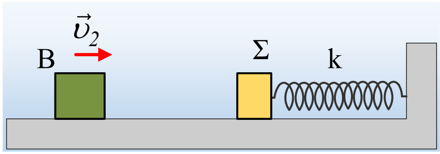
Κάποια μέγιστα και ελάχιστα μετά από κρούση



Ένα σώμα Σ μάζας m_1=3kg εκτελεί ΑΑΤ, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου, σε λείο οριζόντιο επίπεδο με εξίσωση:

$$x=0,2\cdot ημ(10t) \quad (S.I.)$$

Ένα δεύτερο σώμα Β, μάζας m_2=1kg κινείται κατά μήκος του άξονα του ελατηρίου με ταχύτητα υ_2=4m/s, πλησιάζοντας το Σ, με το οποίο κάποια στιγμή συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά.

i) Να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ, πριν την κρούση.

ii) Αν η κρούση πραγματοποιείται τη στιγμή που το Σ περνά από την θέση ισορροπίας του, να υπολογιστεί η ενέργεια ταλάντωσής του μετά την κρούση.

iii) Μήπως αν η κρούση γίνει σε θέση πλάτους, έχουμε μεγαλύτερη ενέργεια ταλάντωσης, μετά την κρούση;

iv) Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ, μετά την κρούση. Ποια η ταχύτητα του σώματος Σ, ελάχιστα πριν και αμέσως μετά την παραπάνω κρούση;

Απάντηση:

Το σώμα ταλαντώνεται με σταθερά επαναφοράς:

$$D = k = m_1\omega^2 = 3\cdot 10^2\, N/m = 300N/m$$

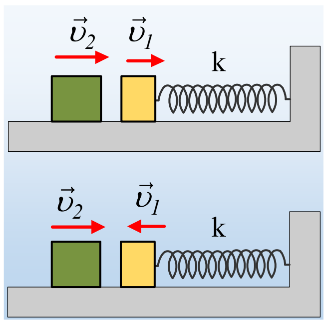
i) Η αρχική ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ είναι:

$$E_0 = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}300\cdot 0,2^2\, J = 6J$$

ii) Τη στιγμή που το σώμα Σ περνά από την θέση ισορροπίας του έχει μέγιστη κατά μέτρο ταχύτητα:

$$\upsilon_1 = \upsilon_{max} = \omega\cdot A = 10\cdot 0,2m/s = 2m/s$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:



α) Τα δυο σώματα κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση (προς τα δεξιά), τότε μετά την κρούση το Σ αποκτά ταχύτητα:

$$\upsilon'_{1,1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 \rightarrow$$

$$\upsilon'_{1,1} = \frac{3-1}{3+1}2m/s + \frac{2\cdot 1}{3+1}4m/s = 3m/s$$

Οπότε η νέα ενέργεια ταλάντωσης είναι:

$$E_1 = \frac{1}{2}DA_1^2 = \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_{1,1} = \frac{1}{2}3\cdot 3^2\, J = 13,5J$$

β) Τα σώματα κινούνται αντίθετα, όπως στο κάτω σχήμα:

$$\upsilon'_{1,2}=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2\rightarrow$$

$$\upsilon'_{1,2}=\frac{3-1}{3+1}(-2)m/s+\frac{2\cdot 1}{3+1}4m/s=1m/s$$

Αλλά τότε για την ενέργεια ταλάντωσης θα έχουμε:

$$E_2=\frac{1}{2}DA_2^2=\frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_{1,2}=\frac{1}{2}3\cdot 1^2J=1,5J$$

Αν συγκρίνουμε τις ενέργειες αυτές με την αρχική ενέργεια E_0, βλέπουμε ότι στην πρώτη περίπτωση το σώμα Σ κέρδισε ενέργεια 13,5J-6J=7,5J, από την κρούση, ενώ την δεύτερη φορά έχασε ενέργεια 6J-1,5J=4,5J, η οποία μεταφέρθηκε στο σώμα Β.

iii) Αν η κρούση γίνει σε θέση πλάτους ($x=\pm A$), τότε το σώμα Σ έχει μηδενική ταχύτητα, οπότε μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα:

$$\upsilon'_{1,3}=\frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon_2=\frac{2\cdot 1}{3+1}4m/s=2m/s$$

Οπότε η ενέργεια ταλάντωσής του παίρνει τιμή:

$$E_3=\frac{1}{2}Dx^2+\frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_{1,3}=\frac{1}{2}DA_0^2+\frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_{1,3}\rightarrow$$

$$E_3=6J+\frac{1}{2}3\cdot 2^2J=12J$$

Βλέπουμε ότι τώρα η ενέργεια ταλάντωσης αυξήθηκε, αλλά λιγότερο από ότι στην α) περίπτωση που η κρούση έγινε στη θέση ισορροπίας.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να δουλέψουμε με βάση την ενέργεια του Β σώματος. Μετά την κρούση αποκτά ταχύτητα:

$$\upsilon'_{2,3}=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2=\frac{1-3}{3+1}4m/s=-2m/s$$

Αλλά τότε έχασε κινητική ενέργεια (η οποία μεταφέρθηκε στο σώμα Σ):

$$\Delta K_2=\frac{1}{2}m_2\upsilon_2^2-\frac{1}{2}m_2\upsilon'^2_{2,3}=\frac{1}{2}1\cdot 4^2J-\frac{1}{2}1\cdot 2^2J=6J\rightarrow$$

$$E_3=E_0+\Delta K_2=6J+6J=12J$$

iv) Με βάση την «εναλλακτική» παραπάνω λύση, η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος Σ θα γίνει μέγιστη, όταν, μέσω της κρούσης, κερδίσει την μέγιστη δυνατή κινητική ενέργεια, από το σώμα Β. Όμως για την ταχύτητα του Β, μετά την κρούση έχουμε:

$$\upsilon'_B=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon_2=\frac{2\cdot 3}{3+1}\upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(10t)+\frac{1-3}{3+1}4\rightarrow$$

$$\upsilon'_B = \frac{2 \cdot 3}{4} 2\sigma\upsilon\nu(10t) - 2 = 3\sigma\upsilon\nu(10t) - 2$$

Και η κινητική του ενέργεια, μετά την κρούση, θα γίνει ελάχιστη, όταν αποκτήσει την ελάχιστη **κατά μέτρο**, ταχύτητα, η οποία είναι μηδενική, οπότε:

$$3\sigma\upsilon\nu(10t) - 2 = 0 \rightarrow \sigma\upsilon\nu(10t) = \frac{2}{3}$$

Κατά συνέπεια, αν γίνει η κρούση στη θέση που συν(10t)=2/3, τότε η ενέργεια ταλάντωσης του Σ μετά την κρούση, θα είναι ίση:

$$E_{Max} = E_0 + K_2 = 6J + \frac{1}{2} 1 \cdot 4^2 J = 14J$$

Ελάχιστα πριν την κρούση, το σώμα Σ είχε ταχύτητα:

$$\upsilon_1 = \upsilon_{max}\sigma\upsilon\nu(10t) = 2 \cdot \frac{2}{3} m/s = \frac{4}{3} m/s$$

Ενώ μετά την κρούση έχει ταχύτητα:

$$\upsilon'_\Sigma = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}\upsilon_2 = \frac{3-1}{3+1} \cdot \frac{4}{3} m/s + \frac{2 \cdot 1}{3+1} 4m/s = \left(\frac{2}{3} + 2\right) m/s = \frac{8}{3} m/s$$

Σχόλιο:

Γνωρίζοντας την ταχύτητα του Σ πριν και μετά την κρούση, θα μπορούσαμε να βρούμε την τελική ενέργεια ταλάντωσης εναλλακτικά, στο τελευταίο ερώτημα:

$$E_{max} = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_\Sigma = E_0 - \frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2 + \frac{1}{2}m_1\upsilon'^2_\Sigma \rightarrow$$

$$E_{max} = 6J - \frac{1}{2} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2 J + \frac{1}{2} 3 \cdot \left(\frac{8}{3}\right)^2 J = 14J$$

dmargaris@gmail.com