=24\text{N/m}$. Μια σφαίρα Σ με διάμετρο ίση με το ύψος του σώματος A και μάζα $m=0,5\text{kg}$ κινείται ευθύγραμμα κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με σταθερή ταχύτητα $v=0,9\text{m/s}$ και τη στιγμή $t=0$, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με το σώμα A, όπως στο σχήμα.



- i) Να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια του σώματος A, αμέσως μετά την κρούση.
- ii) Για το σύστημα των σωμάτων A και B, να βρεθούν:
 - α) Η μέγιστη και η ελάχιστη κινητική ενέργεια του συστήματος.
 - β) Οι επιταχύνσεις των δύο σωμάτων, τη στιγμή t_1 , όπου για πρώτη φορά παρουσιάζεται η ελάχιστη κινητική ενέργεια του συστήματος.

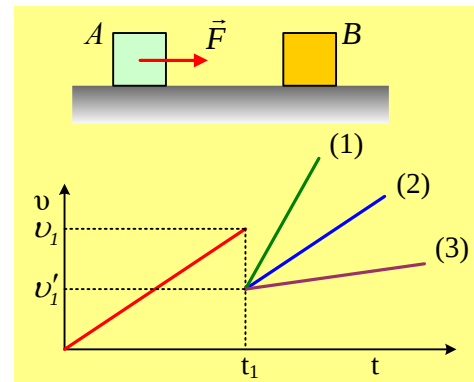
γ) Η μέγιστη ταχύτητα την οποία θα αποκτήσει τη στιγμή t_2 για πρώτη φορά το σώμα Β. Πόση ταχύτητα θα έχει τη στιγμή αυτή το σώμα Α;

- iii) **Για καθηγητές μόνο:** Να βρεθούν οι παραπάνω αναφερόμενες χρονικές στιγμές t_1 και t_2 καθώς και η απόσταση μεταξύ της σφαίρας και του σώματος Α, τις στιγμές αυτές, αν το ελατήριο έχει φυσικό μήκος 0,6m.

Ασκήσεις 2024-25

9) Πληροφορίες για μια κρούση από ένα διάγραμμα

Ένα σώμα Α μάζας m_1 , ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή $t_0=0$, στο σώμα ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F , με αποτέλεσμα να κινηθεί και μετά από λίγο, τη στιγμή t_1 , το σώμα συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα Β μάζας m_2 , ενώ η δύναμη F συνεχίζει να ασκείται στο σώμα Α και μετά την κρούση. Στο σχήμα δίνεται η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Α σε συνάρτηση με το χρόνο.



i) Για τις μάζες των δύο σωμάτων ισχύει:

α) $m_1 < m_2$, β) $m_1 = m_2$, γ) $m_1 > m_2$.

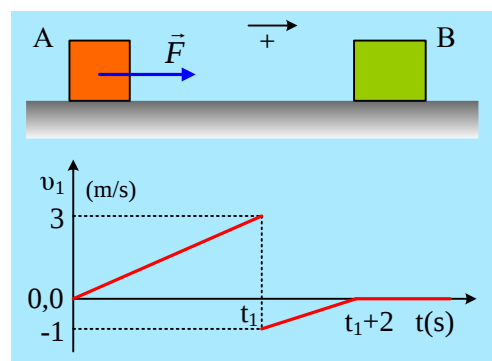
ii) Η ταχύτητα του Α σώματος μετά την κρούση, ακολουθεί το διάγραμμα (1), (2) ή (3);

iii) Αν η ταχύτητα του σώματος Α αμέσως μετά την κρούση, είναι ίση με το μισό της ταχύτητάς του πριν την κρούση ($v'_1 = 0,5v_1$) τότε για την ταχύτητα του σώματος Β μετά την κρούση έχουμε:

α) $v'_2 = 0,5v_1$ β) $v'_2 = 1,5v_1$, γ) $v'_2 = 2,5v_1$, δ) $v'_2 = 3v_1$

10) Επιμένουμε ενεργειακά!

Ένα σώμα Α μάζας $m_1=2\text{kg}$, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο. Σε μια στιγμή $t_0=0$, στο σώμα ασκείται μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=2,5\text{N}$, μέχρι τη στιγμή t_1 , όπου η δύναμη παύει να ασκείται και το σώμα συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα Β. Στο σχήμα δίνεται η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας του σώματος Α σε συνάρτηση με το χρόνο, όπου η κρούση θεωρείται ακαριαία.



i) Να υπολογισθεί η μεταβολή της ορμής του σώματος Α, στη διάρκεια της κρούσης και η αντίστοιχη μεταβολή της κινητικής του ενέργειας.

ii) Αφού εξηγήσετε (χωρίς μαθηματική απόδειξη), γιατί το σώμα Α παρουσιάζει τριβή με το επίπεδο, στη συνέχεια να υπολογίσετε το μέτρο της ασκούμενης τριβής.

iii) Χωρίς να χρησιμοποιήσετε τις εξισώσεις κίνησης του σώματος Α, να βρείτε:

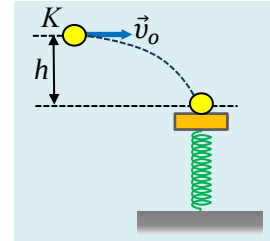
α) Την ενέργεια που μεταφέρεται στο σώμα Α, μέσω του έργου της δύναμης F .

β) Τη χρονική στιγμή t_1 που έγινε η κρούση.

- iv) Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος B και στη συνέχεια να κάνετε το διάγραμμα της ταχύτητάς του σε συνάρτηση με το χρόνο, με δεδομένο ότι τα δυο σώματα παρουσιάζουν τον ίδιο συντελεστή τριβής με το επίπεδο.

11) Μετά την πλάγια κρούση μια αατ

Ένας δίσκος, μάζας m , ηρεμεί στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου. Μια λεία σφαίρα, της ίδιας μάζας, εκτοξεύεται οριζόντια από ένα σημείο K, το οποίο βρίσκεται σε κατακόρυφη απόσταση h , πάνω από το δίσκο, οπότε μετά από λίγο συγκρούεται ελαστικά με το δίσκο. Μετά την κρούση βλέπουμε το δίσκο να εκτελεί μια κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση.



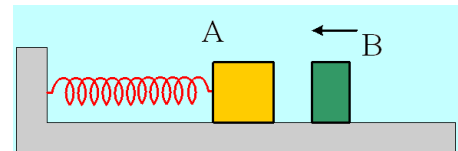
- Τι κίνηση θα εκτελέσει η σφαίρα μετά την κρούση με το δίσκο;
- Η ενέργεια ταλάντωσης του δίσκου, μετά την κρούση είναι ίση:

α) $E < mgh$, β) $E = mgh$, γ) $E > mgh$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

12) Όταν η κίνηση του σώματος, δεν είναι αατ!

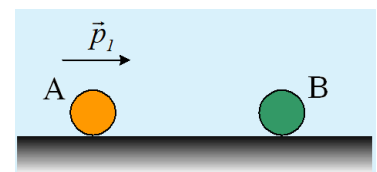
Ένα σώμα A, μάζας $M=3\text{kg}$, ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο ιδανικού οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=240\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Ένα δεύτερο σώμα B, μάζας $m=1\text{kg}$, κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου προς το σώμα A, με το οποίο συγκρούεται κεντρικά, έχοντας ταχύτητα μέτρου $v_2=2,5\text{m/s}$, τη στιγμή ελάχιστα πριν την κρούση. Το αποτέλεσμα της κρούσης είναι το σώμα B να προκαλέσει συσπείρωση του ελατηρίου ίση με $0,05\text{m}$, μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητα του. Αν τα σώματα εμφανίζουν τους ίδιους συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0,8$ με το οριζόντιο επίπεδο, ενώ $g=10\text{m/s}^2$, ζητούνται:



- Η ταχύτητα το σώματος A αμέσως μετά την κρούση.
- Να εξετασθεί αν η κρούση μεταξύ των δύο σωμάτων είναι ή όχι ελαστική.
- Ποια η ελάχιστη και ποια η μέγιστη επιτάχυνση (κατά μέτρο) που αποκτά το σώμα A, κατά την κίνησή του; Να υπολογιστεί το έργο της ασκούμενης τριβής στο σώμα A, μέχρι τη θέση που θα αποκτήσει επιτάχυνση μέτρου $a=g$.
- Η τελική απόσταση μεταξύ των σωμάτων, όταν πάψουν να κινούνται.

13) Οι ορμές σε δύο ελαστικές κρούσεις

Μια σφαίρα A μάζας $m_1=2\text{m}$, κινείται ευθύγραμμα έχοντας ορμή, μέτρου p_1 και σε μια στιγμή, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητη σφαίρα B, ίσης ακτίνας.



- Αν η σφαίρα B έχει μάζα $m_2=m$, τότε η ορμή που αποκτά μετά την κρούση, έχει μέτρο:

$$\alpha) p'_2 = \frac{1}{3} p_1 \quad \beta) p'_2 = \frac{2}{3} p_1 \quad \gamma) p'_2 = p_1 \quad \delta) p'_2 = \frac{4}{3} p_1$$

ii) Αν η σφαίρα B έχει μάζα $m_2=3m$, τότε η αντίστοιχη ορμή που θα αποκτήσει, θα έχει μέτρο:

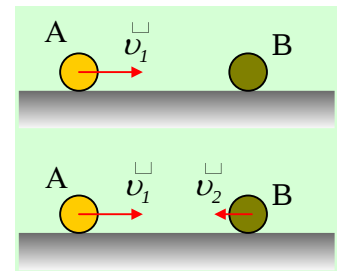
$$\alpha) p'_2 = 0,6 p_1 \quad \beta) p'_2 = 0,9 p_1 \quad \gamma) p'_2 = 1,2 p_1 \quad \delta) p'_2 = 1,6 p_1$$

iii) Τι ποσοστό της αρχικής κινητικής ενέργειας της A σφαίρας, μεταφέρεται στην σφαίρα B, σε καθεμιά από τις παραπάνω περιπτώσεις;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

14) Δύο ελαστικές κρούσεις και η μηδενική ταχύτητα

Μια σφαίρα A μάζας $m=1\text{kg}$ κινείται (χωρίς να περιστρέφεται) με ταχύτητα $v_1=5\text{m/s}$, σε λείο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερη σφαίρα B, ίσης ακτίνας και μάζας $M=4\text{kg}$ η οποία είναι ακίνητη.



i) Να αποδείξετε ότι κάποια στιγμή t_1 στη διάρκεια της κρούσης μηδενίζεται η ταχύτητα της A σφαίρας.

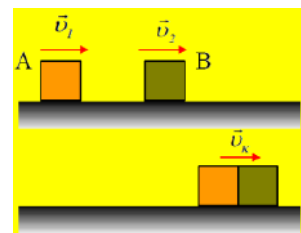
ii) Πόση είναι η μείωση ΔK της κινητικής ενέργειας του συστήματος, τη στιγμή t_1 ;

iii) Τι ποσοστό της κινητικής ενέργειας της A σφαίρας, μεταφέρεται τελικά στην σφαίρα B;

iv) Ποιες οι αντίστοιχες απαντήσεις στα παραπάνω ερωτήματα, αν η B σφαίρα, πριν την κρούση κινείται στην ίδια ευθεία με αντίθετη φορά με ταχύτητα, μέτρου $|v_2|=1,25\text{m/s}$, όπως στο δεύτερο σχήμα;

15) Η ταχύτητα αυξάνεται ή μειώνεται;

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο και στην ίδια ευθεία, κινούνται δυο σώματα A και B με σταθερές ταχύτητες v_1 και v_2 , προς την ίδια κατεύθυνση, όπως στο σχήμα. Μετά την πλαστική μεταξύ τους κρούση, το συσσωμάτωμα αποκτά ταχύτητα v_k .



i) Για τα μέτρα των ταχυτήτων, πριν την κρούση, ισχύει:

$$\alpha) v_1 < v_2, \quad \beta) v_1 = v_2, \quad \gamma) v_1 > v_2.$$

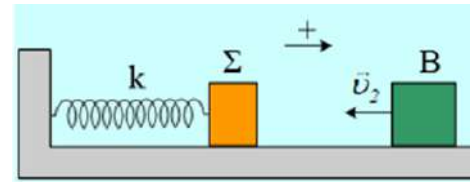
ii) Υποστηρίζεται η άποψη ότι η ταχύτητα του σώματος B αυξάνεται μετά την κρούση. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό, χωρίς να καταφύγετε σε μαθηματική απόδειξη;

iii) Να αποδείξετε (με χρήση μαθηματικών σχέσεων) ότι $v_k > v_2$.

iv) Πώς συμβιβάζονται τα παραπάνω, με την άποψη ότι κατά την πλαστική κρούση, μεταξύ δύο σωμάτων, έχουμε απώλεια κινητικής ενέργειας;

16) Μια πλαστική κρούση και δύο ταλαντώσεις

Ένα σώμα Σ εκτελεί αατ, δεμένο στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=100\text{N/m}$ σε λείο οριζόντιο επίπεδο, με εξίσωση απομάκρυνσης $x=0,5\eta\mu(10t)$ (μονάδες στο S.I.). Τη χρονική στιγμή $t_1=11\pi/50\text{ s}$ το σώμα Σ συγκρούεται πλαστικά με ένα δεύτερο σώμα



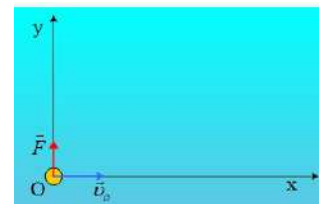
B , το οποίο κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $v_2=4/3\text{ m/s}$ (η προς τα δεξιά κατεύθυνση θεωρείται θετική), οπότε το συσσωμάτωμα ξεκινά μια νέα ταλάντωση με πλάτος $A_1=0,3\text{m}$.

- Να υπολογιστεί η μάζα του σώματος Σ , καθώς και η ταχύτητά του ελάχιστα πριν την κρούση.
- Να βρεθεί η μάζα του σώματος του σώματος B .
- Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο $x=f(t)$, για την ταλάντωση του συσσωματώματος.
- Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σώματος Σ , από τη στιγμή $t_0=0$, μέχρι τη στιγμή t_2 όπου ολοκληρώνεται μια πλήρης ταλάντωση του συσσωματώματος.

Δίνεται $\eta\mu(\pi/5)=0,6$.

17) Δυο ελαστικές κρούσεις

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο, στη θέση O , ηρεμεί μια σφαίρα A μάζας $m_1=2\text{kg}$. Σε μια στιγμή $t=0$ η σφαίρα δέχεται κτύπημα, με αποτέλεσμα να αποκτήσει αρχική ταχύτητα μέτρου $v_0=3\text{m/s}$, ενώ ταυτόχρονα δέχεται μια σταθερή δύναμη μέτρου $F=1\text{N}$, κάθετη στην αρχική ταχύτητα. Ας δεχτούμε το σημείο O ως αρχή ενός συστήματος αξόνων x,y όπου η αρχική ταχύτητα έχει την διεύθυνση του άξονα x

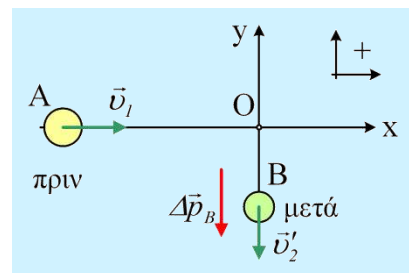


και η δύναμη την διεύθυνση του άξονα y , όπως στο σχήμα. Τη στιγμή $t_1=8\text{s}$, η σφαίρα A συγκρούεται ελαστικά με σφαίρα B , μάζας $m_2=3\text{kg}$, ενώ η δύναμη F συνεχίζει να ασκείται πάνω της και μετά την κρούση. Οι σφαίρες είναι λείες και δεν αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής, στη διάρκεια της κρούσης.

- Αν η κρούση είναι κεντρική, ενώ μετά την κρούση η σφαίρα A αποκτά μηδενική ταχύτητα:
 - Να βρεθεί η ταχύτητα της B σφαίρας, ελάχιστα πριν την κρούση.
 - Να βρεθεί η θέση της σφαίρας A την χρονική στιγμή $t_2=10\text{s}$.
- Αν μετά την κρούση η σφαίρα έχει ταχύτητα ίση με την αρχική της ταχύτητα v_0 :
 - Να βρεθεί η ελάχιστη ταχύτητα της B σφαίρας, λίγο πριν την κρούση.
 - Να βρεθεί η θέση της σφαίρας A την χρονική στιγμή $t_2=10\text{s}$.
- Να συγκριθούν τα έργα της δύναμης F , από $0-t_1$ και της δύναμης που ασκήθηκε στην A σφαίρα κατά την κρούση.

18) Η σφαίρα ήταν ακίνητη;

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα $\vec{v}_1$ μια σφαίρα Α και σε μια στιγμή, συγκρούεται με δεύτερη σφαίρα Β, στην θέση Ο. Το σημείο Ο το λαμβάνουμε ως αρχή ενός οριζόντιου συστήματος αξόνων xy, οπότε η Α σφαίρα αρχικά κινείται πάνω στον άξονα x, προς την θετική κατεύθυνση, ενώ μετά την κρούση, η σφαίρα Β, κινείται πάνω στον άξονα y, προς την αρνητική κατεύθυνση. Δίνεται



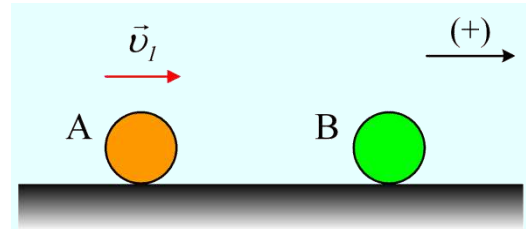
ακόμη ότι η μεταβολή της ορμής $\Delta \vec{p}_B$ της σφαίρας Β, η οποία οφείλεται στην κρούση, έχει την ίδια κατεύθυνση με την τελική ταχύτητα $\vec{v}'_2$, όπως στο διπλανό σχήμα.

- i) Ποια είναι η κατεύθυνση της μεταβολής της ορμής της Α σφαίρας, που οφείλεται στην κρούση;
- ii) Η σφαίρα Β ήταν ακίνητη ή όχι πριν την κρούση;
- iii) Αν η σφαίρα Β έχει μάζα 1 kg και τελική ταχύτητα μέτρου 1 m/s , ενώ $\Delta p_B = -3\text{ kgm/s}$, να υπολογισθεί η ταχύτητά της πριν την κρούση.

Ασκήσεις 2023-24

19) Κεντρικές ελαστικές κρούσεις

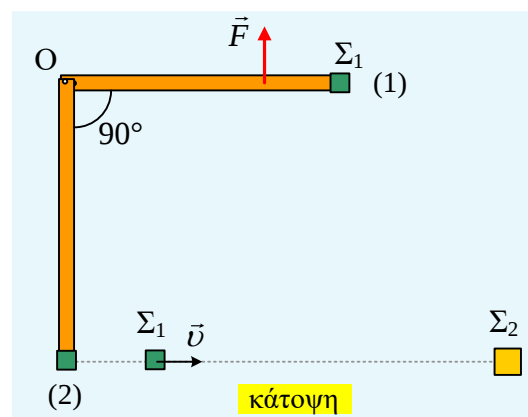
Δυο μικρές σφαίρες A και B, με ίσες ακτίνες και με μάζες $m_1=3m$ και $m_2=m$ κινούνται στην ίδια ευθεία σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Η σφαίρα A κινείται προς τα δεξιά (όπου ορίζουμε την θετική κατεύθυνση) με σταθερή ταχύτητα $v_1=4\text{m/s}$ και κάποια στιγμή συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με την σφαίρα B.



- i) Ποια η μέγιστη ταχύτητα με κατεύθυνση προς τα δεξιά, που μπορεί να έχει η B σφαίρα, ώστε να έχουμε κρούση μεταξύ των δύο σφαιρών;
- ii) Να βρείτε μια σχέση που να δίνει την ταχύτητα της σφαίρας A μετά την κρούση, σε συνάρτηση με την ταχύτητα της σφαίρας B, πριν την κρούση, κάνοντας και την γραφική της παράσταση ($v_1' = f(v_2)$). Στο διάγραμμα να σημειωθούν χαρακτηριστικές τιμές για τις ταχύτητες των δύο σφαιρών.
- iii) Να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας B v_2 πριν την κρούση, αν η σφαίρα A χάνει το 75% της κινητικής της ενέργειας κατά την κρούση.
- iv) Να βρεθεί η κινητική ενέργεια της B σφαίρας μετά την κρούση, αν κατά την κρούση η σφαίρα A χάνει το 100% της κινητικής της ενέργειας, ενώ $m=1\text{kg}$.

20) Περιστροφή ράβδου και μια κρούση υλικών σημείων

Η ράβδος του σχήματος, μήκους $l=2\text{m}$ μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο, γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της O, ενώ στο άλλο της άκρο έχει προσκολληθεί ένα σώμα Σ_1 , μάζας $m_1=1\text{kg}$. Η ράβδος είναι αρχικά ακίνητη στη θέση (1), ενώ τη στιγμή $t=0$, δέχεται κατάλληλη δύναμη F , η ροπή της οποίας, της προσδίδει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Μόλις η ράβδος περνά από την θέση (2) για δεύτερη φορά, το σώμα Σ_1 αποκολλάται και στη συνέχεια κινείται ευθύγραμμα στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και αφού διανύσει απόσταση $d=3,5\text{m}$, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά, με ένα σώμα Σ_2 , μάζας $m_2=2\text{kg}$, το οποίο είναι ακίνητο. Τελικά τα δυο σώματα ηρεμούν, απέχοντας μεταξύ τους απόσταση $S=2,5\text{m}$. Να υπολογιστούν:



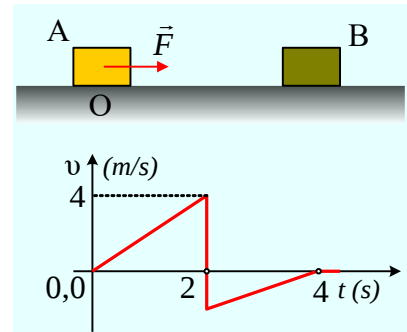
- i) Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων, αμέσως μετά την ελαστική μεταξύ τους κρούση.
- ii) Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 , την στιγμή που αποχωρίζεται τη ράβδο.
- iii) Η χρονική στιγμή t_1 της αποκόλλησης του σώματος Σ_1 .

- iii) Η επιτάχυνση του σώματος Σ_1 ελάχιστα πριν την αποκόλλησή του από την ράβδο, στην διεύθυνση της ταχύτητας. Ποια η αντίστοιχη επιτάχυνση στην κάθετη διεύθυνση;

Δίνεται η γωνία $\varphi=90^\circ$, που σχηματίζουν οι δυο παραπάνω θέσεις της ράβδου (1) και (2), οι διαστάσεις των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 θεωρούνται αμελητέες, ενώ ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του επιπέδου $\mu=0,1$. Εξάλλου $g=10\text{m/s}^2$.

21) Τι να την κάνουμε τη ζυγαριά;

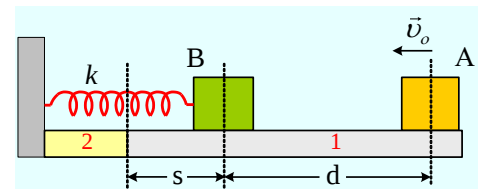
Σε οριζόντιο επίπεδο ηρεμούν δύο σώματα A και B τα οποία εμφανίζουν με το επίπεδο, τον ίδιο συντελεστή τριβής ολίσθησης. Σε μια στιγμή $t=0$, ασκείται στο σώμα A μια οριζόντια δύναμη μέτρου $F=1,2\text{N}$, με κατεύθυνση προς το σώμα B, με το οποίο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά, ενώ ταυτόχρονα παύει να ασκείται πάνω του η δύναμη F. Το σώμα A σταματά τελικά σε απόσταση $d_1=2\text{m}$, από την αρχική του θέση O, ενώ στο διάγραμμα δίνεται η ταχύτητά του, σε συνάρτηση με το χρόνο.



- Να υπολογιστεί η μάζα m_1 του σώματος A.
- Ποια η ταχύτητα του A σώματος, αμέσως μετά την κρούση;
- Να βρεθεί η μάζα του B σώματος.
- Ποια η τελική απόσταση d_2 μεταξύ των δύο σωμάτων, όταν ακινητοποιηθούν ξανά;

22) Μια κρούση και η κίνηση σε δύο επίπεδα.

Σε μη λείο οριζόντιο επίπεδο (1) ηρεμούν δύο σώματα A και B, ίσης μάζας $m=2\text{kg}$, τα οποία θεωρούμε υλικά σημεία αμελητέων διαστάσεων, απέχοντας κατά $d=1,2\text{m}$, όπου το δεύτερο είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=8\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό του μήκος. Σε μια στιγμή εκτοξεύεται το σώμα A, με αρχική ταχύτητα $v_0=4\text{m/s}$, προς το σώμα B, όπως στο σχήμα. Ο συντελεστής τριβής μεταξύ του σώματος A και του επιπέδου είναι $\mu_1=0,5$. Μετά από λίγο τα σώματα συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά, με αποτέλεσμα το B να αρχίζει να συμπιέζει το ελατήριο. Μόλις το ελατήριο συμπιεστεί κατά $s=0,4\text{m}$, το σώμα B, έχοντας ταχύτητα $u=0,6\text{m/s}$, περνά σε ένα δεύτερο λείο οριζόντιο επίπεδο (2), στο οποίο κινείται.



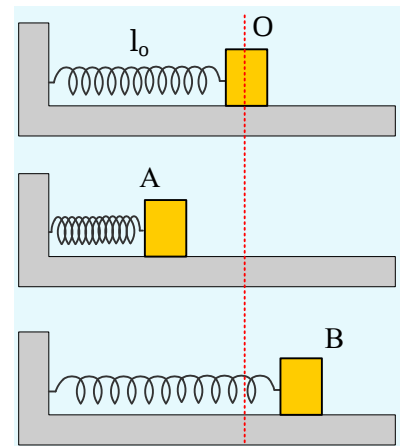
Να βρεθούν:

- Οι ταχύτητες των δύο σωμάτων μετά την μεταξύ τους κρούση.
- Η τριβή που δέχεται το B σώμα από το επίπεδο 1.
- Η μέγιστη επιτάχυνση του σώματος B, στη διάρκεια της κίνησής του στο λείο επίπεδο 2.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

23) Κίνηση στο άκρο ελατηρίου και μια κρούση

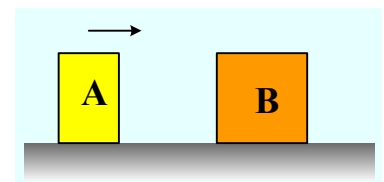
Ένα σώμα Σ μάζας $m=0,2\text{kg}$ ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k=20\text{N/m}$, το οποίο έχει το φυσικό μήκος του (θέση O). Εκτρέπουμε το σώμα προς τα αριστερά, συμπιέζοντας το ελατήριο κατά $d_1=0,4\text{m}$, φέρνοντάς το στην θέση A και το αφήνουμε να κινηθεί. Παρατηρούμε ότι το σώμα κινείται προς τα δεξιά και φτάνει μέχρι την θέση B, όπου η απόσταση $(OB)=d_2=0,3\text{m}$. Στην θέση B μηδενίζεται στιγμιαία η ταχύτητα του σώματος.



- Να αποδείξετε ότι το επίπεδο δεν είναι λείο και να υπολογίσετε την τριβή ολίσθησης που ασκείται στο σώμα.
- Να κάνετε την γραφική παράσταση της επιτάχυνσης του σώματος, σε συνάρτηση με την μετατόπιση του σώματος, στην διάρκεια της παραπάνω κίνησης, θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική.
- Ποια είναι η μέγιστη κινητική ενέργεια που αποκτά το σώμα στη διάρκεια της παραπάνω κίνησης;
- Τη στιγμή που το σώμα φτάνει στην θέση B, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με δεύτερο σώμα Σ' μάζας $0,5\text{kg}$, το οποίο κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $u=2,8\text{m/s}$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του σώματος Σ, την στιγμή που φτάνει ξανά στην θέση A.

24) Δυο παραλλαγές στο ίδιο θέμα

Ένα σώμα A μάζας $m_1=0,1\text{kg}$ το οποίο κινείται σε οριζόντιο επίπεδο, συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα B, μάζας $m_2=0,3\text{kg}$, έχοντας ταχύτητα v_1 . Δίνεται ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ των σωμάτων και του επιπέδου $\mu=0,2$.



- Αν $v_1=4\text{m/s}$, να υπολογιστεί η απόσταση που θα διανύσει το σώμα B, μετά την κρούση, μέχρι να σταματήσει.
- Σε μια επανάληψη του πειράματος, η τελική απόσταση των δύο σωμάτων, μετά την κρούση, είναι $4,5\text{m}$. Να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής του A σώματος, στην διάρκεια της κρούσης.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

dmargaris@gmail.com