מדריך מקוצר למעבדה בפיזיקה

מני שי

תוכן

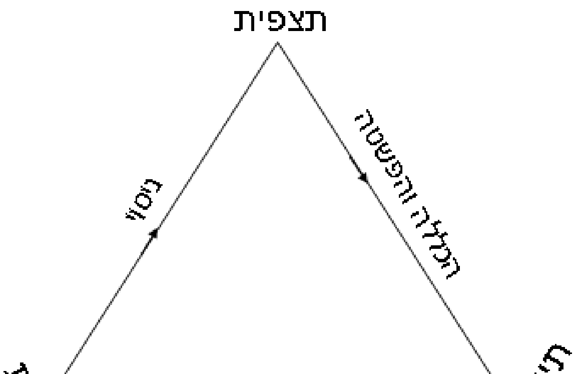
הערה

מדריך זה אינו בא להחליף לימוד מעמיק בעזרת ספר לימוד, למשל
"An Introduction to Error Analysis" by John R. Taylor

הקדמה

מטרתו של המדע היא למצוא תיאור מופשט של המציאות באמצעותו ניתן לנבא תוצאות של אירועים. את התהליך המדעי המודרני ניתן לתאר באמצעות ציור 1:

את ההתבוננות בציור, כמו גם את התהליך המדעי ניתן להתחיל מכל אחד מקודקודי המשולש. נתחיל מן התצפית. התצפית מובילה, באמצעות הכללה והפשטה[*] לניסוחה של תיאוריה[†]. התיאוריה, בעזרת מודל, מספקת תחזית. באמצעות הניסוי ניתן לערוך תצפית. אם התחזית התממשה התיאוריה קבלה חיזוק, ואם התחזית לא התממשה אז באחד השלבים



ציור 1: מהו מדע?

[*] הכללה היא התהליך בו מחפשים את הכלל. הפשטה היא התהליך בו משתמשים באובייקטים פשוטים במקום מציאותיים.

[†] תיאוריה פירושה כאן – תיאור של המציאות ולא כפי שנהוג בשפת היום יום: טענה שדרושה לה הוכחה

בתהליך, כלומר, בתיאוריה, במודל, או בניסוי, יש משהו שגוי.

הניסוי, אם כך, הוא חלק בלתי נפרד מן התהליך המדעי. מטרתו לבדוק ולהכריע, האם תיאוריה המונחת לפנינו נכונה או לא.
בלב ליבו של התהליך נמצאת ההשוואה בין שני גדלים. למשל, גודל אותו מדדנו בניסוי והגודל החזוי, אותו סיפקה התיאוריה. על מנת לדעת איך להסיק מסקנות מניסוי, צריך לדעת להשוות בין גדלים.
במדריך קצר זה ננסה ללמוד כיצד עושים זאת.

כיצד הניסוי יכול לקבוע נכונות של תיאוריה? או איך משווים בין שני גדלים?

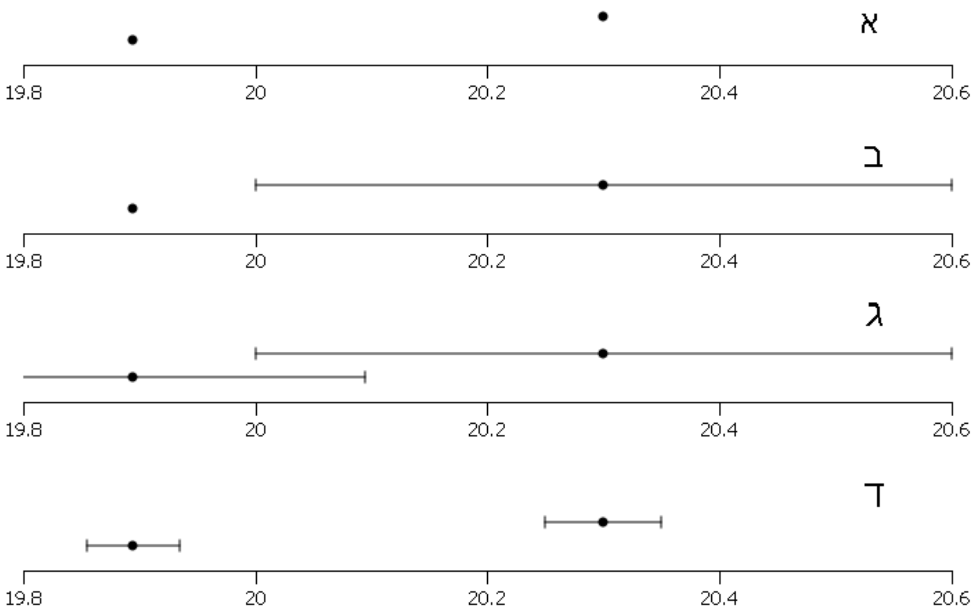
כדי לענות על השאלה איך ניסוי בודק תיאוריה צריך להבין איך משווים בין שני גדלים.

אזהרה: הפסקה הבאה עלולה להיות משעממת. ניתן לדלג עליה ולהגיע ישירות ל-"מסקנה חשובה מאד"

האם 19.8944 שווה ל 20.3? התשובה היא כמובן, לא. אך השאלה היא חסרת כל משמעות, אם המספרים המושווים מייצגים תוצאת מדידה. השאלה המשמעותית היא האם שני הגדלים 19.8944 ו 20.3 מייצגים תוצאות זהות, או מתאימות זו לזו, של שתי מדידות שונות? לא ניתן לענות על שאלה זו ללא התייחסות למושג חשוב שהוא אי-הוודאות במדידה. עבור מושג זה נטבע המינוח **שגיאת המדידה**.

נציג זאת באמצעות דוגמא דמיונית. נניח כי איש אחד, שנקרא לו התיאורטיקן, **חישב** ומצא על סמך תיאוריה כלשהי כי מרחק העצירה של מכונית על כביש ממהירות התחלתית של 50קמ"ש, בתנאים מסוימים הוא $19.8944m$ (התיאורטיקן מוכן למסור את תוצאת החישוב שלו אפילו בדיוק יותר גבוה). כדי לבדוק באמצעות ניסוי את נכונות התיאוריה, איש אחר, שנקרא לו הניסיונאי, עורך ניסוי בו הוא מנסה לקיים את כל התנאים המסוימים אליהם כיוון התיאורטיקן ובו הניסיונאי **ימדוד** את מרחק העצירה מן המהירות האמורה. נניח כי תוצאת הניסוי היא שמרחק העצירה האמור הוא $20.3m$. מה פירוש הדבר? ודאי ש $20.3 \neq 19.8944$ (ראה ציור 2 א') כלומר, החישוב לא תואם את המדידה? ואם תוצאת המדידה הייתה $19.9m$? אבל גם $19.8944 \neq 19.9$. צריך להבין כי בצורה כזו אין אפשרות לקבוע האם הניסוי תואם לחישוב או שלא. מה חסר? לכל גודל מדוד יש אי-וודאות בערכו שנקראת שגיאת מדידה. שגיאת המדידה נובעת מן העובדה שלא ניתן, בשום אמצעי למדוד משהו בדיוק אינסופי. שגיאת המדידה היא אינפורמציה חשובה לא פחות מן הערך של הגודל המדוד. אם נחזור לדוגמא, הניסיונאי דיווח כי תוצאת המדידה שלו היא $20.3m$ ושגיאת המדידה היא $0.3m$. כעת ניתן לערוך השוואה בת משמעות בין הערך המדוד לערך התיאורטי, והיא מוצגת בציור 2 ב'. המסקנה במקרה זה תהיה כי אין התאמה בין המדידה והחישוב. דבר נוסף שיש להביא בחשבון, עם זאת, הוא כי המרחק אותו חישב התיאורטיקן מבוסס על גדלים מדודים אותם מדד הניסיונאי, למשל המהירות ההתחלתית של 50קמ"ש. הניסיונאי יכול להגיד כי המהירות ההתחלתית שנמדדה היא 50קמ"ש עם שגיאת מדידה של 1קמ"ש. כעת על התאורטיקן למצוא מהו התחום האפשרי של מרחקי עצירה הנובע מן התחום האפשרי של המהירות ההתחלתית. לתהליך זה נקרא "גלגול שגיאת המדידה לגודל מחושב" או "חישובי שגיאה" ונחזור אליו בהמשך. כעת נניח כי התיאורטיקן חזר ומצא כי מרחק העצירה המתאים הוא $19.8944m$ עם סטייה אפשרית של $0.2m$ לכל כיוון, בגלל אי הוודאות במהירות ההתחלתית (עכשיו אין כבר משמעות לכל הספרות בחישוב של התיאורטיקן ומוטב לו יציג את תוצאת

החישוב כ $19.9\pm0.2\mathrm{m}$) . כעת ניתן לומר כי במקרה זה יש התאמה בין החישוב והניסוי. ניתן לרשום זאת כך: $19.9\mathrm{m}\pm0.2=20.3\pm0.3$ או שניתן להציג זאת בצורה גראפית ע"י שימוש ב error-bars כמו שרואים בציור 2 ג'. מן ההצגה הגרפית ניתן לראות כי יש חפיפה בין תחומי השגיאה של הגודל המחושב והמדוד, ומכאן שהם תואמים.
אם, הניסיונאי היה משפר את דיוק המדידה שלו, ומוצא שציור ד' מתאר את תוצאות המדידה שלו אז המסקנה היתה מתהפכת, שכן $19.89\mathrm{m}\pm0.04\neq20.30\pm0.05$.
כלומר, כאשר מבצעים מדידה, האינפורמציה המלאה על תוצאת המדידה היא לא רק הערך של תוצאת המדידה אלא גם השגיאה בערך זה.



ציור 2: א. השוואה חסרת משמעות. ב. השוואה בין ערך תיאורטי וערך מדוד, השגיאה בערך המדוד מיוצגת ע"י הקו האופקי. ג. השוואה בין שני גדלים המבוססים על מדידה. בהשוואה זו הגדלים תואמים כי יש חפיפה בין תחומי השגיאה שלהם. ד. השוואה בין גדלים המבוססים על מדידה. במקרה זה הגדלים אינם תואמים.

וכך אנו מגיעים ל

מסקנה חשובה מאד: כאשר משווים בין שני גדלים, חובה להתחשב באי-הוודאות בערכם של שני הגדלים. לאי וודאות זו נהוג לקרוא שגיאת המדידה.

נסכם, אם כן, כיצד הניסוי קובע נכונות של תיאוריה? כפי שראינו, אם משווים בין תוצאת הניסוי והתחזית, תוך התחשבות בשגיאת המדידה ניתן לקבוע אם יש התאמה בין שני הגדלים או אין. אם יש התאמה, הרי שהתיאוריה קיבלה חיזוק. ואם אין התאמה אזי ישנה בעיה (בתיאוריה, במודל, או בניסוי).

טעות היא לחשוב, שיש להלחם בשגיאת המדידה ולמצוא דרכים להקטין אותה ככל שניתן. כמובן, ככל ששגיאת המדידה היא קטנה יותר כך הניסוי הוא "חד" יותר ויכול להכריע בשאלות יותר עדינות, אולם, מרגע שהניסוי תוכנן ומכשירי המדידה ושיטת המדידה נבחרו, את שגיאת המדידה יש להכיר ויש לציין את ערכה לצד כל תוצאת מדידה. שגיאת המדידה היא הנותנת משמעות להשוואה בין גדלים פיזיקליים.
מה צריך לדעת על שגיאת-מדידה?

1- צריך להכיר בקיומה ובחשיבות של ידיעת ערכה

2- צריך לדעת איך להעריך את שגיאת המדידה, כלומר לדעת מה גודלה של השגיאה במדידה מסוימת.
3- צריך לדעת איך להציג את שגיאת המדידה.
4- צריך לדעת איך "לגלגל" שגיאות מדידה, כלומר איך שגיאה בגודל מחושב מושפעת מהשגיאות בגדלים עליהם החישוב מתבסס.
5- צריך לדעת איך להסיק מסקנות על סמך השוואה בין גדלים.

1. הכרה

תוצאה של מדידה איננה מספר אלא תחום.

2. הערכה

לפעמים דרושה מעט השקעה. לפעמים רק הכרות עם מכשירי המדידה. דרך אחת היא לחזור על המדידה מספר פעמים. הערכת השגיאה יכולה להיות ההפרש בין הערך הגבוה ביותר לממוצע או סטיית התקן. אם משתמשים במכשיר מדידה ספרתי אפשר להעריך את השגיאה ע"י מציאת הספרה היציבה הקטנה ביותר. במכשיר אנלוגי, הערכה סבירה יכולה להיות חצי המרחק בין השנתות.

3. הצגה

ישנן דרכים אחדות להציג תוצאת מדידה. נדגים. נניח שמדדנו אורך של מוט ברזל אותו נסמן ב L. נוכל להציג את התוצאה בדרכים הבאות

א. ע"י ציון תחום הערכים. $L=[12.3,12.5]\mathrm{cm}$
ב. ע"י ציון מרכז התחום ומחצית מרוחבו: $L=12.4\pm0.1\mathrm{cm}$
ג. ע"י ציון מרכז התחום והסטייה באחוזים: $L=12.4\mathrm{cm}\pm0.8\%$

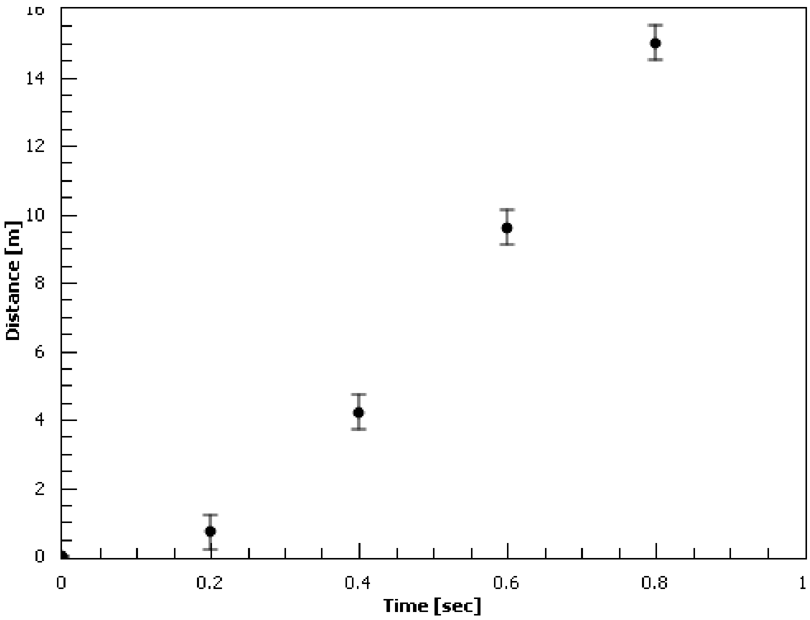
הערות:

- חשוב ביותר לציין את יחידות המידה של הגודל המוצג (נהוג בפונט לא נטוי).
- אין לרשום ספרות לא משמעותיות. לדוגמא, אם אי הוודאות היא $0.1\mathrm{cm}$ אז אין משמעות למאיות. צורה פסולה לדוגמא: $12.384\pm0.1\mathrm{cm}$. יש לעגל את הערך של מרכז התחום לספרה המשמעותית האחרונה.

הצגה גרפית

כאשר מציגים בגרף תוצאה של מדידה יש להשתמש ב error-bar. ה error-bar מציג את תחום הערכים הסביר לתוצאת המדידה. יתכן מקרה בו גודל השגיאה קטן מאד כך שגם אם נציג error-bar לא יראו אותו. במקרה זה צריך לציין בכיתוב שמתחת לגרף כי השגיאה קטנה מגודל הסמל. ראה ציור 3 לדוגמא. כל תוכנת מחשב ליצירת גרפים תומכת בציור של error-bar.

להסבר איך להוסיף error-bar ב 2016 MS-Excel הקש כאן



ציור 3: בכיתוב נציין מה מציג הגרף וכל מידע אחר שנרצה ונוסיף כי "בציר הזמן שגיאת המדידה קטנה מגודל הסמל"

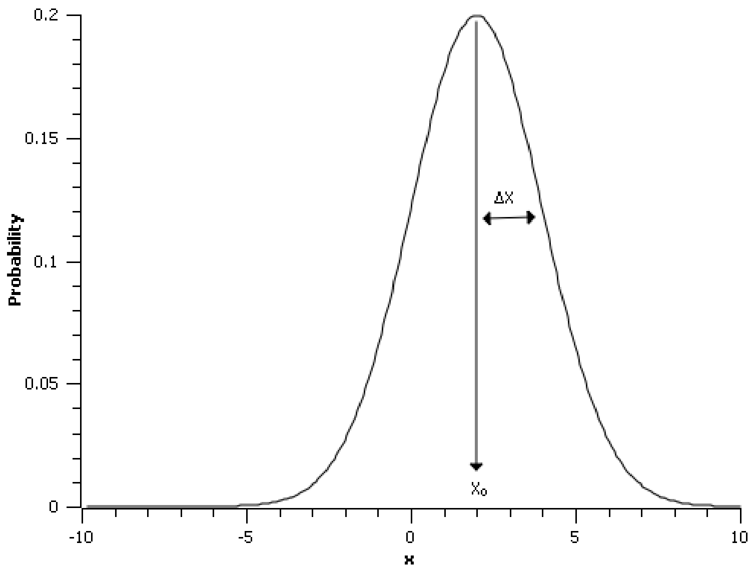
4. גלגול

נניח כי אנו רוצים למדוד שטח של בלטה המונחת לפנינו. הגודל אותו קל לנו למדוד הוא אורך הצלעות. נניח כי מדדנו, בעזרת סרגל, ומצאנו כי אורך הצלעות הוא $24.3 \pm 0.1\text{cm}$ ו $24.0 \pm 0.1\text{cm}$. את השטח אנחנו בעצם לא מודדים, אלא **מחשבים** באמצעות נוסחא. במקרה זה הנוסחא היא נוסחת שטח המלבן $S = ab$. הארגומנטים של הנוסחא, a ו b, הם גדלים מדודים ולכן מלווה אותם אי-וודאות. אי-וודאות זו מתגלגלת גם לגודל המחושב. איך נדע מהי אי-וודאות זו? בהמשך נוכיח נוסחא שימושית שעונה על שאלה זו שנקראת "נוסחת חישובי שגיאה". אבל גם בלעדיה ניתן לחשב את השטח הגדול ביותר הסביר, בדוגמא שלנו, $24.1 \times 24.4 = 588.04\text{cm}^2$ ואת השטח הקטן ביותר $23.9 \times 24.2 = 578.38\text{cm}^2$

עוד על שגיאת המדידה

התייחסות מתמטית לשגיאת המדידה

מבחינים בין שני סוגים של שגיאות, שגיאה שיטתית ושגיאה אקראית. בדיון להלן נתעניין בשגיאה האקראית. לשגיאה השיטתית נתייחס אח"כ. אם נמדוד גודל פיזיקלי כלשהו, בעזרת מכשיר מדידה כלשהו, מספר רב של פעמים נמצא כי כל התוצאות סובבות סביב ערך כלשהו, אך בכל מדידה מתקבלת תוצאה שונה במקצת. הניסיון מלמד (ואף ניתן לנמק זאת) כי תוצאת המדידה במקרים רבים מתנהגת כמו משתנה מיקרי בעל התפלגות גאוסיאנית (הנקראת גם התפלגות נורמלית או בלשון עממית, התפלגות פעמון), כלומר, עבור מדידה הסובבת סביב הערך X_0, הסיכוי שתוצאת המדידה תהיה בין x ל $x + dx$ הוא $P(x)dx = \frac{1}{\Delta X \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x - X_0)^2}{2\Delta X^2}} dx$. מבחינה מתמטית הגודל ΔX קובע את רוחב ההתפלגות והערך X_0 את מקום הפסגה (ראה ציור 3). אם נמדוד פעם אחת רוב הסיכויים כי נקבל תוצאה בתחום הערכים $X_0 \pm \Delta X$.



ציור 4: התפלגות גאוסיאנית של תוצאת המדידה.

כיצד נדע מהי שגיאת המדידה במדידה שלנו? דרך אחת היא לחזור על המדידה מספר פעמים, לחשב את ממוצע ההפרש בין המדידות השונות ולקרוא לממוצע זה הערכת השגיאה.
דרך שנייה היא לקרוא את עלון היצרן של מכשיר המדידה ולמצוא שם את שגיאת המדידה שלו. אם לא עושים זאת, אפשר להעריך את השגיאה ע"י ספרת הדיוק האחרונה (למכשיר סיפרתי) או המרחק בין שנתות למכשיר אנאלוגי.

הצטברות של גורמי שגיאה

אזהרה: בפסקה זו משתמשים במתמטיקה. ניתן לדלג על קריאתה להגיע ישירות ל"תוצאה חשובה מאד".

נניח כי אנחנו מודדים שתי מדידות של איזה שהוא גודל ומחברים ביניהם (למשל, יתכן שברשותנו סרגל באורך 30ס"מ ואנחנו מודדים בעזרתו משהו גדול יותר ע"י חיבור של שתי מדידות). מהי השגיאה המצטברת?

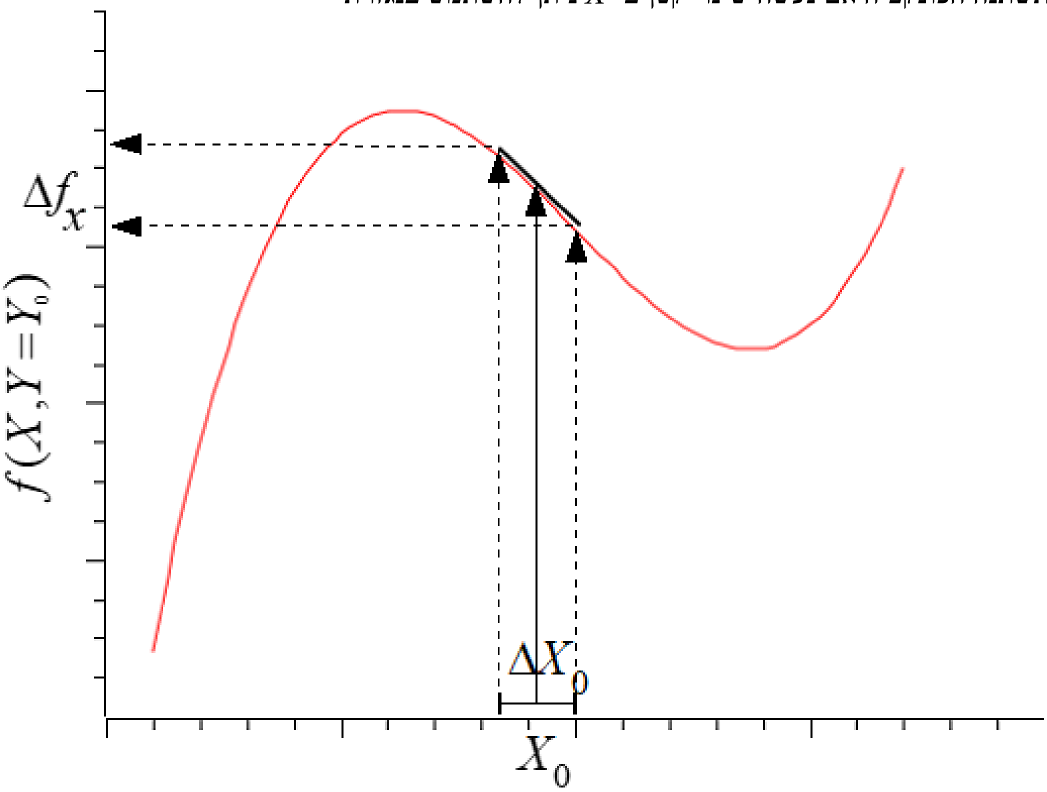
כדי לדון בבעיה זו הבה נסמן את פונקצית ההתפלגות של המדידה הראשונה ב $p_1(x)$ ונניח כי זוהי התפלגות גאוסיאנית שפסגתה x_1 והרוחב שלה Δx_1 ועבור המדידה השניה, נסמן את ההתפלגות ב $p_2(x)$ ונניח כי פסגתה x_2 ורוחבה Δx_2. נשאל מהו הסיכוי שתוצאת סכום המדידות תהיה X (נסמן זאת ב $P(X)$? ובכן, איך יקרה כי תוצאת סכום המדידות היא X? אם יתקבל ערך x במדידה הראשונה, נחוץ שיתקבל ערך $X-x$ בשנייה. כיוון שהמדידות הן בלתי תלויות הסיכוי לכך הוא מכפלת הסיכויים כלומר $p_1(x)\cdot p_2(X-x)$. כעת עלינו לסכום על כל ערכי x האפשריים. נקבל כי $P(X)=\int_{-\infty}^{\infty} p_1(x)\cdot p_2(X-x)dx$. לאינטגרל מסוג זה קוראים אינטגרל קונבולוציה. כשמכניסים את פונקצית הגאוסיאן ומתאמצים קצת, מקבלים כי הקונבולוציה של שני גאוסיאנים, גם היא גאוסיאן, שערך המקסימום שלו מתקבל ב x_1+x_2 והרוחב שלו הוא $\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2}$. ניתן להכליל זאת לכל מספר של שגיאות מצטברות ולקבל את ה**תוצאה החשובה מאד:** כאשר מחברים גורמי שגיאה של מדידות בלתי תלויות השגיאה המצטברת היא $\sqrt{\sum \Delta x_i^2}$.

נקודה זו חשובה במיוחד, למשל, עבור הניסוי בו נבדק הערך של אינטגרל המסלול של השדה האלקטרוסטטי על פני מסלול סגור. על פי התיאוריה אינטגרל זה נותן 0. מובן, שאף מדידה לא תתן ערך זה, וכשמשווים את תוצאת המדידה ל0, יש להתחשב בשגיאת המדידה, ומקרה זה השגיאה היא שגיאה מצטברת, שכן מחלקים את מסלול האינטגרציה למספר רב של חלקים ובכל חלק בו מודדים את הפרש הפוטנציאל על החלק קיימת שגיאת מדידה, ולכן בערך הסופי יש שגיאה מצטברת.

גלגול שגיאה לגודל מחושב (חישובי שגיאות)
אזהרה: בתוצאה של פסקה זו חייבים להשתמש. ולכן היא מופיעה בתוך מסגרת וורודה. כדאי לקרוא, להבין ולענות על הדוגמאות לחישוב עצמי שבסופה.

נתבונן בבלטה. נגיד שאנחנו רוצים למדוד את השטח שלה ובידנו סרגל. מה שנעשה יהיה למדוד את האורך של כל אחת מן הצלעות. את השטח **נחשב** בעזרת שתי מידות אלו. אנחנו יודעים מהי שגיאת המדידה שיש לנו במדידת האורך, ומובן ששגיאת מדידה זו תתבטא גם בערך שננקוב עבור שטח הבלטה. השאלה שעלינו לשאול כיצד "מתגלגלת" שגיאת המדידה מן הגודל המדוד (האורך של כל צלע) אל הגודל המחושב (השטח). בכל פעם שאנחנו מחשבים גודל כלשהו על סמך ערכים מדודים, השגיאה "מתגלגלת" אל הערך המחושב ויש לחשב את השגיאה, למשל בעזרת הנוסחא לחישובי שגיאות שנציג מייד.

נניח כי מדדנו את הגדלים X_0 ו Y_0 עם שגיאות מדידה ΔX_0 ו ΔY_0. אנו מעוניינים לדעת מהי השגיאה בגודל המחושב על ידי הפונקציה $f(X,Y)$ (אם נחזור לבלטה אז $f(X,Y)=XY$). כדי למצוא עד כמה תשתנה הפונקציה אם נעשה שינוי קטן ב X ניתן להשתמש בנגזרת



ציור 5

ניתן להתבונן בציור 4 בו מוצגת מידת אי הוודאות של הפונקציה $f(X,Y)$ כתלות ב ΔX_0 עבור פונקציה כלשהי שמתוארת ע"י הקו האדום. מתוך ההתבוננות בציור רואים כי מתקיים $\Delta f_x = \dfrac{df(X,Y=Y_0)}{dX}\Delta X_0$. ישנו סימון מיוחד לנגזרות של פונקציות בעלות מספר משתנים, כשמתייחסים רק להשתנות של אחד מהם. לסימון זה קוראים הנגזרת החלקית, ומסמנים $\dfrac{df(X,Y=Y_0)}{dX} = \left.\dfrac{\partial f}{\partial X}\right|_{Y=Y_0}$. באופן דומה קיימת שגיאה בערך של הפונקציה f הנובעת משגיאת המדידה בערך של Y. שגיאה זו היא $\Delta f_y = \left.\dfrac{\partial f}{\partial Y}\right|_{X=X_0}\Delta Y_0$. כעת, אם נקבל כי השגיאות ב X וב Y הן

בלתי תלויות ונשתמש בתוצאה שקבלנו עבור השגיאה המצטברת, נקבל כי השגיאה הכוללת ב f היא (נוסחת חישוב שגיאה):

$$\Delta f = \sqrt{\left(\left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{Y=Y_0} \Delta X_0 \right)^2 + \left(\left. \frac{\partial f}{\partial Y} \right|_{X=X_0} \Delta Y_0 \right)^2}$$

ניתן להכליל זאת לכל מספר של גורמי שגיאה.

נחזור לבלטה. במקרה זה X ו Y הם האורך והרוחב של הבלטה. פונקציית השטח היא $S = X \cdot Y$ לכן $\Delta S = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial X} \Delta X \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial Y} \Delta Y \right)^2} = \sqrt{(Y \Delta X)^2 + (X \Delta Y)^2}$, למשל אם $X = 20 \pm 0.5\text{cm}$ ו $Y = 30 \pm 0.5\text{cm}$ אז $\Delta S = \sqrt{(30 \cdot 0.5)^2 + (20 \cdot 0.5)^2} = 18\text{cm}^2$ ועל כן שטח הבלטה הוא $600 \pm 18\text{cm}^2$

דוגמאות לחישוב עצמי:

- נפח כדור הוא $V = \frac{4\pi}{3} r^3$ כש r הרדיוס. מדדו כי $r = 0.04 \pm 0.01\text{m}$ מהו הנפח שלו (ערך ושגיאה)
- מסת כדור אחיד $m = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho$ כש r הרדיוס ו ρ הצפיפות. מדדו כי $r = 0.43 \pm 0.02\text{m}$ ו $\rho = 2700 \pm 5 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ מהי מסת הכדור?
- השדה המגנטי של תיל נתון ע"י $B = 2 \cdot 10^{-7} \frac{I}{r}$ כש I הזרם באמפר ו r המרחק מן התיל במטר, מהו השדה (ערך ושגיאה) במרחק $r = 0.04 \pm 0.01\text{m}$ כשמזרימים בתיל זרם של $I = 0.5 \pm 0.1\text{A}$?
- תדירות התנודות של מתנד היא $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ מדדו ומצאו כי $k = 143.22 \pm 0.01 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ו $m = 0.875 \pm 0.002\text{kg}$. מהי תדירות התנודות?

שגיאה שיטתית

נחזור תחילה על הרעיון המרכזי מאחורי המושג שגיאה אקראית: לא ניתן למדוד גודל פיזיקלי בדיוק אינסופי, אם נערוך מספר מדידות זהות לחלוטין נגלה כי התוצאות שונות זו מזו. לסטיית התקן של אוסף מדידות זה קוראים השגיאה האקראית. שגיאה זו קיימת תמיד, בכל מדידה ויש להכיר אותה כדי להשוות בצורה משמעותית בין גדלים.

מנגד, השגיאה השיטתית איננה חלק בלתי נפרד מתהליך המדידה. לשגיאה השיטתית יש סיבה, ואם מוצאים אותה, ומבינים אותה יתכן כי (במחיר כזה או אחר) ניתן להפטר ממנה. השגיאה השיטתית יכולה לנבוע ממקורות שונים ובהם:

- שימוש בכלי מדידה לא מכויל (למשל סרגל, שהמרחק בין שני סימני סנטימטר בו איננו בדיוק סנטימטר). שגיאה מסוג זה יכולה להיות קשה לגילוי, והעדות המרכזית לה היא אי התאמה בתוצאה סופית לערכים המקובלים בסיפרות. לרוב, כלי מדידה מכוילים הם יקרים בהרבה מכלי מדידה שאינם מכוילים ובעת תכנון ניסוי יש להעדיף אותם כשהדבר מתאפשר. צריך להביא בחשבון את העדפה זו על התוצאה הסופית.

- תהליך מדידה בו יש מסיבה כלשהי העדפה לסטייה מסוימת בתוצאות. למשל מדידת זמן המבוססת על תגובה (של מכשיר או של אדם) יכולה להיות תמיד ארוכה יותר בגלל זמן התגובה.
- גורמים נוספים הקיימים במערכת הניסוי שלא נלקחו בחשבון בעת פיתוח נוסחת העבודה. לשגיאה מסוג זה יש השפעה על אופי התפלגות הסטייה בין תוצאת המדידה והערך המחושב (Residual plot).

בעת ציון גורמי השגיאה בדוח מעבדה יש להתייחס לגורמי השגיאה השיטתית בלבד. מותר בהתייחסות לקבוע כי לא נמצאו שגיאות שיטתית, או כי יש שגיאה שיטתית אולם מקורה איננו ברור, או, במקרה שיודעים, לציין מהו המקור של השגיאה השיטתית וכיצד ניתן לעשות את הניסוי טוב יותר.
בכל מקרה, משפטים כגון: גורמי השגיאה הם "מגבלות העין האנושית" וכדומה לאלו אסור שיופיעו בדוח מעבדה.

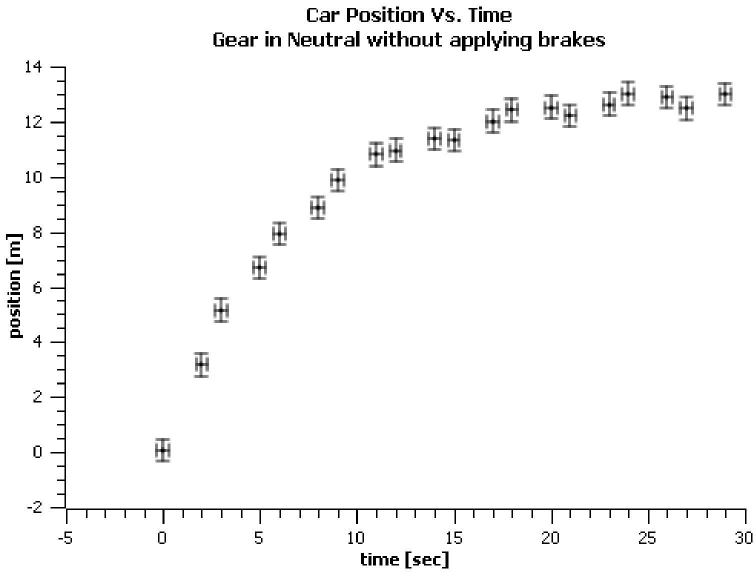
מדדים סטטיסטיים לטיב ההתאמה

ניתן לחשב את פרמטר טיב ההתאמה η בין שני גדלים $A \pm \Delta A$ ל $B \pm \Delta B$ ע"י $\eta = \frac{|A-B|}{\sqrt{\Delta A^2 + \Delta B^2}}$.

עבור גדלים תואמים הערך של η הוא בערך 1. ערך גדול משמעותית מ 1 מעיד על אי-התאמה וערך קטן משמעותית מ 1 מעיד על הערכת שגיאה לא הגיונית.

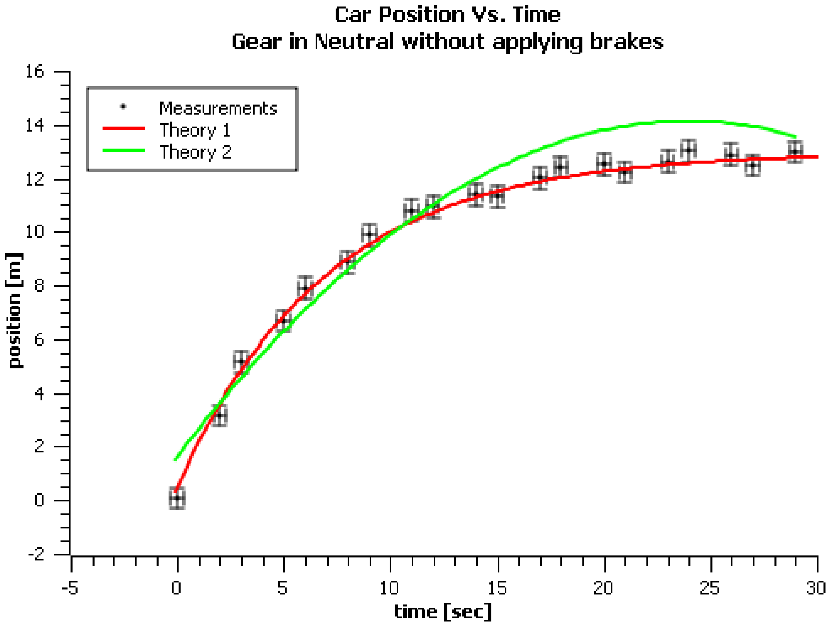
התאמה לפונקציה

ראינו כיצד ניתן לבדוק תיאוריה ע"י השוואה של ערך מחושב לערך מדוד. דרך טובה יותר לבדיקת תיאוריה היא ע"י השוואה של מספר רב של ערכים המשתנים לאורך תחום, כלומר בדיקת ההתאמה של תוצאות מספר מדידות לפונקציה. השוואה כזו ניתנת לביצוע אם התיאוריה מאפשרת פיתוח של נוסחא מתאימה (הנקראת נוסחת העבודה) הקושרת בין הגדלים השונים הניתנים למדידה. נסמן את נוסחת העבודה ב $y = f(x)$, כלומר, נניח כי אנחנו יכולים למדוד את הגודל x ואת הגודל y ובידינו תיאוריה לפיה הקשר בין גדלים אלו הוא הפונקציה הנ"ל. כעת מה שעלינו לעשות הוא למדוד מספר זוגות של (x_i, y_i) ולכל זוג כזה לבדוק האם יש התאמה בין y_i ל $f(x_i)$. כמובן, גם במקרה זה ההשוואה היא בעלת משמעות רק אם מתחשבים בשגיאת המדידה. כדי ללמוד לעשות התאמה לפונקציה עלינו לדון במספר דברים והראשון הוא אופן הצגת תוצאות המדידה באמצעות גרף.
נניח כי מדדנו מספר זוגות של ערכים (x_i, y_i) עם שגיאות מדידה ידועות של Δx_i ו Δy_i. דרך הצגת הגרף של תוצאות המדידה היא של נקודות עם צלבי שגיאה. בדוגמא מוצגת מדידה של מיקום מכונית כתלות בזמן בזמן עצירתה (הרוחב של ה"צלב" הוא Δx_i והאורך הוא Δy_i, כשאלו שגיאות המדידה).
אין לחבר בקו את נקודות המדידה.



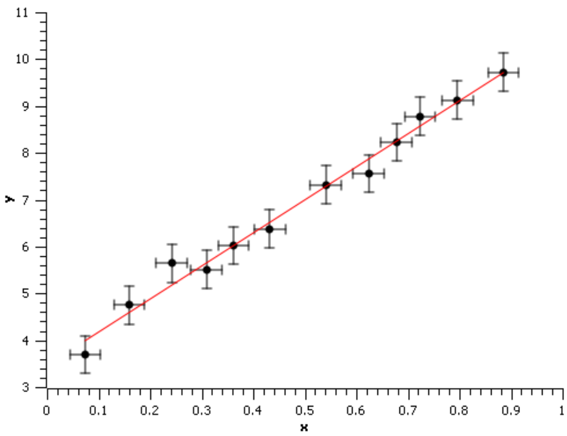
כעת נשרטט על אותו הגרף את הפונקציה התיאורטית. במקרים רבים בפונקציה התיאורטית יש מה שנקרא **פרטרים חופשיים**. אלו הם גדלים המופיעים בנוסחא שהתיאוריה לא יודעת להגיד לנו מהו ערכם. למשל, התיאוריה יכולה לומר שגודל y תלוי לינארית ב x אבל התיאוריה לא יודעת מה צריך להיות השיפוע. במקרה זה השיפוע הוא פרמטר חופשי. כשנשרטט את הפונקציה התיאורטית נבחר תחילה את הערכים של הפרמטרים החופשיים עבור ההתאמה תהיה מיטבית. את ההתאמה המיטבית ניתן לעשות בעזרת מחשב בעזרת תוכנות כמו אקסל או תוכנות שיותר מתאימות להתאמה מיטבית כמו scidavis (או matlab,maple,mathematica,,Mathcad,origin...) תוכנת המחשב יודעת להגיד לנו מהם הערכים של הפרמטרים עבורם ההתאמה מיטבית ומה הם ערכי השגיאה בפרמטרים אלו. ערכי השגיאה הם התחום בו סביר שערכו של הפרמטר נמצא, בהתחשב בשגיאת המדידה. בדרך כלל יש לפרמטרים המחולצים בדרך זו משמעות פיזיקלית, ומחילוץ ערכיהם (כולל שגיאה) ניתן ללמוד ולהסיק מסקנות.

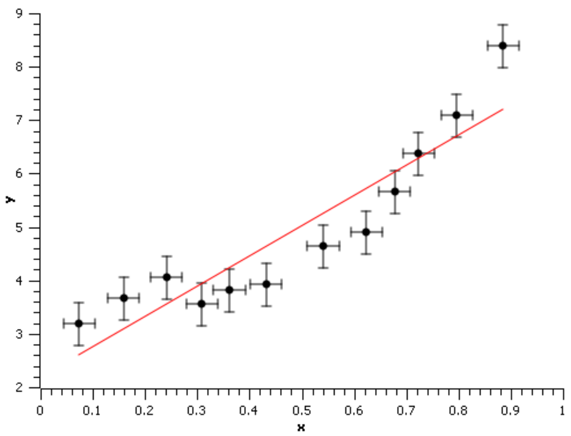
את הפונקציה התיאורטית המתאימה בצורה המיטבית לנקודות המדידה נשרטט בקו רציף, כשעושים זאת, ניתן באופן מיידי לענות על השאלה האם התיאוריה מתאימה לניסוי או לא.
למשל, נציג על גבי הגרף שתי התאמות תיאורטית



ניתן מתוך ההתבוננות בגרף להגיד כי תיאוריה 1, המוצגת ע"י הגרף האדום מתאימה היטב לתוצאות המדידה, ואילו תיאוריה 2, המוצגת ע"י הקו הירוק, איננה מתאימה.

בד"כ בניסויים שנעשה נבקש להציג את הקשר התיאורטי כקשר ליניארי, משום שהתאמה לינארית קל יותר לעשות, אולם יש להדגיש כי לא כל קשר ניתן להציג כתלות לינארית ולכן כדאי לדעת לעשות גם התאמות כלליות.
נציג לדוגמא שני גרפים באחד מהם הקשר הלינארי מתאר יפה את התוצאה ובשני לא.





נסכם אם כן: את תוצאות המדידה יש להציג כנקודות עם צלבי שגיאה עליהן. את התיאוריה יש להציג בקו רצוף. אם הקו הרצוף עובר יפה-יפה דרך צלבי השגיאה הרי שיש לפנינו התאמה טובה. ואם לא ההתאמה איננה טובה.

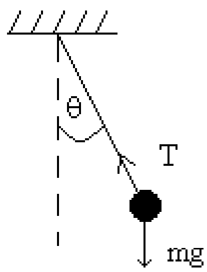
התכוננות לעריכת הניסוי: מה, איך ולמה.

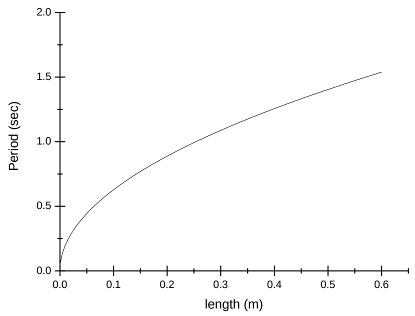
כשאתה מתכוון לערוך ניסוי עליך להיות מסוגל לענות על השאלות הבאות:

- מה הם הגדלים שאותם מודדים בניסוי, ובאמצעות אילו מכשירי מדידה? מהי שגיאת המדידה שלהם? האם מתוך הגדלים המדודים מחשבים גדלים אחרים לשם השוואה לתיאוריה? כיצד מתגלגלת השגיאה?
- מהי נוסחת העבודה, כלומר מהו הקשר שהתיאוריה מנבאה שקיים בין הגדלים אותם אתה מתכוון למדוד?
- כיצד ניתן לפתח את נוסחת העבודה מתוך העקרונות הבסיסיים ומהו המודל בו משתמשים לצורך הפיתוח הזה?
- כיצד תממש את המודל? כלומר מהם המרכיבים של מערכת הניסוי וכיצד הם דומים לבעיה עבורה הוצג הפיתוח התיאורטי?

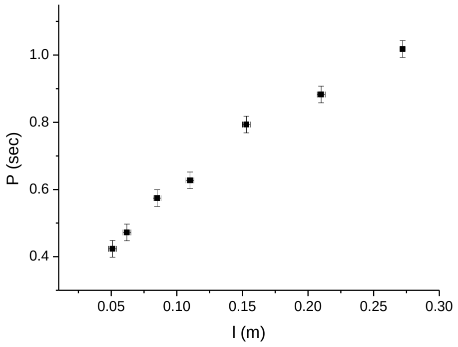
לעבודה זו קוראים דו"ח מכין. הדו"ח המכין הוא חשוב. בלי לדעת את התשובות, לא ניתן לערוך את הניסוי (מלבד החלק הראשון של השאלה השלישית). הניסיונאי חייב לדעת מה הוא מודד, איך הוא מודד ולמה הוא מודד.
הדו"ח המכין הוא גם הבסיס לדו"ח המסכם.
ולבסוף, נראה כיצב יש לערוך דו"ח מסכם.

מבנה דו"ח מעבדה – בליווי דוגמא

דרישות מהדו"ח	דוגמא
<u>שער</u> שם הניסוי שמות המגישים מחלקה למדריך תאריך הגשה	ניסוי המטוטלת. תאריך: מגישים: מהמחלקה: למדריך:
<u>הקדמה</u> מטרות הניסוי. מטרות הניסוי צריכות להיות מנוסחות במשפט: "בניסוי זה נמדוד את <u>Y</u> כתלות ב<u>X</u> ומתוך כך נחלץ את הערך של ____" . צריך לציין מהי המוטיבציה לביצוע הניסוי, מה עומד בבסיס של התיאוריה הנבדקת. ניתן לכלול גם רקע היסטורי.	<u>הקדמה</u> בניסוי זה נמדוד את זמן המחזור של מטוטלת כתלות באורך החוט. את תוצאות הניסוי נשווה לניבוי של המכאניקה הניוטונית. מתוך ניסוי זה ניתן לחלץ את תאוצת הכובד, g. למטוטלת יש שימושים, חלקם טכנולוגיים וכן היא מהווה מודל למערכות פיזיקליות רבות.
<u>רקע תיאורטי</u> יש לציין מהי התיאוריה הנבחנת. יש להציג תיאור של מודל המערכת הניסויית, לפתור אותו על פי התיאוריה, ולפתח את הפתרון עד לקבלת נוסחא המתארת את הקשר התיאורטי בין אותם Y ו X שהוצגו בהקדמה. אם הפיתוח של התיאוריה מסובך מידי ניתן לדלג עליו ולהציג את הנוסחא המקשרת בין Y ל X ללא הפיתוח. רצוי להציג את הנוסחא בגרף. לינאריזציה – את נוסחת העבודה ניתן לפעמים להציג כתלות לינארית בין Y לאיזושהי פונקציה של X. יש לעשות זאת ולהדגיש מהו השיפוע הצפוי ומהי נקודת החיתוך עם הציר עבור קשר לינארי זה.	<u>רקע תיאורטי</u> החוק השני של ניוטון קובע כי $\vec{F}=m\vec{a}$. המודל של הבעיה הוא מסה הקשורה לתקרה בחוט חסר מסה באורך l. נסמן ב θ את הזווית בין החוט לאנך. המסה משוחררת ממנוחה בזווית התחלתית θ_0.  0 המסה בתנועה מעגלית ולכן תאוצתה המשיקית היא $a_{\parallel}=l\ddot{\theta}$. נערוך תרשים כוחות על המסה ונמצא כי רכיב הכוח בכיוון המשיק הוא $-mg\sin\theta$. לכן עפ"י החוק השני של ניוטון $-mg\sin\theta=ml\ddot{\theta}$. זו משוואה דיפרנציאלית שכדי לפתור אותה נשתמש בקירוב לזוויות קטנות $\sin\theta\approx\theta$. בקירוב זה המשוואה היא $\ddot{\theta}=-\frac{g}{l}\theta$. פתרונה הוא $\theta(t)=\theta_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t\right)$. הזווית משתנה אם כן באופן מחזורי. זמן המחזור, T , הוא הזמן בו הזווית

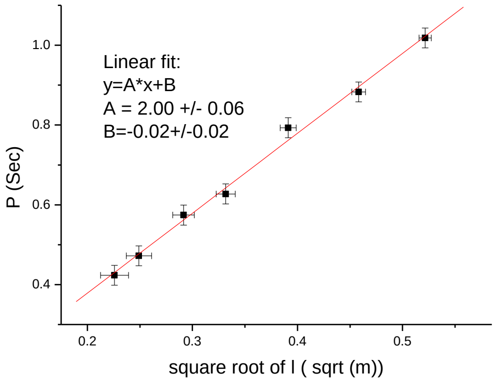
	חוזרת לערכה ההתחלתי בפעם הראשונה, כלומר כש $T=2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}$. נקבל שהקשר בין זמן המחזור לאורך החוט הוא: $T=\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{l}$.  ניתן לראות כי T לינארי ב $\sqrt{l}$ השיפוע של תלות לינארית זו הוא $2\pi/\sqrt{g}$ ונק' החיתוך עם הציר היא 0.
<u>תיאור הניסוי</u> חלק זה צריך לכלול תרשים של מערכת הניסוי, ותיאור של הקשר בין מערכת הניסוי והמודל שהוצג בחלק הקודם. צריך לעמוד על הקשיים העיקריים במימוש המודל. צריך לתת רשימה של מרכיבי המערכת ומדוע הם נבחרו. צריך לתת רשימה של מכשירי המדידה ושגיאת המדידה שלהם וכן מה מודדים עם כל אחד. אם לניסוי הוכנו דגמים בצורה מיוחדת צריך לציין את שיטת ההכנה בפירוט עד החלק זה של הדוח, הדוח יכול להיות מוכן עוד לפני הניסוי ולזה קוראים דוח מכין. בדוח המסכם ניתן לעבור על כל מה שנכתב ולתקן בהתאם לתובנות חדשות שנלמדו אחרי ביצוע הניסוי. כעת מתארים את מהלך הניסוי, בו מפרטים מה בדיוק נעשה בניסוי, כמה מדידות בוצעו והאם הניסוי התנהל לפי המתוכנן.	<u>תיאור הניסוי</u> המערכת כוללת כדור ברזל התלוי בחוט חזק ודק למוט המחובר למעמד ברזל. המערכת מתוארת בתרשים. יש קושי לנדנד את המטוטלת בלי שנקודת העגינה שלה תתנדנד גם. צריך לא לתלות את המטוטלת גבוה מידי, ולשים משהו כבד על המעמד. את אורך החוט נמדוד בעזרת סרגל מתכת, שגיאת המדידה היא 1מ"מ. את זמן המחזור נמדוד בעזרת שעון עצר, שגיאת המדידה, אם ניקח החשבון גם את זמן התגובה מי שמפעיל את השעון היא כרבע שנייה. להקטנת השגיאה נמדוד את הזמן הנחוץ למשקולת לבצע 10 מחזורים, כך שגיאת המדידה לזמן המחזור מוערכת ב 0.03 שנייה. בניסוי מדדנו כך את זמן המחזור עבור 7 אורכים שונים בתחום שבין 5 ס"מ ל 27 ס"מ. על כל מדידה באורך נתון חזרנו 3 פעמים. בכך וידאנו ששגיאת המדידה בזמן המחזור היא אכן 0.03 שנייה.
<u>תוצאות</u> בחלק זה מציגים את התוצאות, כולל תוצאות ביניים. רצוי בגרף אבל אפשר גם בטבלא. אם מתבצע עיבוד כלשהו של התוצאות לפני הניתוח, רצוי להציג את התוצאות בצורה הגולמית, לפני העיבוד. יש להסביר כל שלב בעיבוד התוצאות. אם יש מדידה שחוזרת על עצמה פעמים אחדות	בגרף מוצגות תוצאות המדידה ללא כל עיבוד וללא כל ניתוח.

כל פעם בצורה מעט שונה, אם אין הבדל עקרוני בין המדידות השונות, מספיק להציג מדידה אחת לדוגמא ולציין ששאר המדידות נראות דומה. את שאר התוצאות אפשר להציג בנספה. לבסוף יש להציג את הגרף שמציג את הגדלים שנמדדו, עבורם פותחה נוסחת העבודה בחלק התיאורטי. בגרף זה צריך להציג נקודות מדידה כנקודות שאינן מחוברות בקו, לכל נקודה יש בר-שגיאה (error-bar) רצוי גם לציר x וגם לציר y (חובה לפחות לאחד הצירים). על אותו גרף צריך לשרטט את העקומה של נוסחת העבודה בקו. אם בנוסחת העבודה יש פרמטרים חופשיים של התיאוריה צריך לעשות התאמה מיטבית של נוסחת העבודה לתוצאות המדידה. אפשר לעשות ליניאריזציה של נוסחת העבודה כדי לעשות את ההתאמה המיטבית בעזרת רגרסיה לינארית. אפשר לחשב ולהציג מדדים סטאטיסטיים לטיב ההתאמה (כמו R^2 או χ^2), אבל רק אם יודעים להסביר מה משמעותם. חייבים להציג את הערכים המיטבים ואת השגיאות שלהם, ולדון במשמעותם.



כדי לנתח את התוצאות נציג את T שמדדנו כתלות ב $\sqrt{l}$ שמדדנו. השגיאה ב $\sqrt{l}$ היא $\Delta\sqrt{l}=\frac{\Delta l}{\sqrt{l}}$.

לנתונים אלו עשינו התאמה ליניארית. ניתן לראות מן הגרף כי ההתאמה הלינארית היא טובה. כלומר תוצאות הניסוי עולות בקנה אחד עם הנוסחא התיאורטית.



בנוסף, מתוך השיפוע ניתן למצוא את הערך של g על פי ההתאמה הלינארית השיפוע הוא $A=2.00\,\frac{\mathrm{sec}}{\sqrt{\mathrm{m}}}\pm0.06$ עפ"י נוסחת העבודה $g=\frac{(2\pi)^2}{A^2}$ כדי למצוא את השגיאה ב g אפשר להשתמש $\Delta g=\frac{2\pi^2}{A^3}\Delta A$ (שמצאנו מתוך גזירה או $\Delta g=\left|\frac{\partial g}{\partial A}\right|\Delta A$ ע"י חישוב פעמיים:

$$g_{\max}=\frac{(2\pi)^2}{(A-\Delta A)^2},\ g_{\min}=\frac{(2\pi)^2}{(A+\Delta A)^2}$$ ו

$\Delta g=g_{\max}-g_{\min}$ בכל מקרה מתקבל

$$g=9.9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}\pm0.3 .$$

<u>דיון ומסקנות</u> בחלק זה של הדו"ח צריך לקבוע האם תוצאות הניסוי תומכות בתיאוריה או שוללות אותה, או שאולי לא ניתן לקבוע על פי ניסוי זה את נכונות התיאוריה. צריך לציין האם נתגלתה שגיאה שיטתית ואם כן מהן האפשרויות למקורה. לכל אפשרות שמעלים רצוי לתת נימוק וניתוח שמראה שאכן לגורם שגיאה זה יש השפעה במגמה ואם אפשר בגודל שמתאים לשגיאה השיטתית שנתגלתה (במילים אחרות, לא לחרטט). יש להשוות בין הערכים של הפרמטרים שנמצאו בהתאמה המיטבית וערכם המקובל בספרות או במדידות אחרות. ההשוואה צריכה להתחשב בשגיאה בערכם של הפרמטרים. לבסוף צריך לכלול הצעות לשיפור ולניסוייים נוספים שיכולים להאיר את הבעייה מזוויות חדשות.	<u>דיון ומסקנות</u> ניתן לראות כי ההתאמה בין הניסוי לתיאוריה היא טובה. הסטיות של נקודות המדידה מן הערך התיאורטי נראות כולן אקראיות וגודלן מתאים לגודל השגיאה הצפוי כפי שפורט קודם. הערך של g שהתקבל מן ההתאמה קרוב מאד לערכו המקובל: $9.9 \pm 0.3 \approx 9.80 \pm 0.03$. כמו כן, נקודת החיתוך של ההתאמה הלינארית עוברת דרך ראשית הצירים, כצפוי. ניתן להקטין בצורה משמעותית את השגיאה במדידת הזמן ע"י שימוש במחשב (למשל ב vscope) ובכך לשפר את הדיוק במדידה של g . כמו כן לתיאוריה יש עוד שני ניבויים מעניינים שכדי לבדוק והם, שזמן המחזור אינו תלוי במסה ובאמפליטודה (כל עוד הזוויות קטנות). אפשר גם לבדוק באיזה זווית ניתן להבחין בסטייה מן התיאוריה בגלל הקירוב לזוויות קטנות.
<u>סיכום</u> בחלק זה צריך לחזור בפיסקה אחת על כל הדו"ח בצורה מאד תמציתית. משהו בסגנון: בניסוי זה מדדנו את Y כתלות ב X באמצעות ____ . את תוצאות המדידה השווינו לנוסחא שפותחה על פי ______. ההתאמה הייתה טובה/לא טובה. מתוך ההתאמה חילצנו את ערכם של ______. נמצא כי גודל הפרמטרים המחולצים מתאים/לא מתאים לערכם המקובל בספרות.	לסיכום בניסוי זה מדדנו את התלות של זמן המחזור של תנודת מטוטלת באורך החוט שלה. מצאנו כי הנוסחא המבוססת על החוק השני של ניוטון וקירוב לזוויות קטנות מתארת תלות זו בצורה טובה. מן הניסוי חילצנו את הערך של תאוצת הכובד. הערך שמצאנו בניסוי תואם את הערך המקובל.