

Verfahren zur Datenanalyse gemessener Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 8

zum Übungsblatt

Stochastischer Prozess im bistabilen System

$$\dot{x} = x - x^3 + \kappa\xi(t)$$

$$\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} + \kappa\xi(t)$$

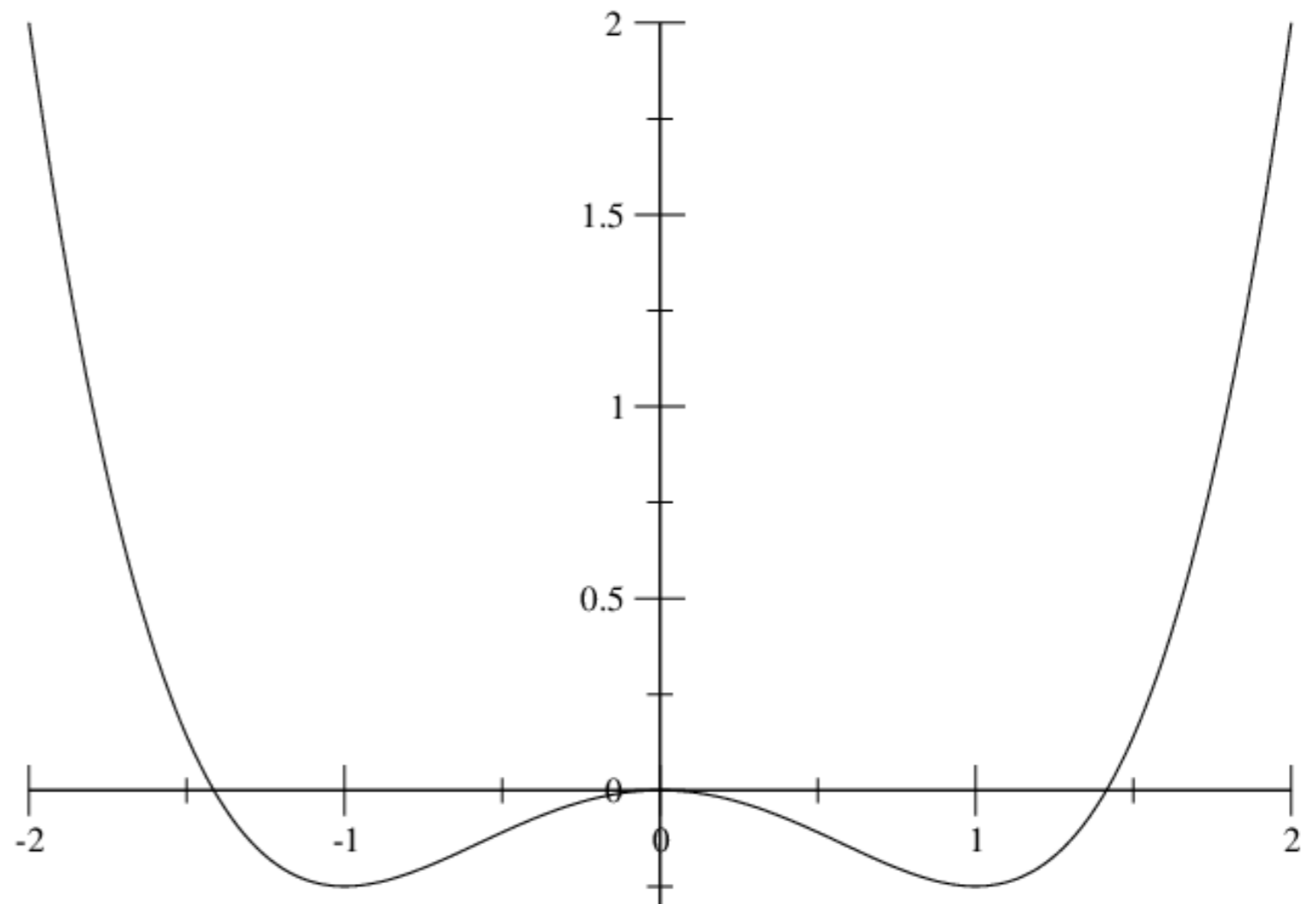
$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

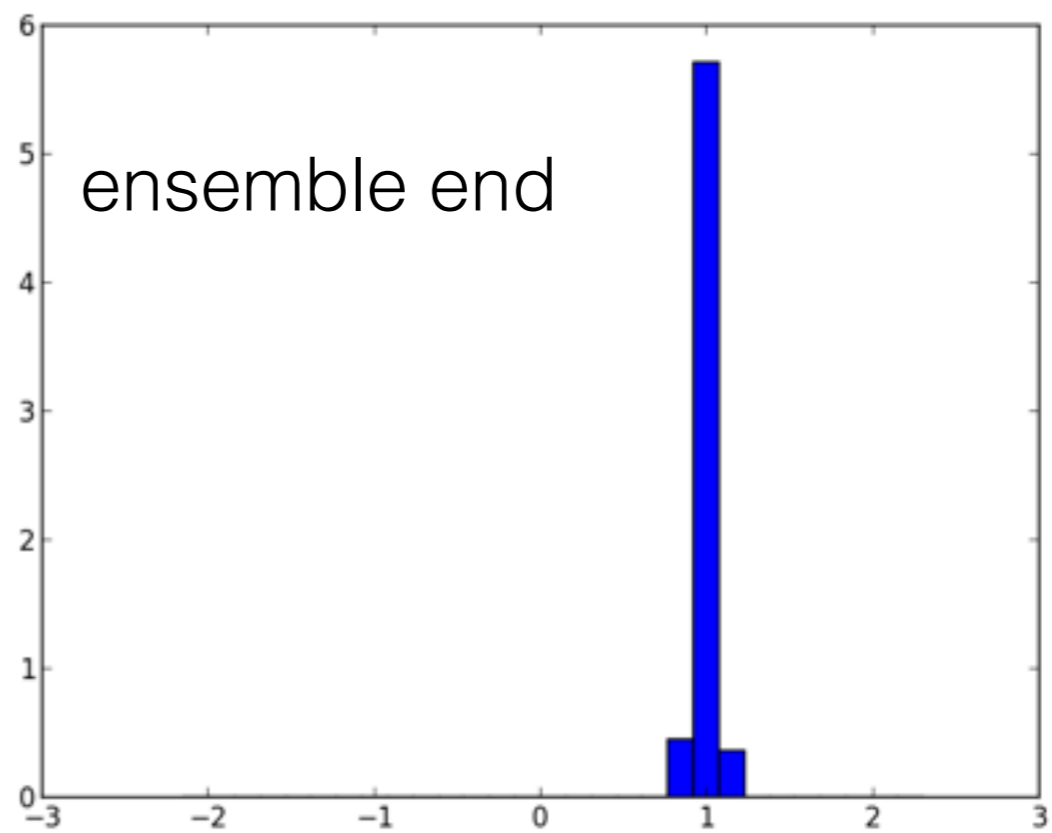
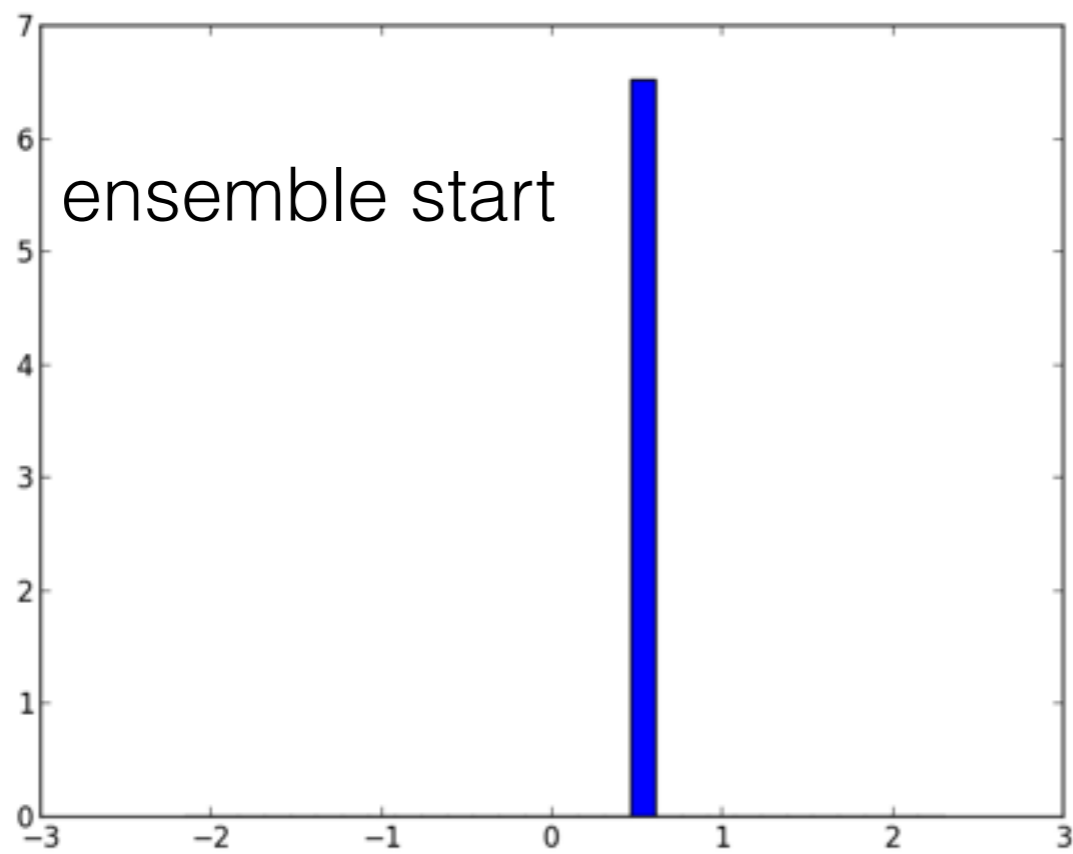
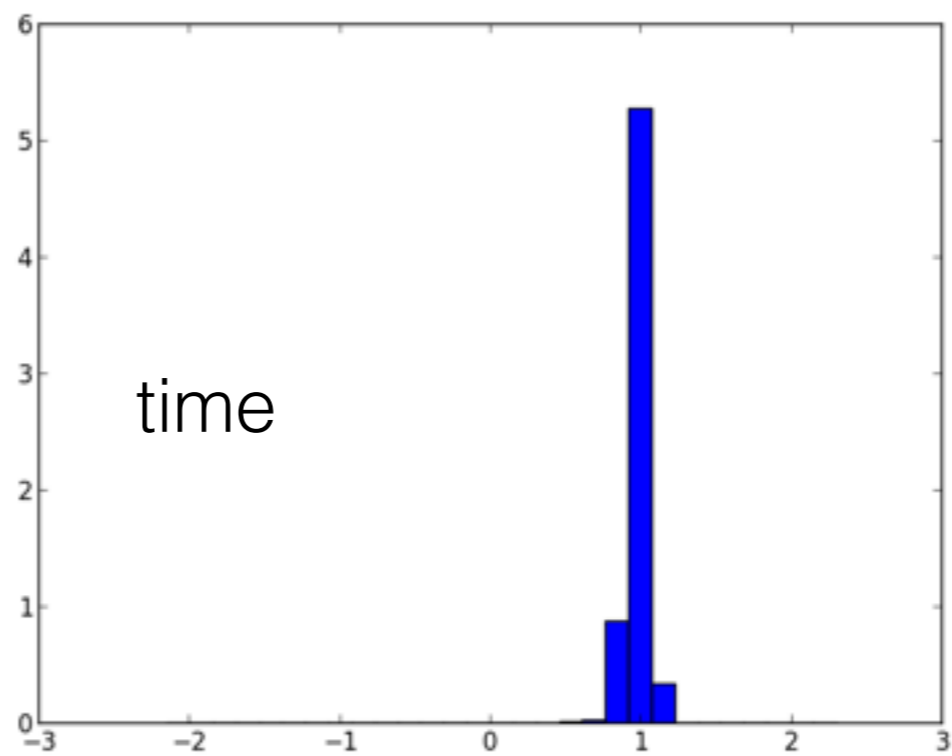
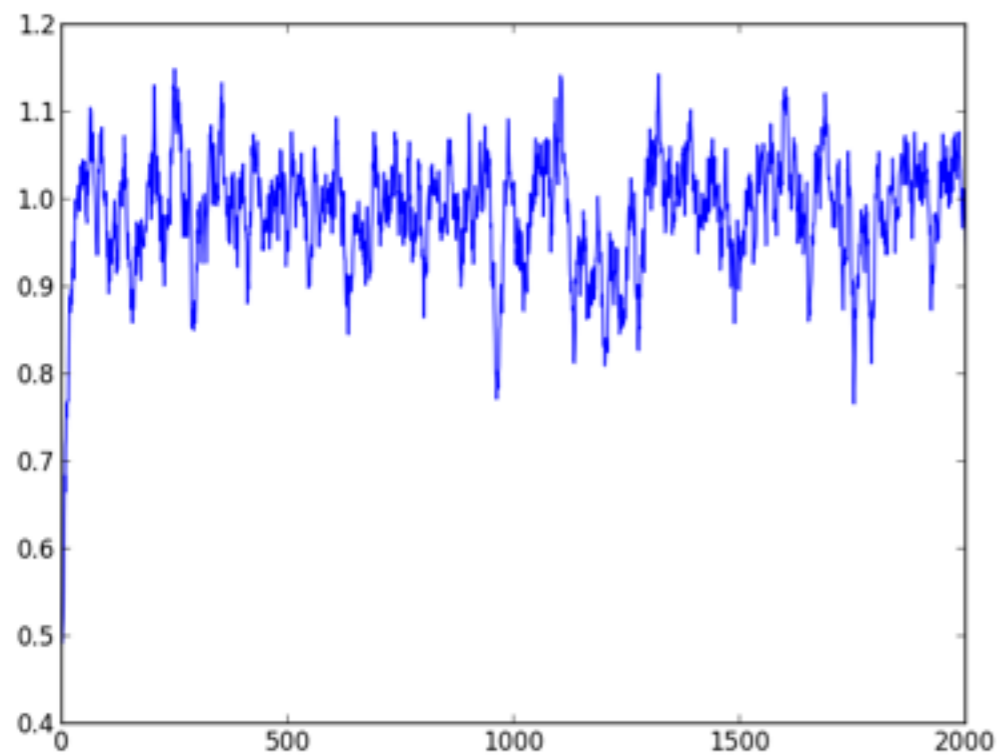
Stochastischer Prozess im bistabilen System

$$\dot{x} = x - x^3 + \kappa\xi(t)$$

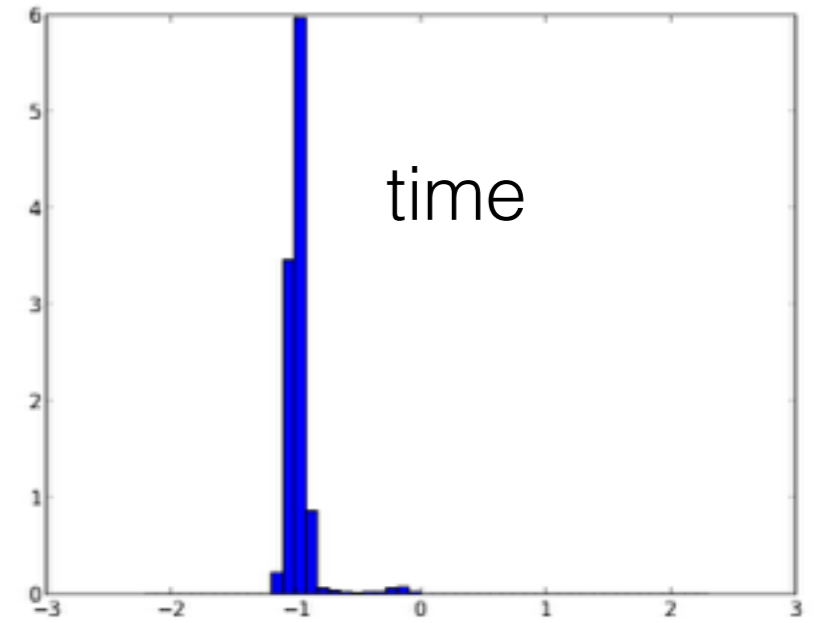
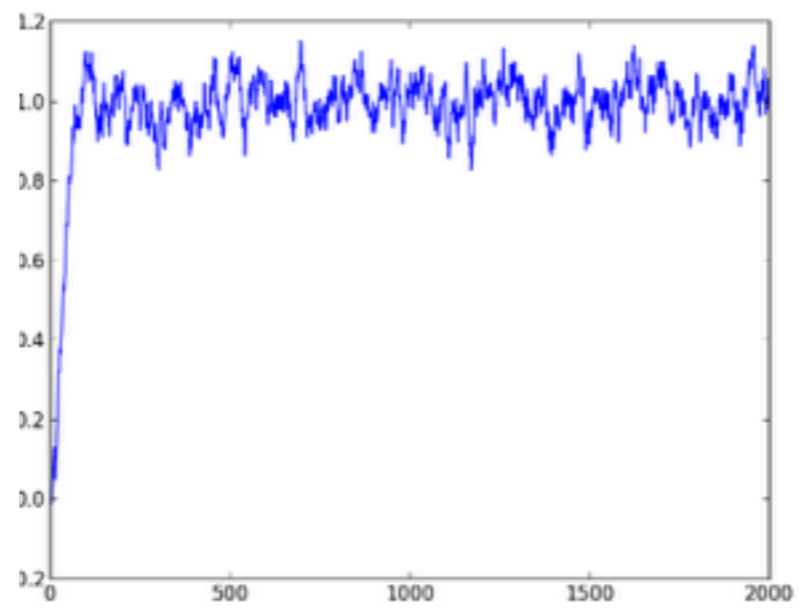
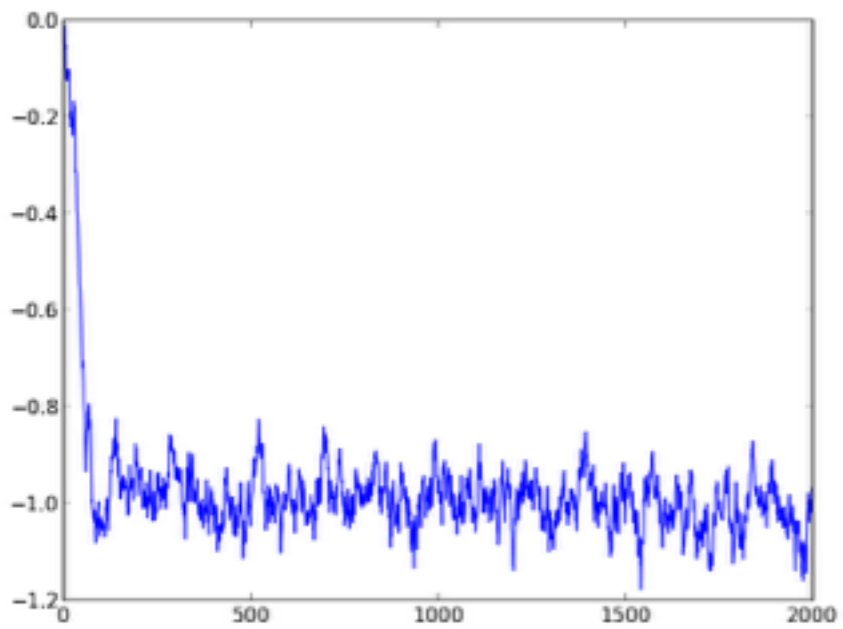
$$\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} + \kappa\xi(t)$$

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

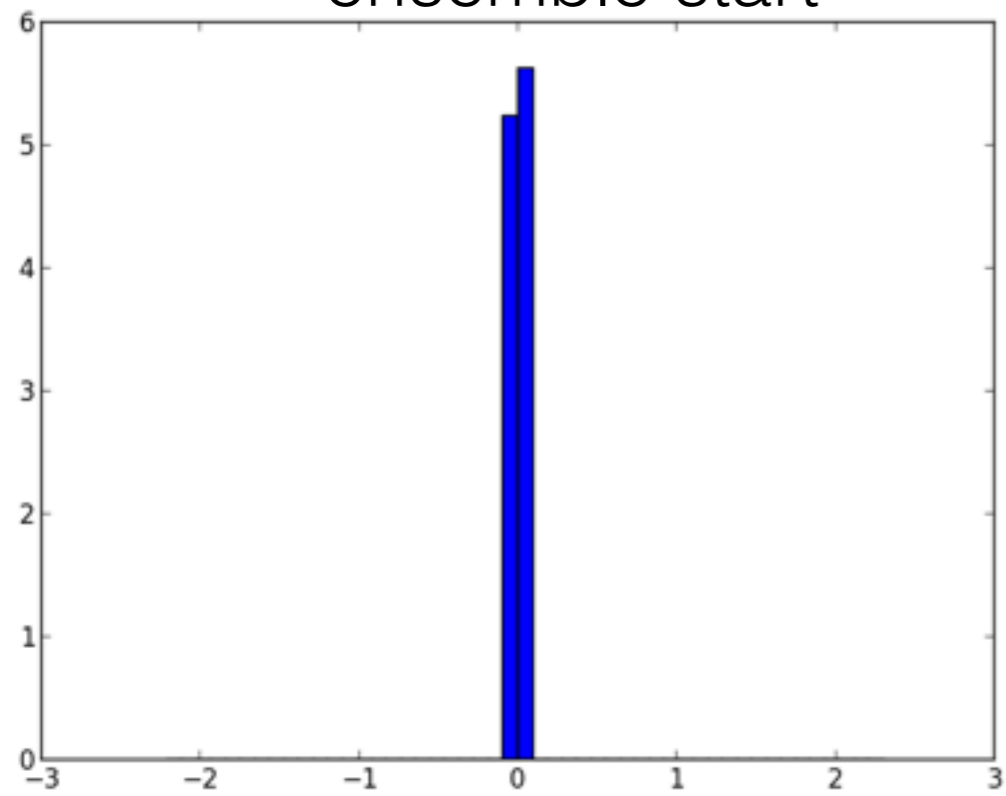




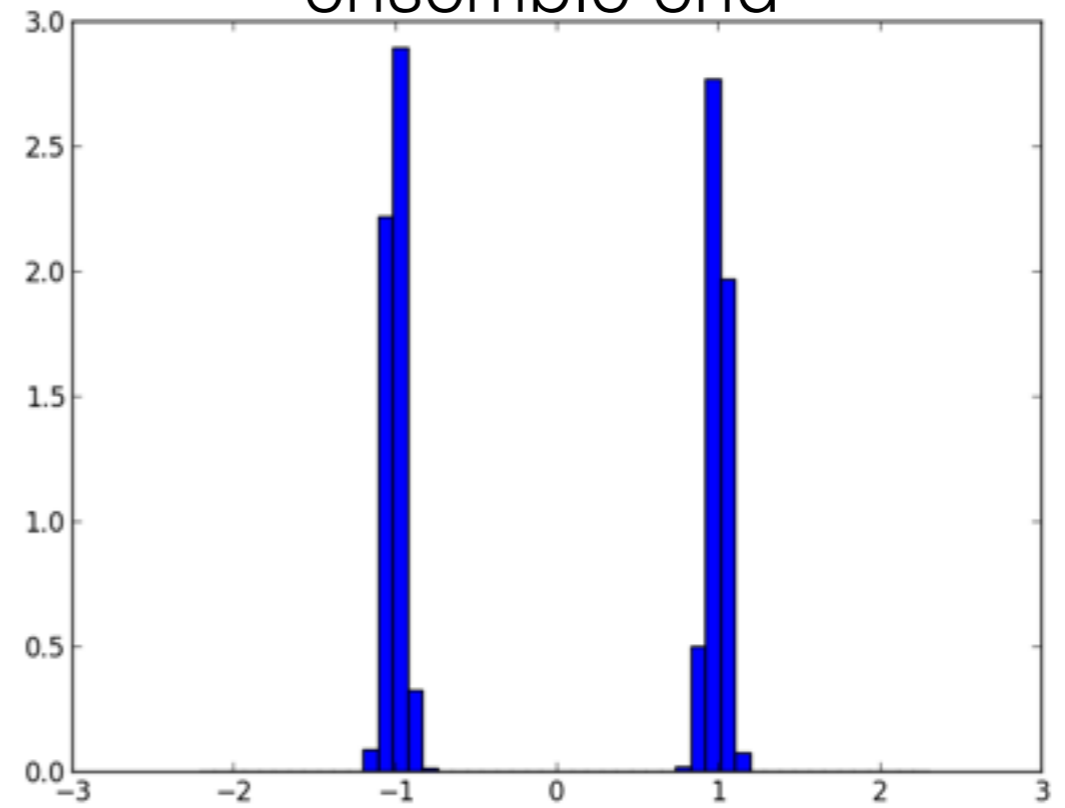
initial point 0.5 , low noise



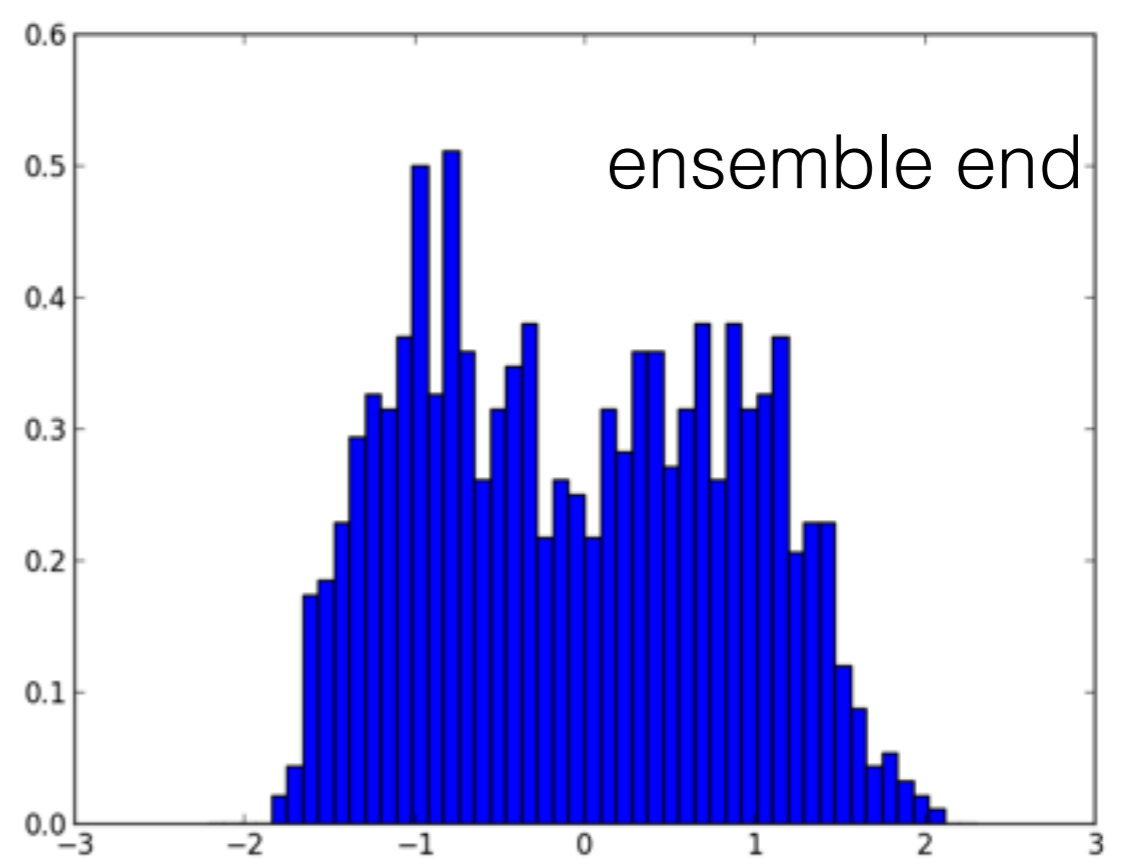
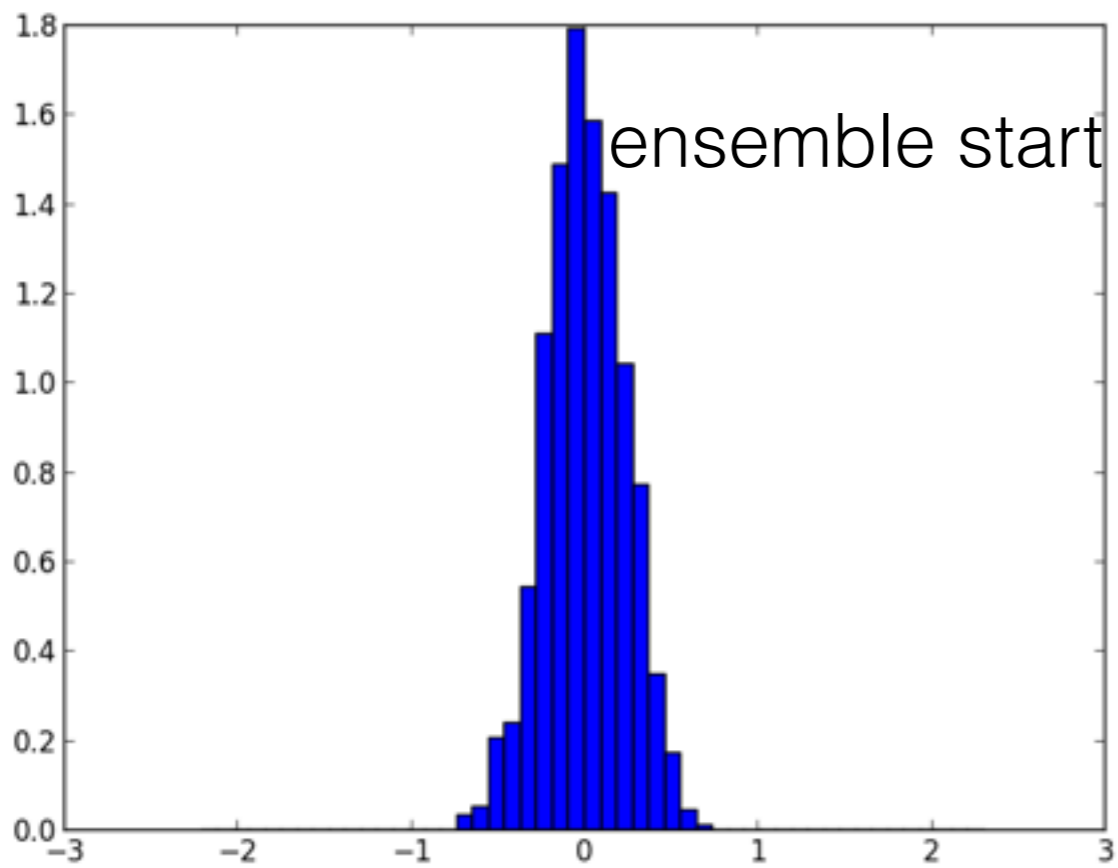
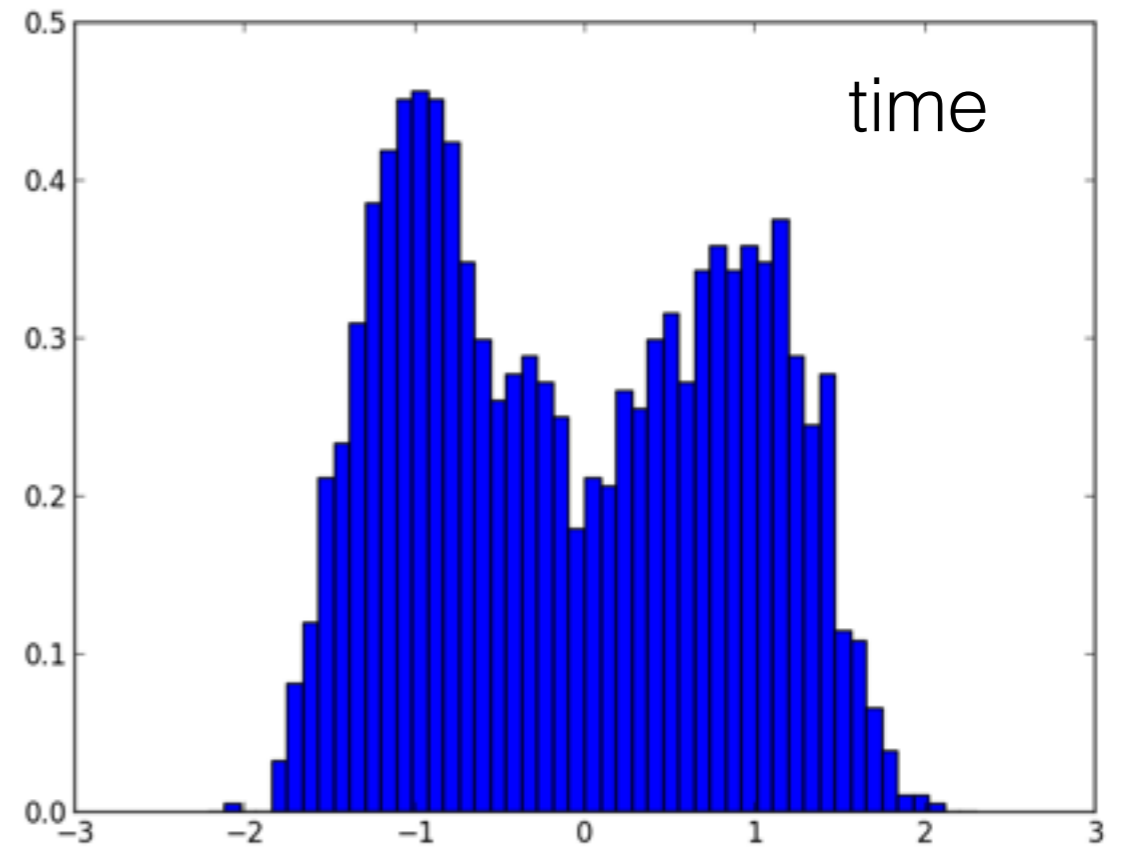
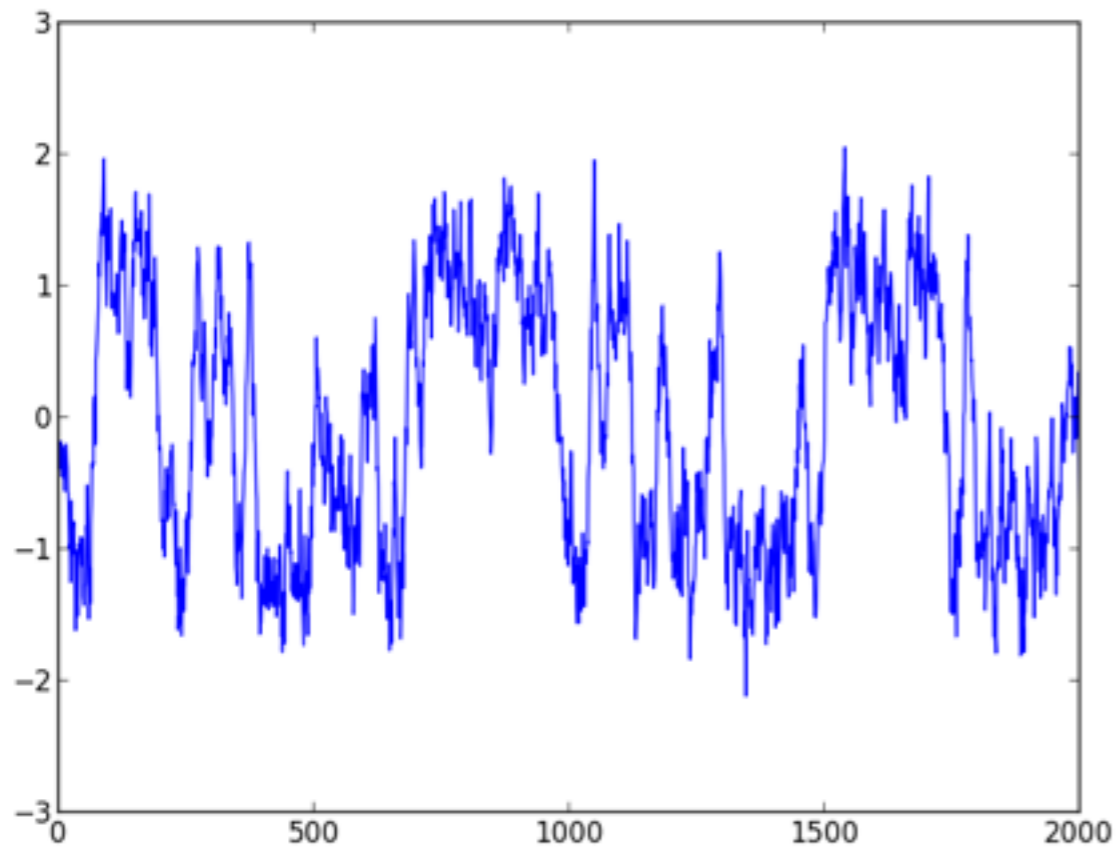
ensemble start



ensemble end



initial point 0.0 , low noise



initial point 0.0 , strong noise

weiter mit Vorlesung 8

III. Zeit-Frequenz Analyse

Short-time Fourier Transform

Gabor Transformation

Lineare Filter

Wavelet Transformation

Konzept des Analytischen Signals

Reassignment Methoden

Short-time Fourier Transformation (STFT)

zeitkontinuierliches Signal

$$X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-i2\pi ft} dt$$

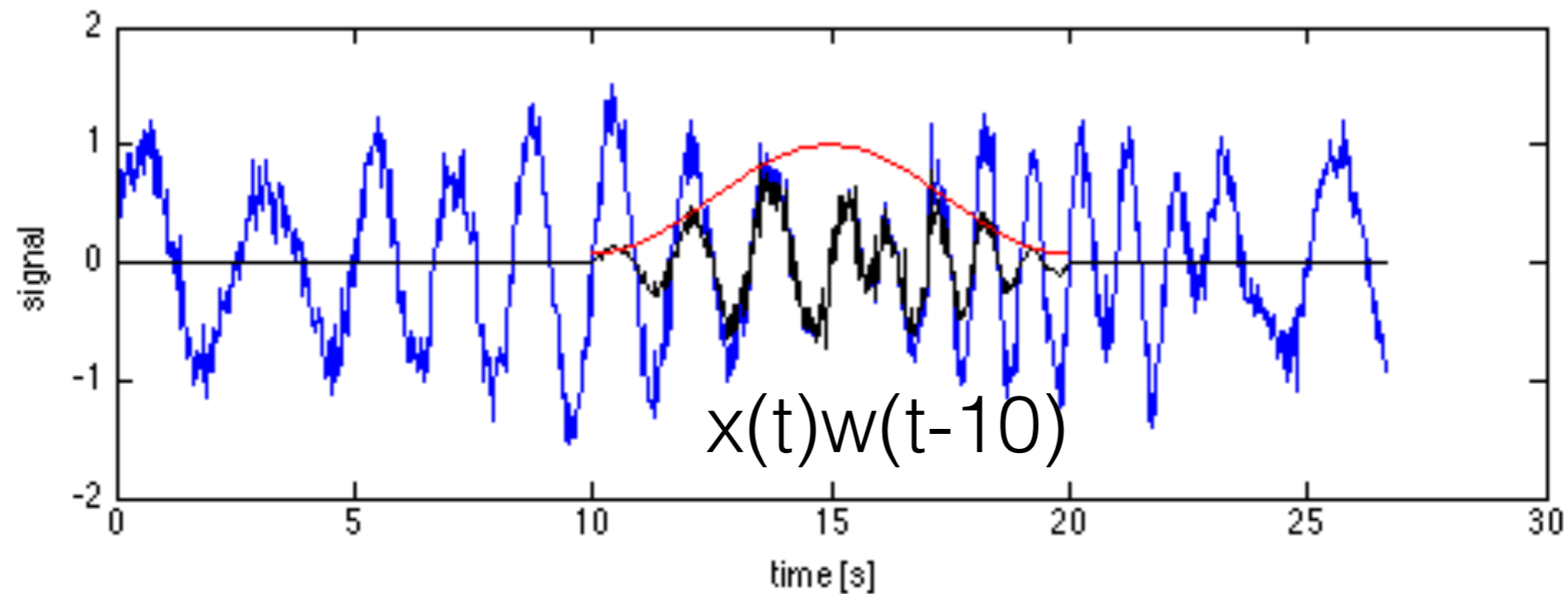
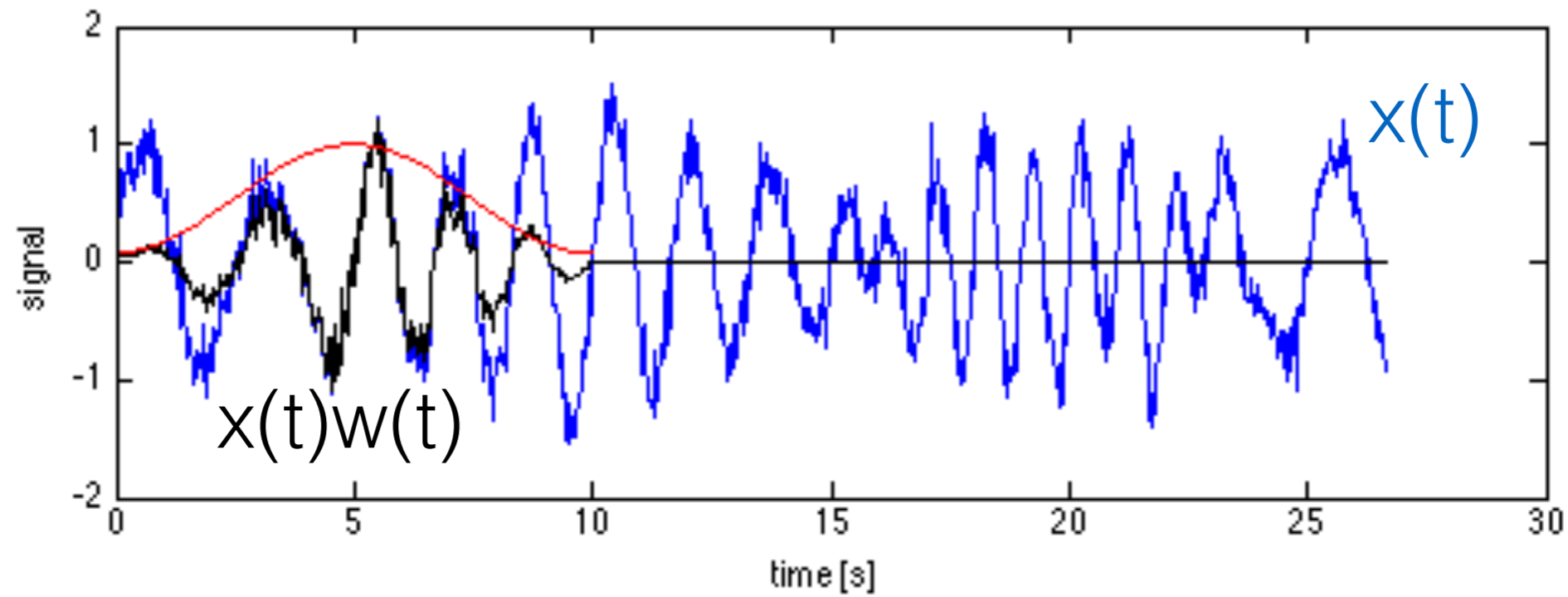
Fensterfunktion

zeitlich abgetastetes Signal

$$X(\tau_n, f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k)w(t_k - \tau_n)e^{-i2\pi ft_k}$$

FT von gefensterterem Signal verschoben um Zeit τ

oder: FT eines neuen Signals $x(t)w(t - \tau)$



STFT ist die Fourier Transformation

eines **Signalstücks** (**gewichtet** durch eine Fensterfunktion)

die entlang des Signals **gleitet**

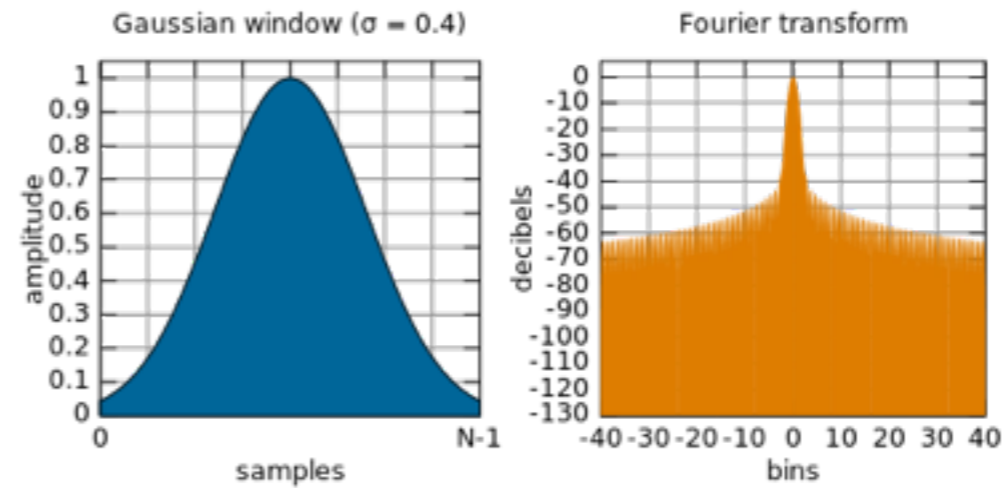


Standard-FT, jetzt in verschiedenen Zeitfenstern

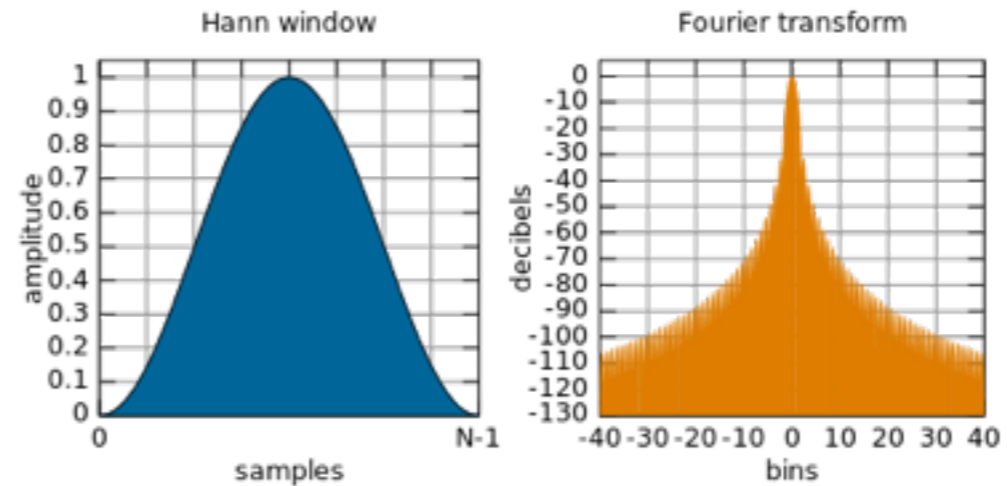
Typische Wahl des Zeitfensters:

Typische Wahl des Zeitfensters:

Gauss-Fenster



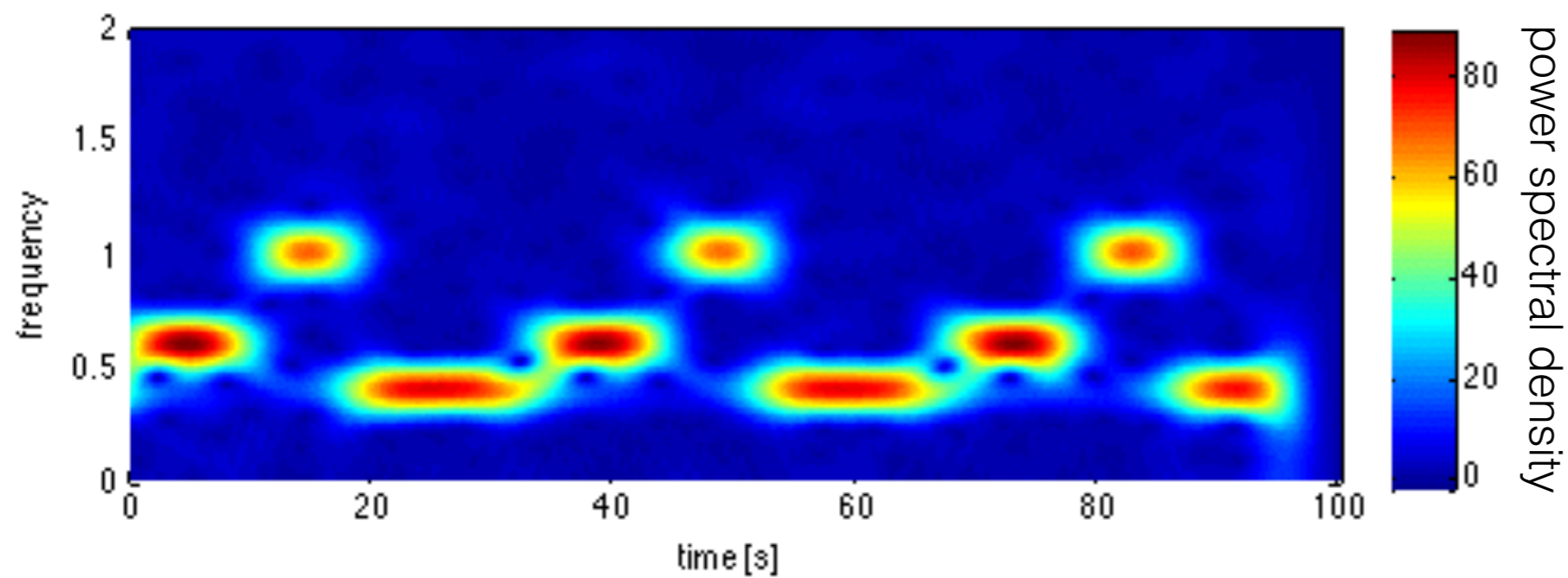
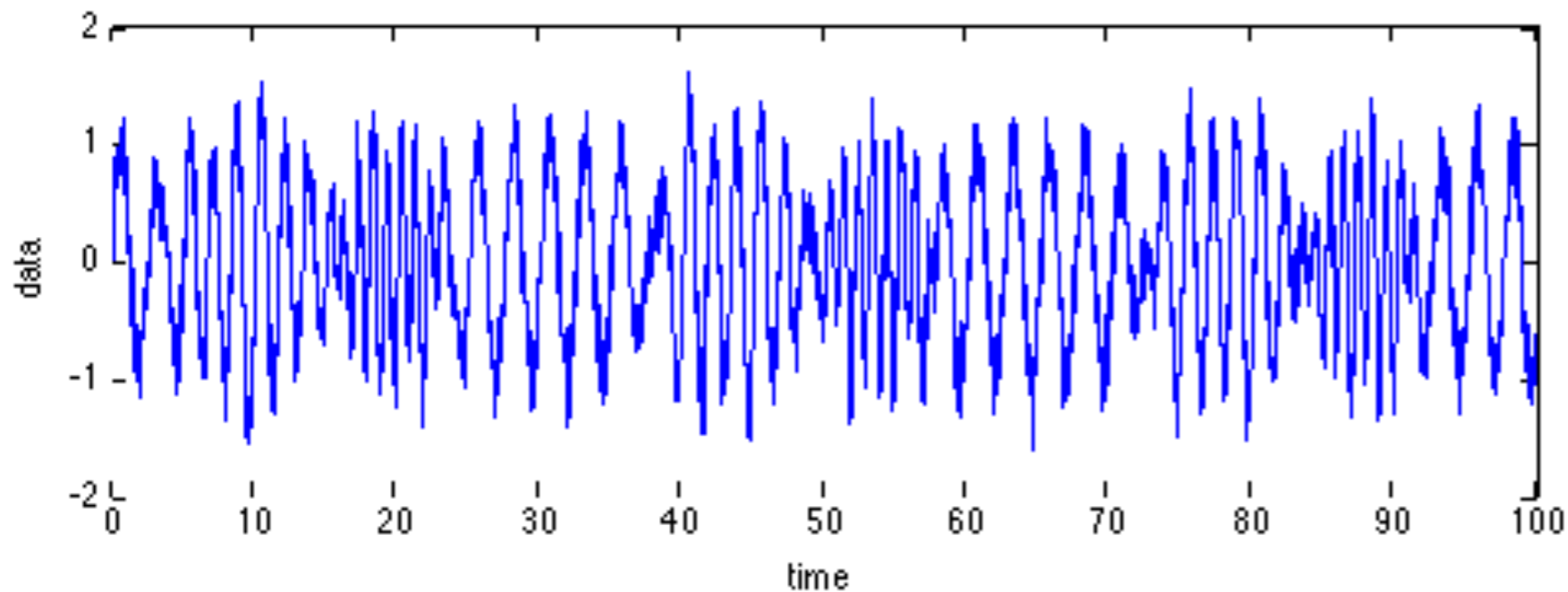
Hanning-Fenster



Zeitfenster:
10s

Frequenzauflösung
0.1Hz

9.967s Überlapp,
Hamming-Fenster



gute Frequenzauflösung, gute Zeitauflösung

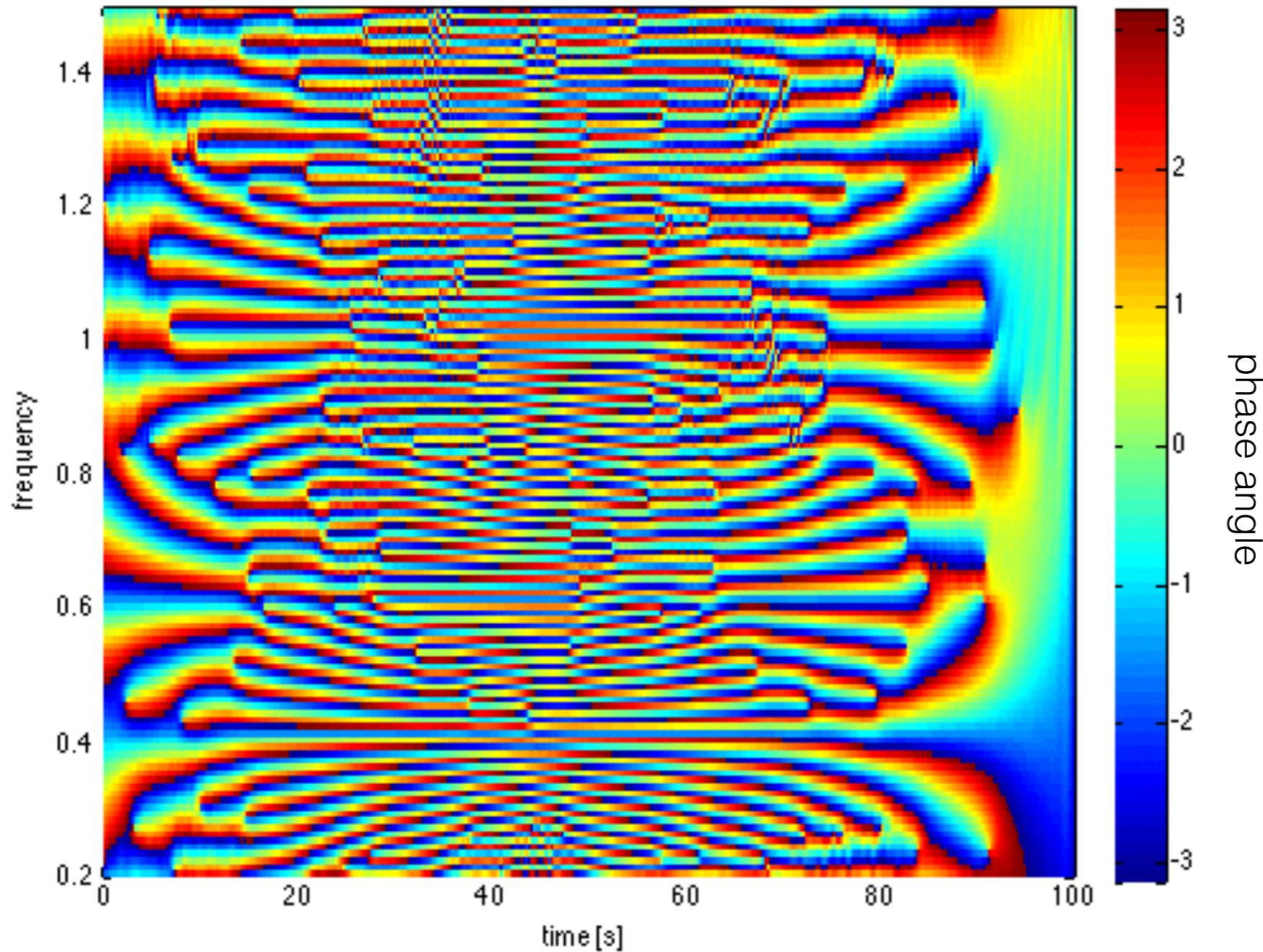
(TF_5.m)

gute Frequenzauflösung, gute Zeitauflösung:

warum ist das möglich ?

- Zeit-Frequenz Unschärfe noch gültig
- Oszillationen dauern lang an :
niedrige Zeitauflösung möglich
- **Qualität der Zeit-Frequenz-Repräsentation hängt stark von den Daten ab**

was ist mit der Phase ?



Zeitfenster
10s

Frequenzauflösung
0.1Hz

9.967s Überlapp,
Hamming-Fenster

keine Interpretation möglich

(TF_7.m)

Fourier-Unschärferelation:

$$\Delta T \Delta f = \textit{const}$$

je kleiner die Konstante, desto besser

Frage:

wie kann man die **Fensterfunktion optimal** wählen,

so dass ***const* minimal** ist ?

Erinnerung:

$$(\Delta t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt$$

$$(\Delta f)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |X(f)|^2 df$$

dann gilt auch:

$$(\Delta t)^2 (\Delta f)^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

$$\text{“ } \Delta t \Delta f \geq 0.079 \text{ ”}$$

optimaler Fall

$$(\Delta t)^2 (\Delta f)^2 = \frac{1}{16\pi^2}$$

falls $s(t)$ und $X(f)$ eine **Gauss-Funktion** ist



optimale Fensterfunktion **w** ist eine **Gauss-Funktion**

III. Zeit-Frequenz Analyse

Short-time Fourier Transform

Gabor Transformation

Lineare Filter

Wavelet Transformation

Konzept des Analytischen Signals

Reassignment Methoden

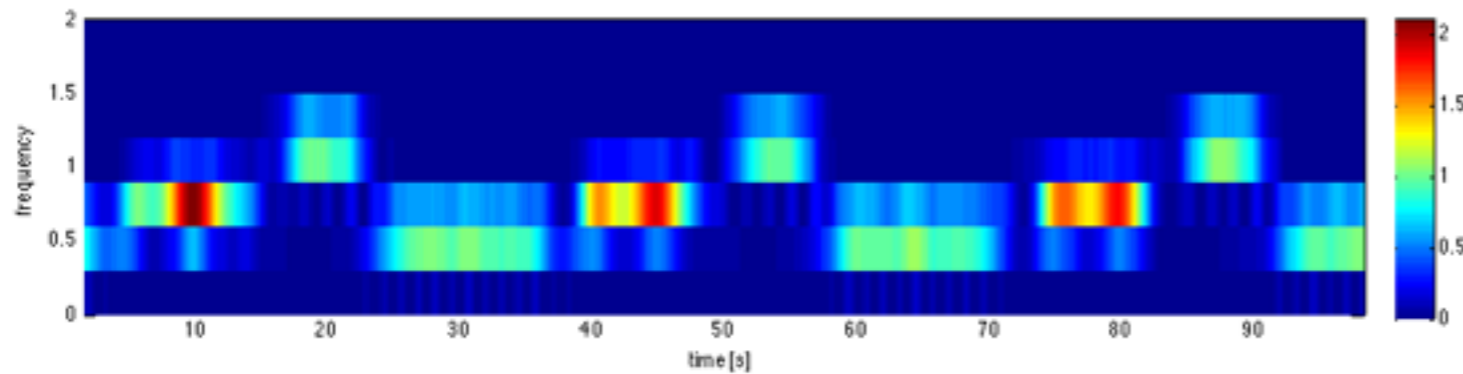
Gabor Transformation

zeitkontinuierliches Signal:

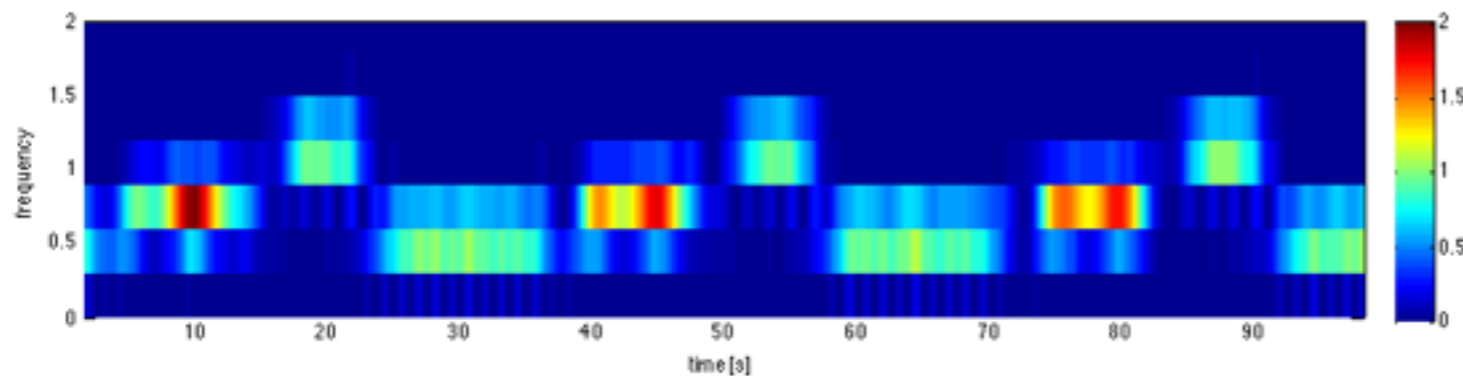
$$X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-i2\pi ft} dt$$

Fensterfunktion

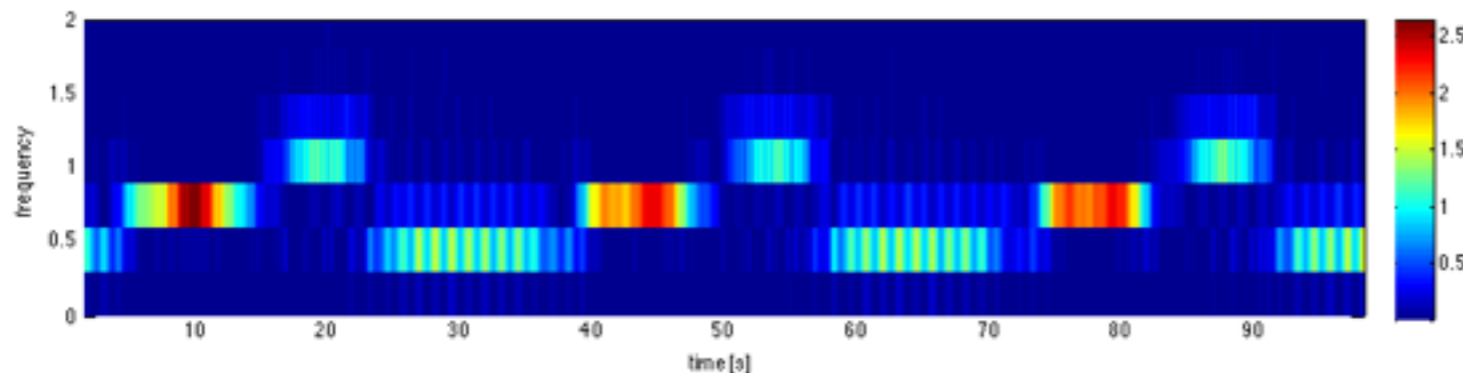
$$w(t - \tau) = e^{-\pi(t-\tau)^2}$$



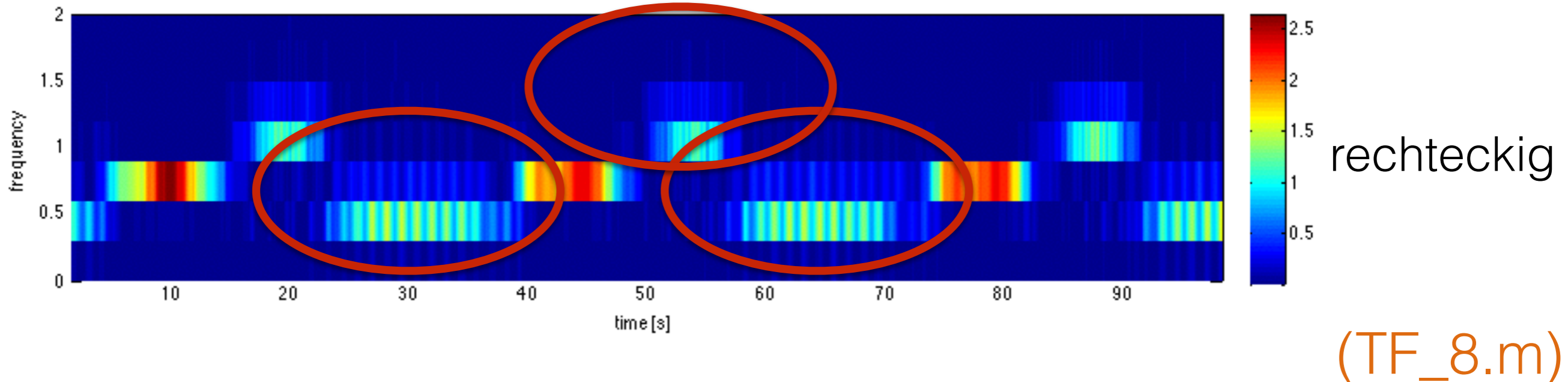
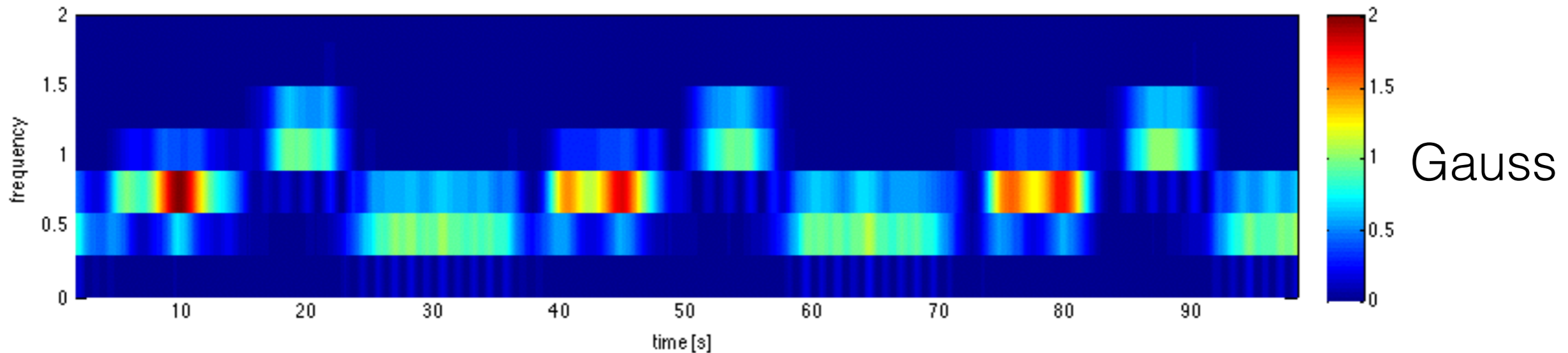
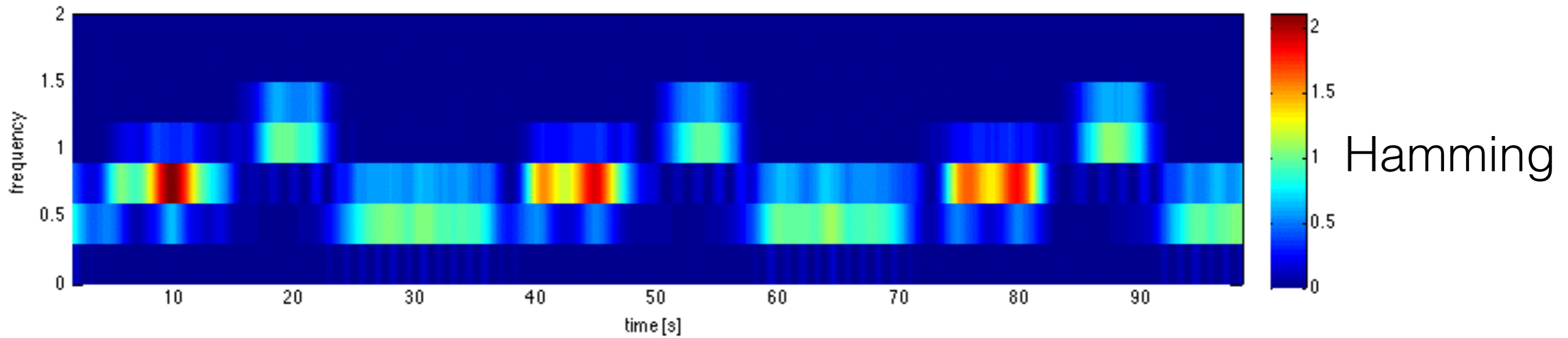
Hamming



Gauss



rechteckig



III. Zeit-Frequenz Analyse

Short-time Fourier Transform

Gabor Transformation

Lineare Filter

Wavelet Transformation

Konzept des Analytischen Signals

Reassignment Methoden

Verallgemeinerung:

Linearer Frequenzfilter:

$$X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-i2\pi f(t-\tau)} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t - \tau)dt$$

Impulsantwort-Funktion

Short-time Fourier Transform:

$$X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-i2\pi ft} dt$$

window function

Linear frequency filter:

$$X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-i2\pi f(t - \tau)} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t - \tau)dt$$

impulse response function

III. Zeit-Frequenz Analyse

Short-time Fourier Transform

Gabor Transformation

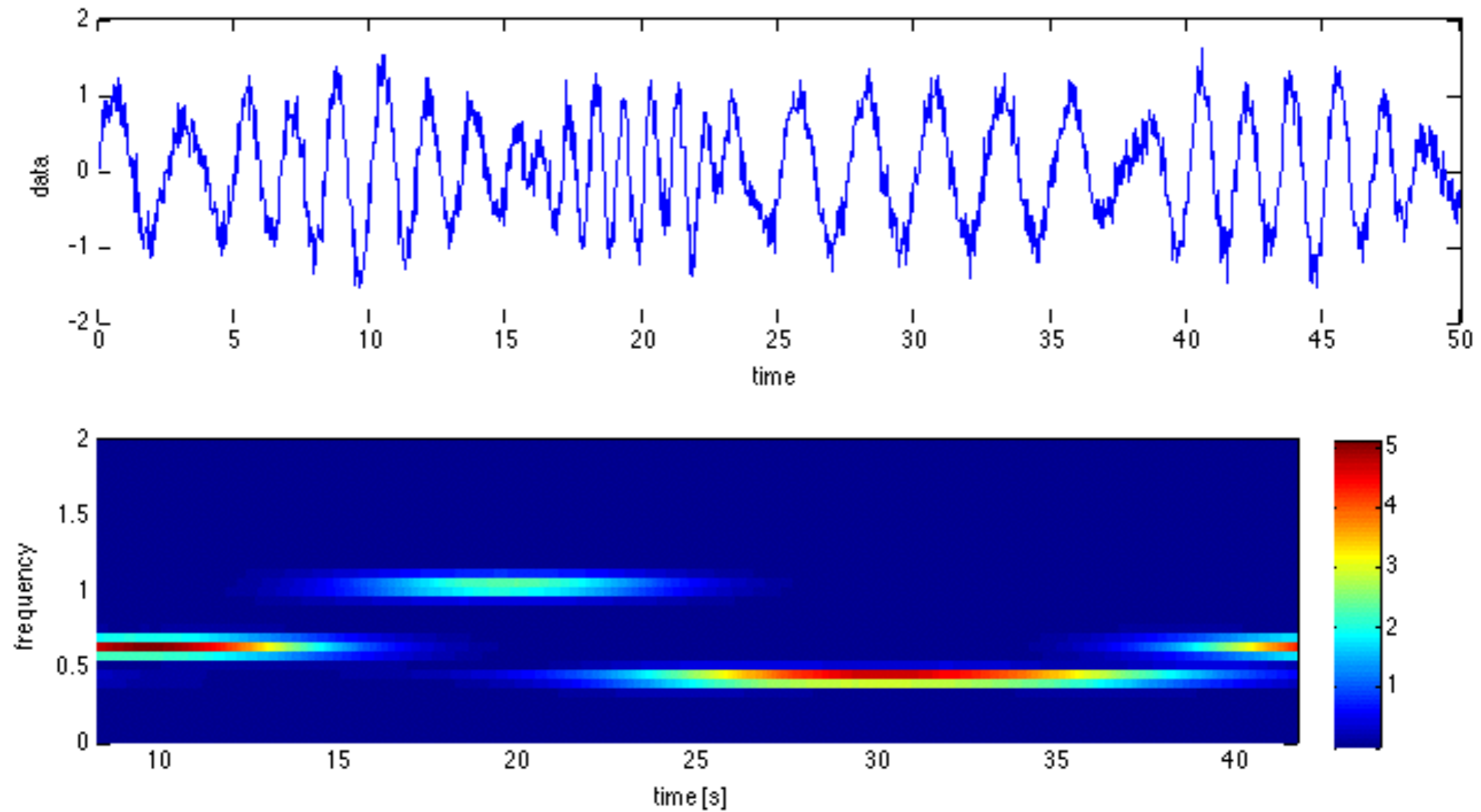
Lineare Filter

Wavelet Transformation

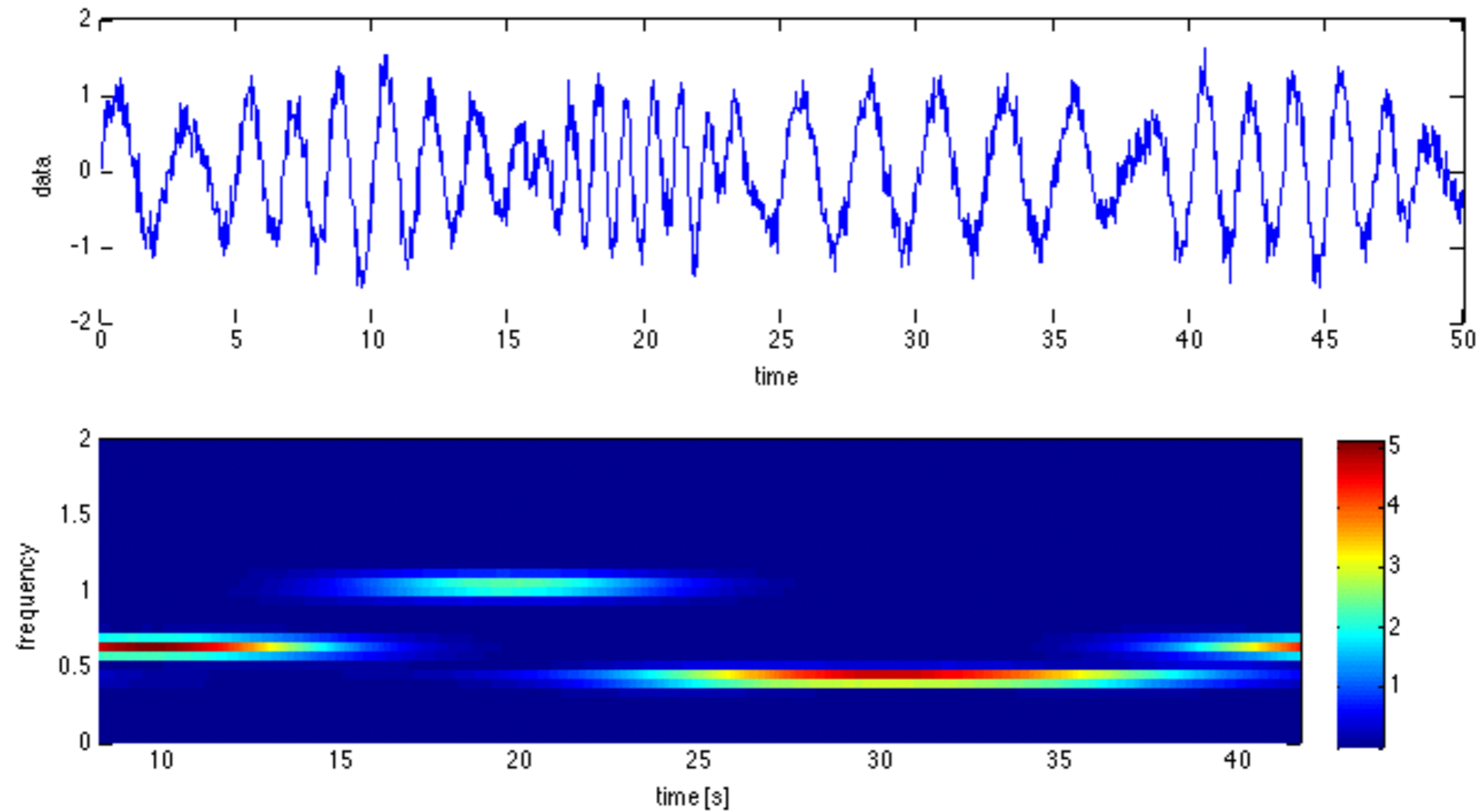
Konzept des Analytischen Signals

Reassignment Methoden

bis jetzt ist Zeitfenster identisch für alle Frequenzen

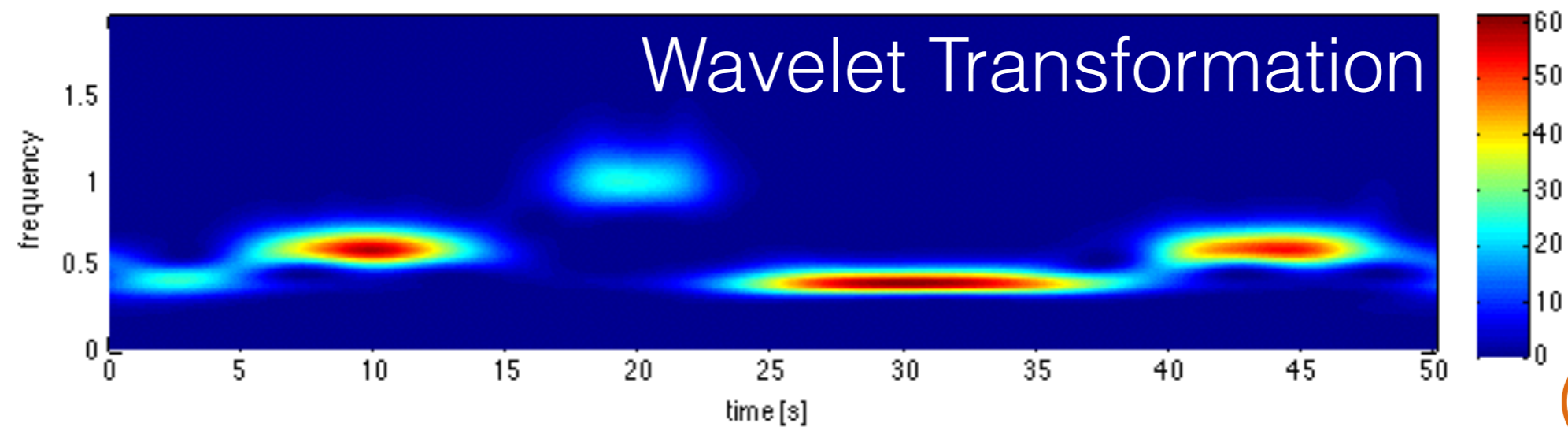
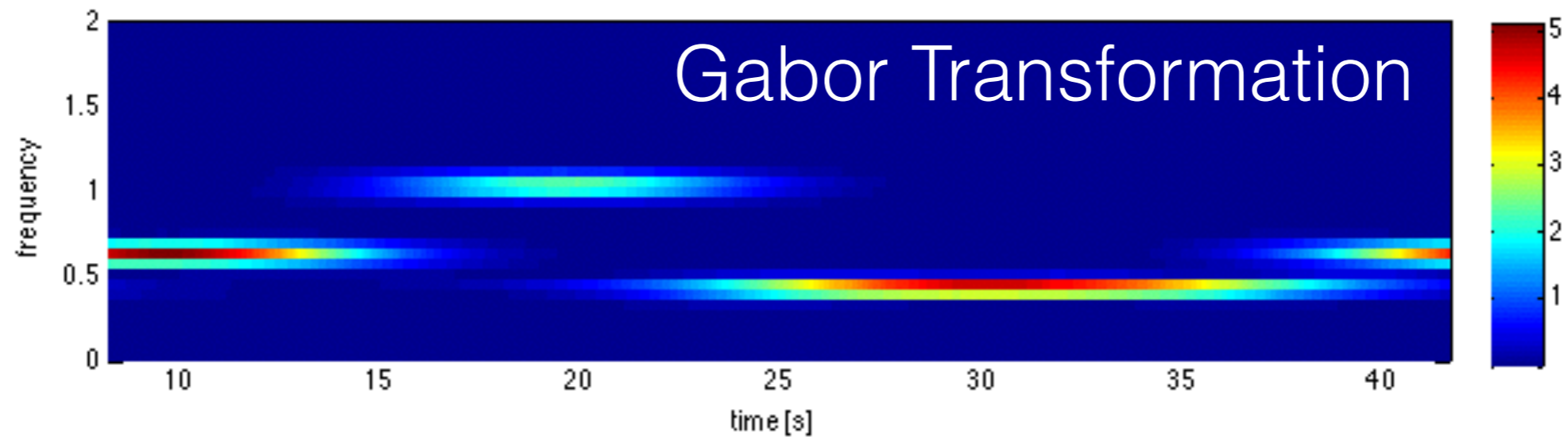
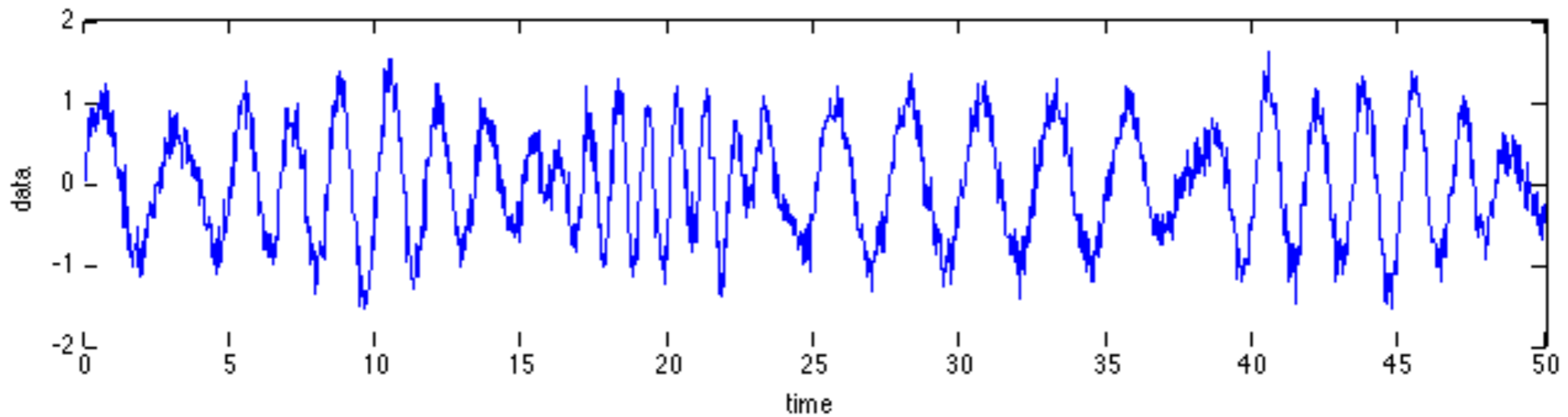


bis jetzt ist Zeitfenster identisch für alle Frequenzen



zeitliche Lokalisierung ist nicht gut

Lösung : *multi-resolution analysis*



(TF_9.m)

Hauptidee: linearer Filter mit variabler Skala

Hauptidee: linearer Filter mit variabler Skala

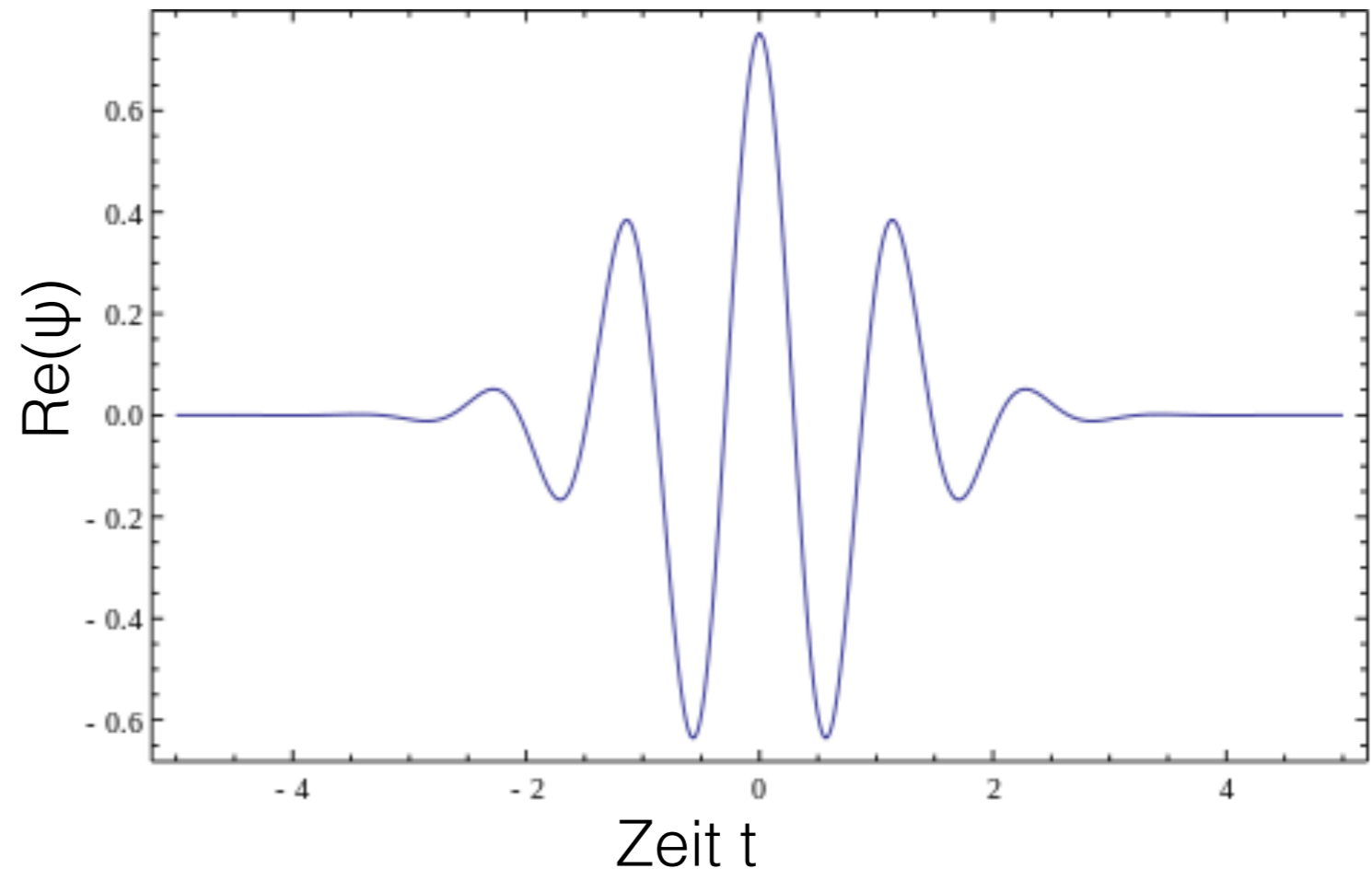


$$X(\tau, a) \sim \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{\Psi} \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

a: Zeitskalierungsfaktor

e.g.

$$\Psi_a(t) = k_1 e^{-t^2} (e^{-i \frac{t}{a}} - k_2)$$



Kontinuierliche Wavelet Transformation

Kontinuierliche Wavelet Transformation

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{\Psi} \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

Ψ : mother wavelet

a : $a > 0$, Zeitskala ($\sim 1/f$)

τ : Zentrum des gleitenden Zeitfenster

ähnlich der Fourier Transformation existiert die Inverse:

$$x(t) = \frac{2}{a^{5/2} C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} X(\tau, a) \Psi \left(\frac{t - \tau}{a} \right) da d\tau$$

falls $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0$ (*admissibility condition*)

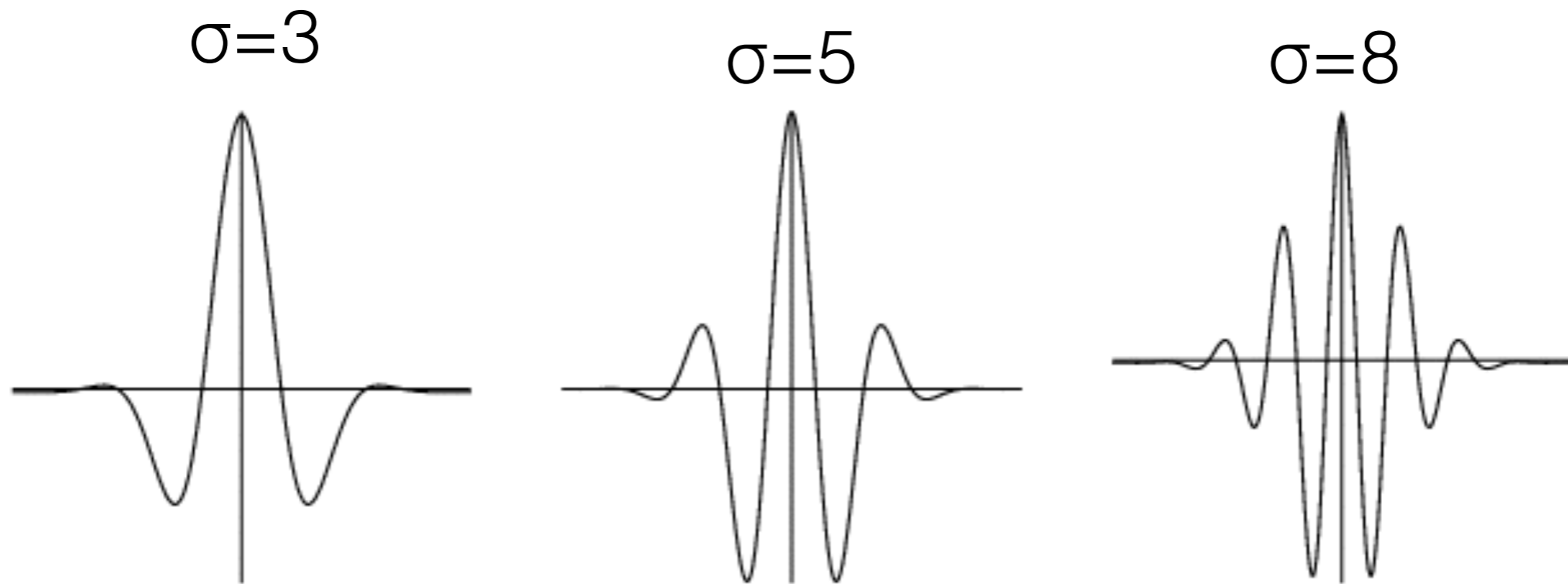
Interpretation:

- $X(\tau, a)$ ist die Korrelation zwischen dem Signal und dem Wavelet
- falls $x(t)$ and $\psi((t-\tau)/a)$ sehr ähnlich um τ sind, dann ist $X(\tau, a)$ groß
- $\psi((t-\tau)/a)$ ist eine Fensterfunktion mit variierenden Skalen-Eigenschaften

Eigenschaft: admissibility

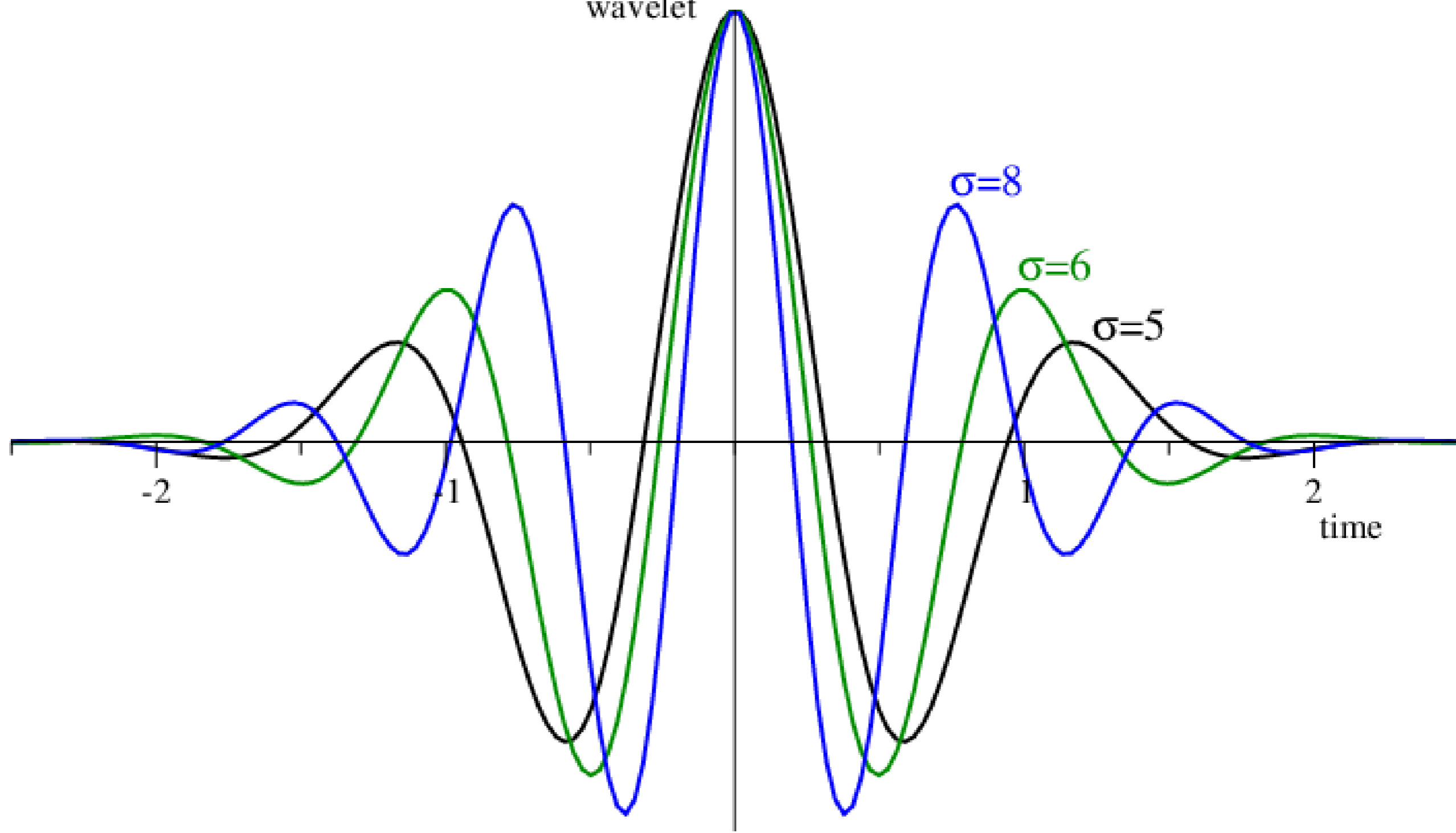
da $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0$: Ψ muss oszillatorische Funktion sein

Beispiel: komplexwertige Morlet wavelet $\Psi(t) = k_1 e^{-t^2} (e^{-i\sigma t} - k_2)$



empfohlen : $5 < \sigma < 10$

wavelet



$\sigma=8$

$\sigma=6$

$\sigma=5$

-2

-1

1

2

time

Eigenschaft: Faltung

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{\Psi} \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$



$$X(\tau, a) \sim IFT \left[\tilde{X}(f) \cdot \tilde{\Psi}(af) \right]$$

Beispiel: Morlet wavelet

$$\bar{\Psi}(t) = e^{-t^2} e^{i\sigma t}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{i\sigma t} e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + iAt} dt \end{aligned}$$

$$A = \sigma - 2\pi\nu$$

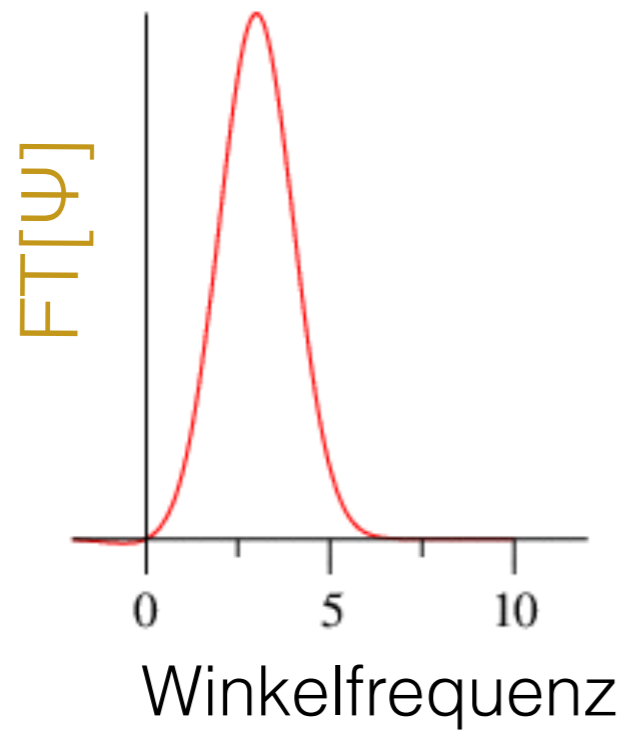
$$\begin{aligned}
-t^2 + iAt &= - \left(t^2 - iAt + \frac{i^2}{4} A^2 - \frac{i^2}{4} A^2 \right) \\
&= - \left(t^2 - iAt + \frac{i^2}{4} A^2 \right) - \frac{A^2}{4} \\
&= - \left(t - \frac{iA}{2} \right)^2 - \frac{A^2}{4}
\end{aligned}$$

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(\nu) = e^{-A^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-iA/2)^2} dt$$

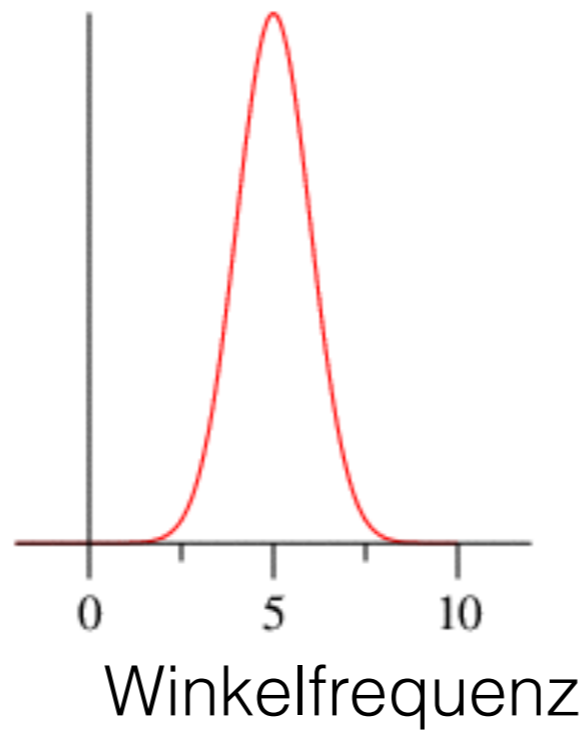
$$= \sqrt{\pi} e^{-(\sigma - 2\pi\nu)^2/4}$$

Maximum bei $\nu = \frac{\sigma}{2\pi}$

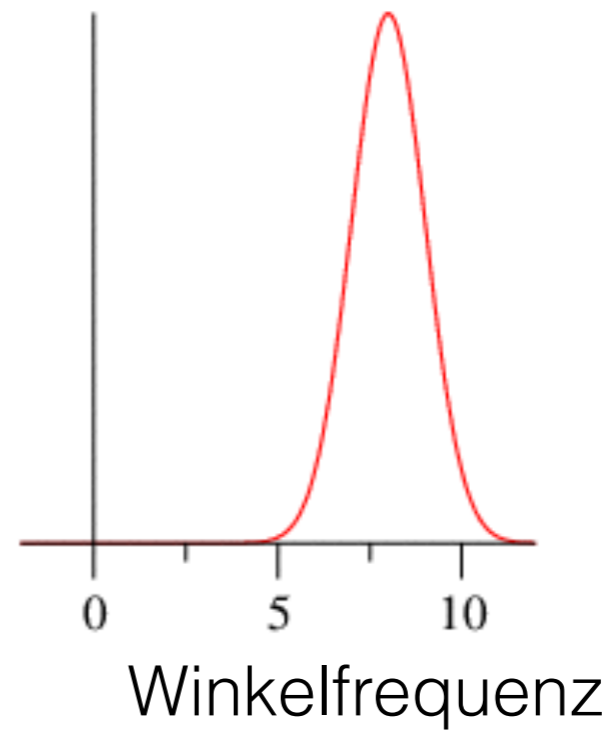
$\sigma=3$



$\sigma=5$

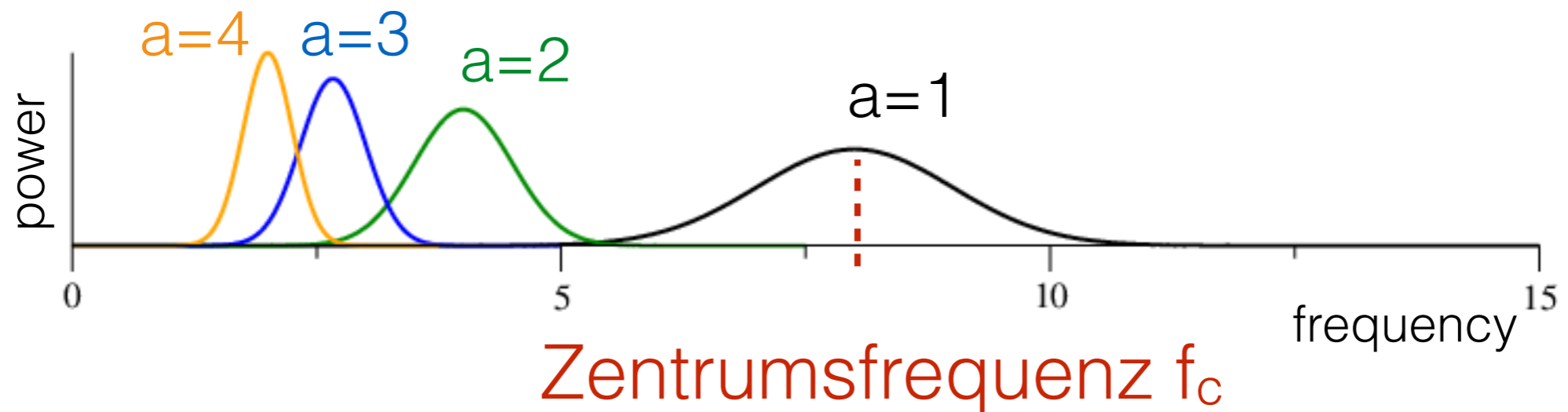


$\sigma=8$



Eigenschaft: verschiedene Skalen / Frequenzen

Beispiel:

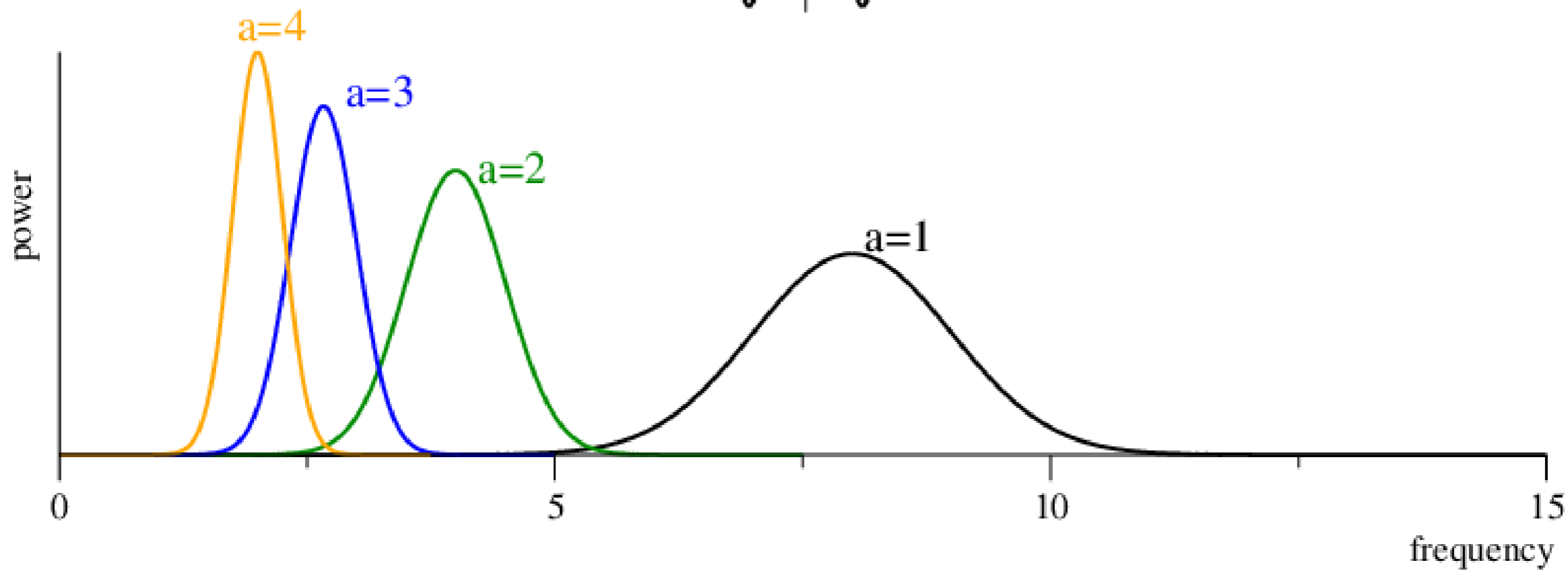
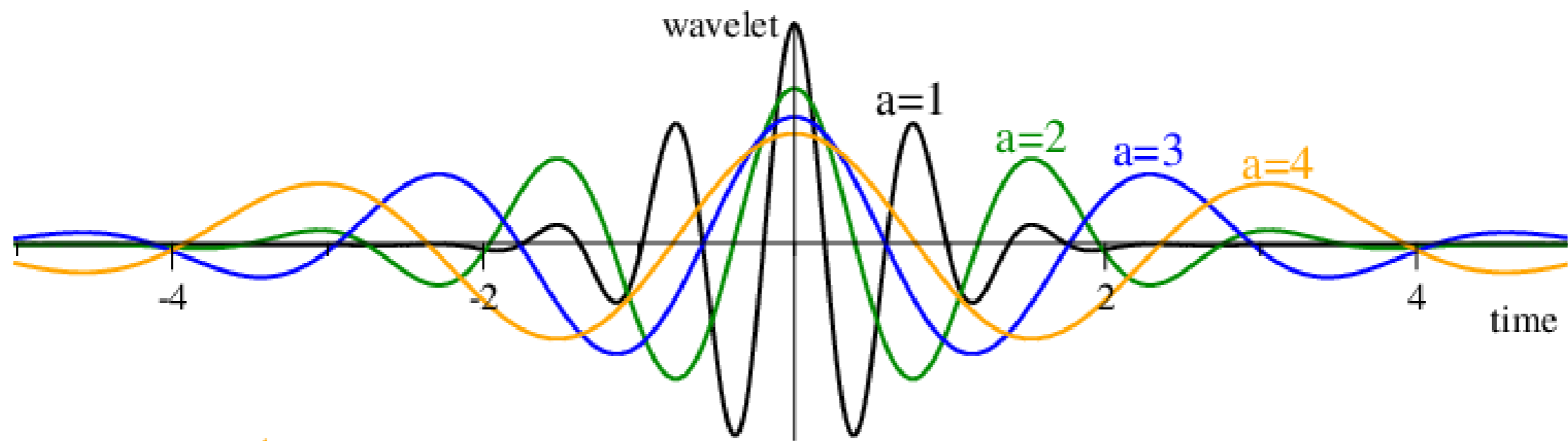


- jedes wavelet hat eine Frequenz f_c mit maximaler Leistung

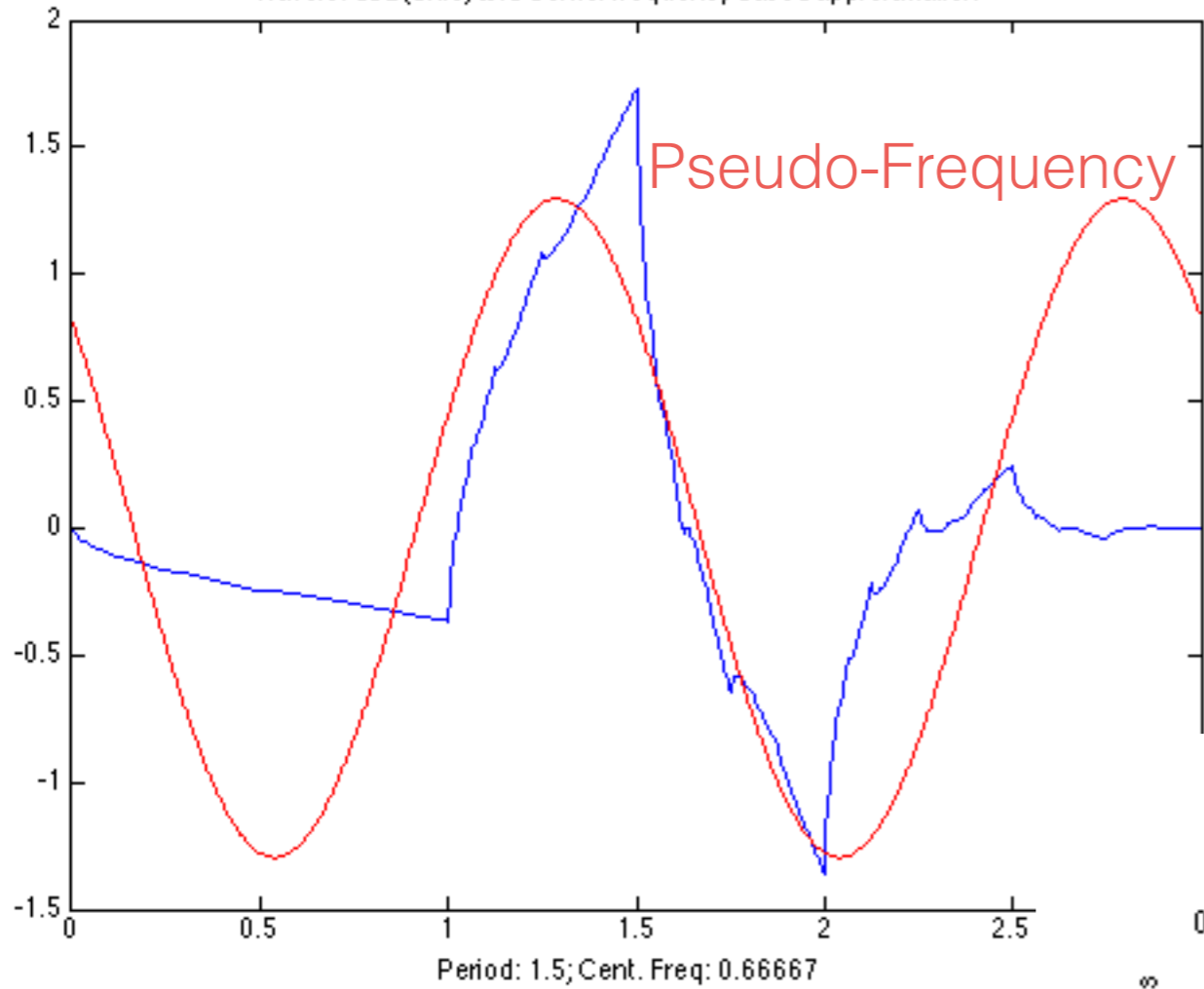
- Skalenfaktor verkleinert diese Frequenz mittels $\frac{f_c}{a}$

- eine *Pseudo-Frequenz* ist definiert als $f_p = \frac{f_c}{a\Delta t}$

Δt : sampling time

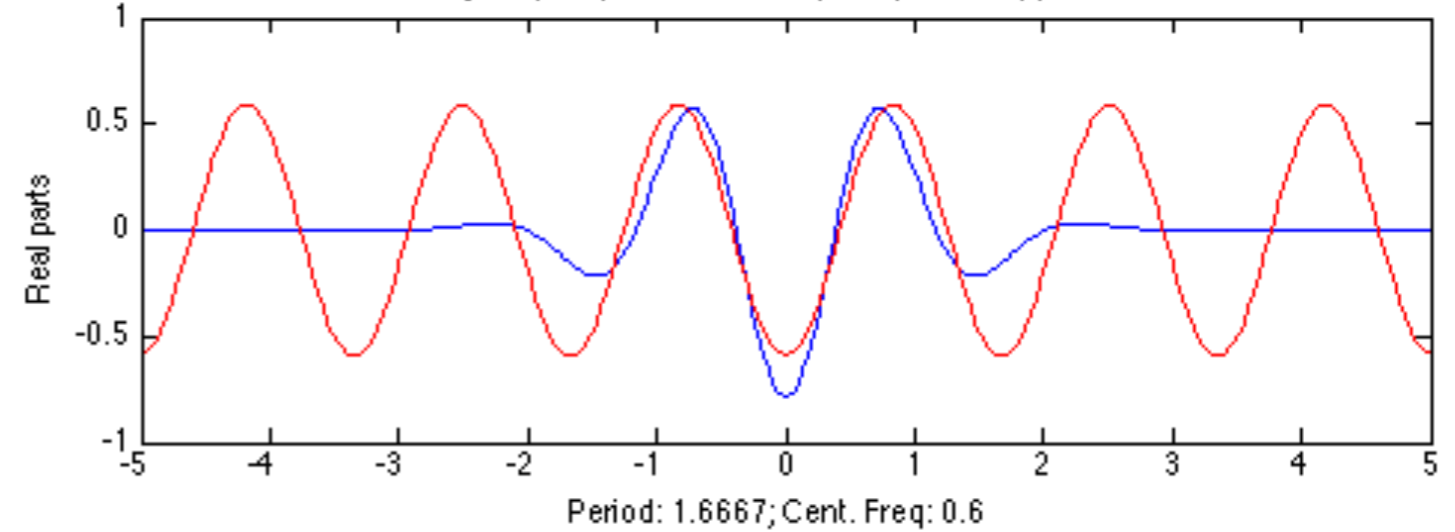


Wavelet db2 (blue) and Centerfrequency based approximation

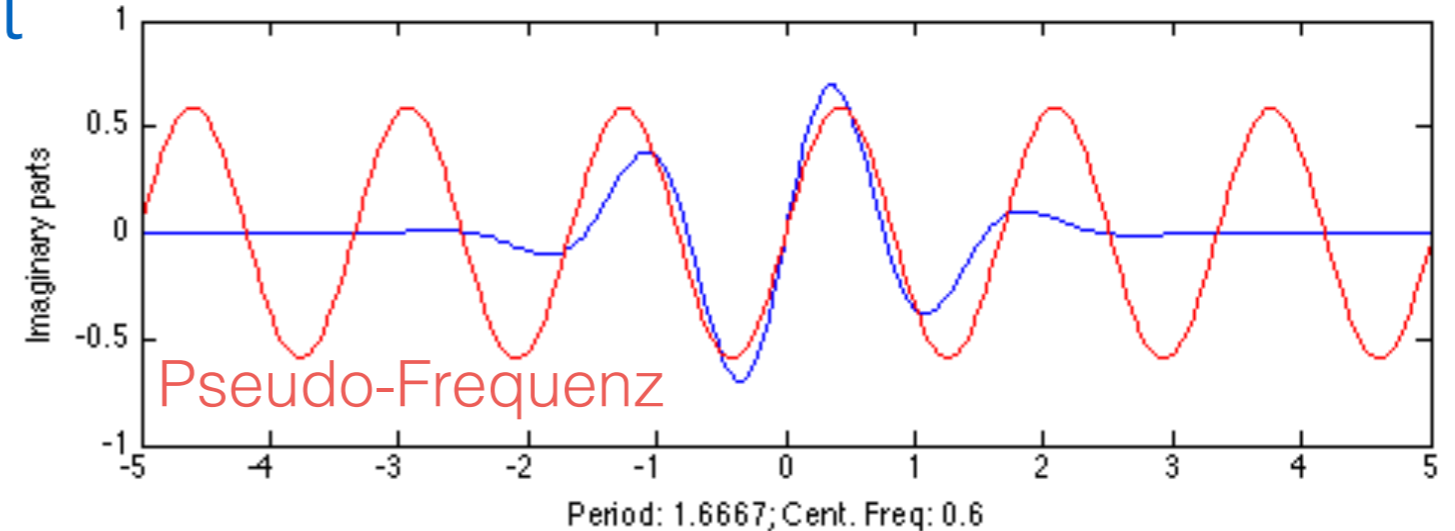


realwertiges Daubechies wavelet

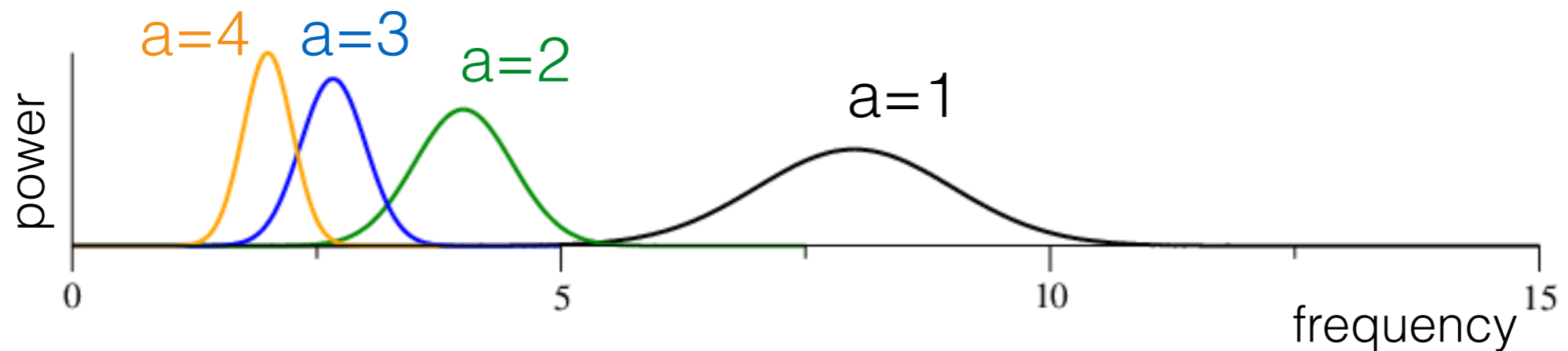
Wavelet cgau6 (blue) and Centerfrequency based approximation



komplexes Gauss wavelet



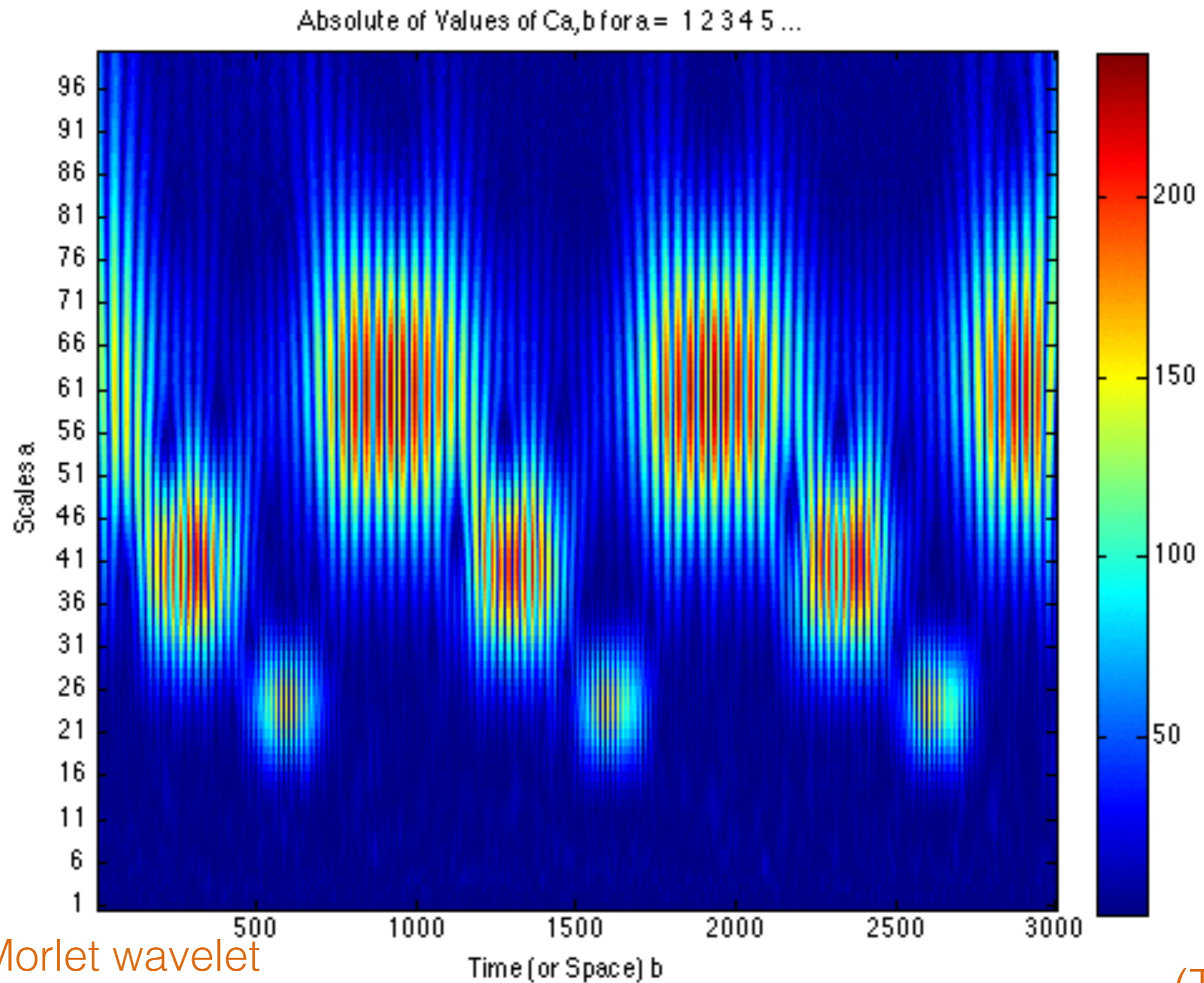
Eigenschaft: Energieerhaltung



- Energieerhaltung : Fläche unter der Kurve ist konstant
- je grösser die Skala, desto höher ist die Leistungsspitze
- **je kleiner die Frequenz, desto höher ist die Leistungsspitze**

Beispiel: **Skalogram**

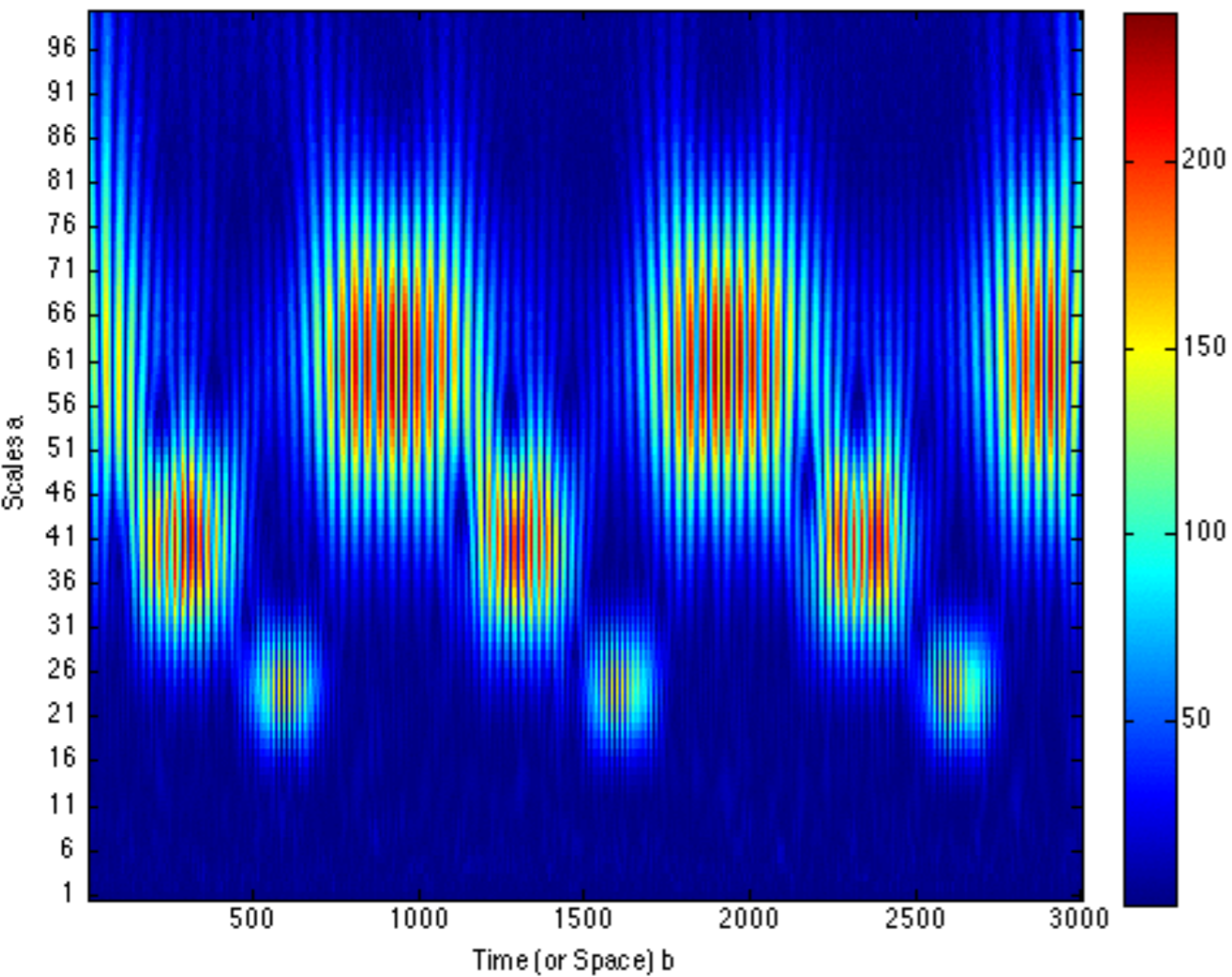
(angewandt auf Transiente Oszillationen)



reales Morlet wavelet

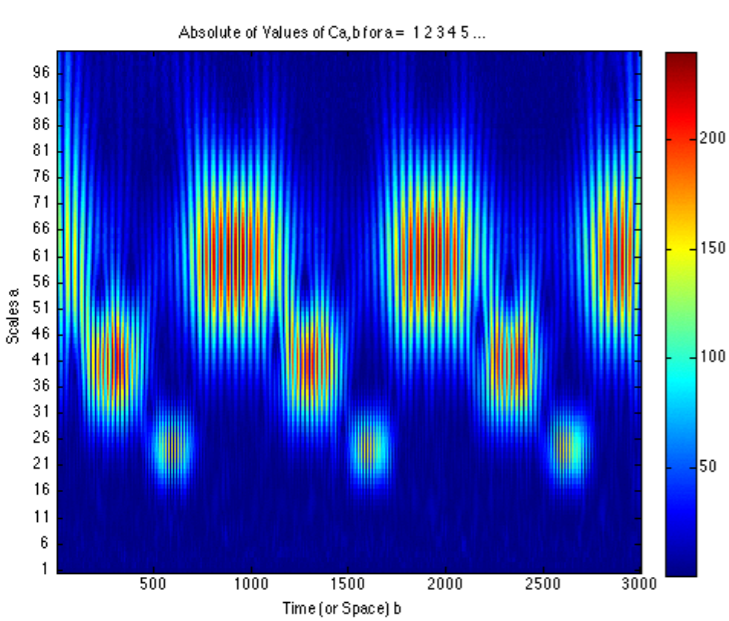
(TF_12.m)

Absolute of Values of $C_{a,b}$ for $a = 1\ 2\ 3\ 4\ 5 \dots$



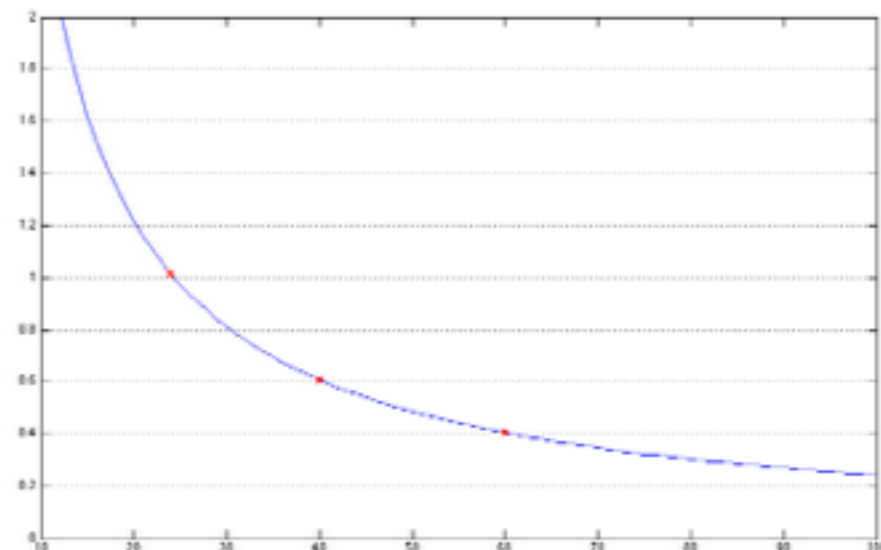
Nachteil:

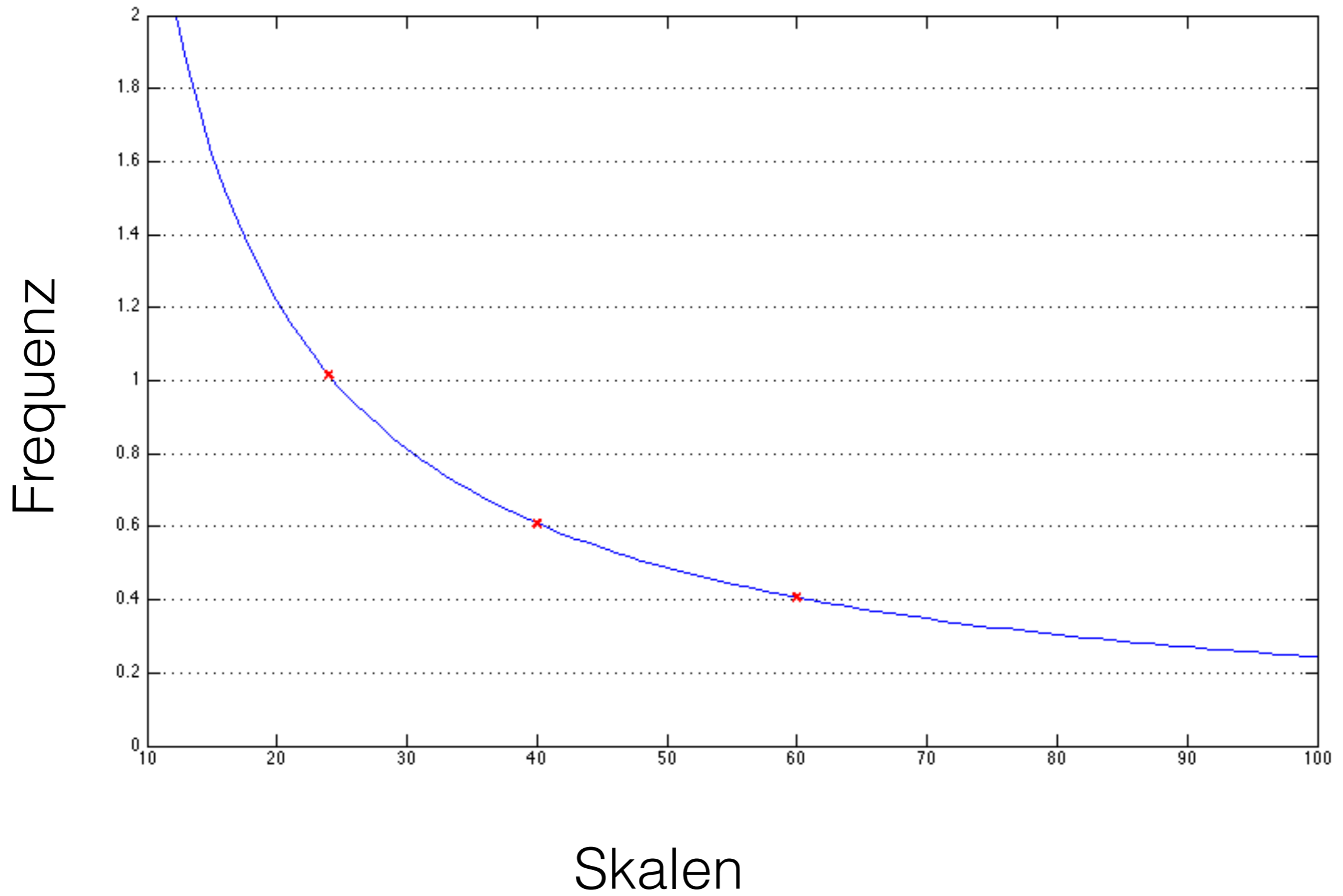
1. feine Unterstruktur der Leistungsspitzen
2. kleine Leistung bei kleinen Skalen
3. ausgedehnte Spektralspitzen
4. Relation zu Frequenz nicht klar



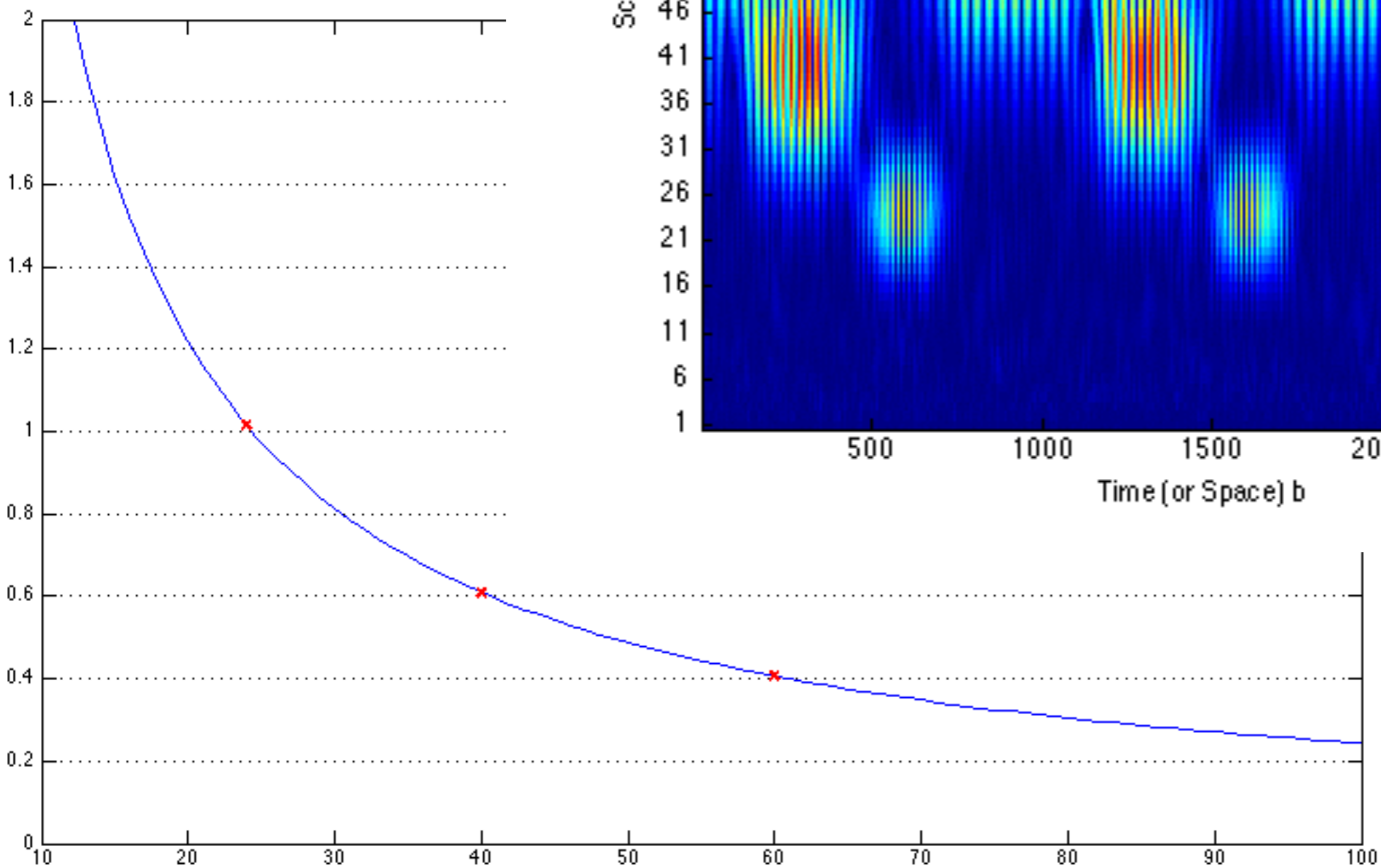
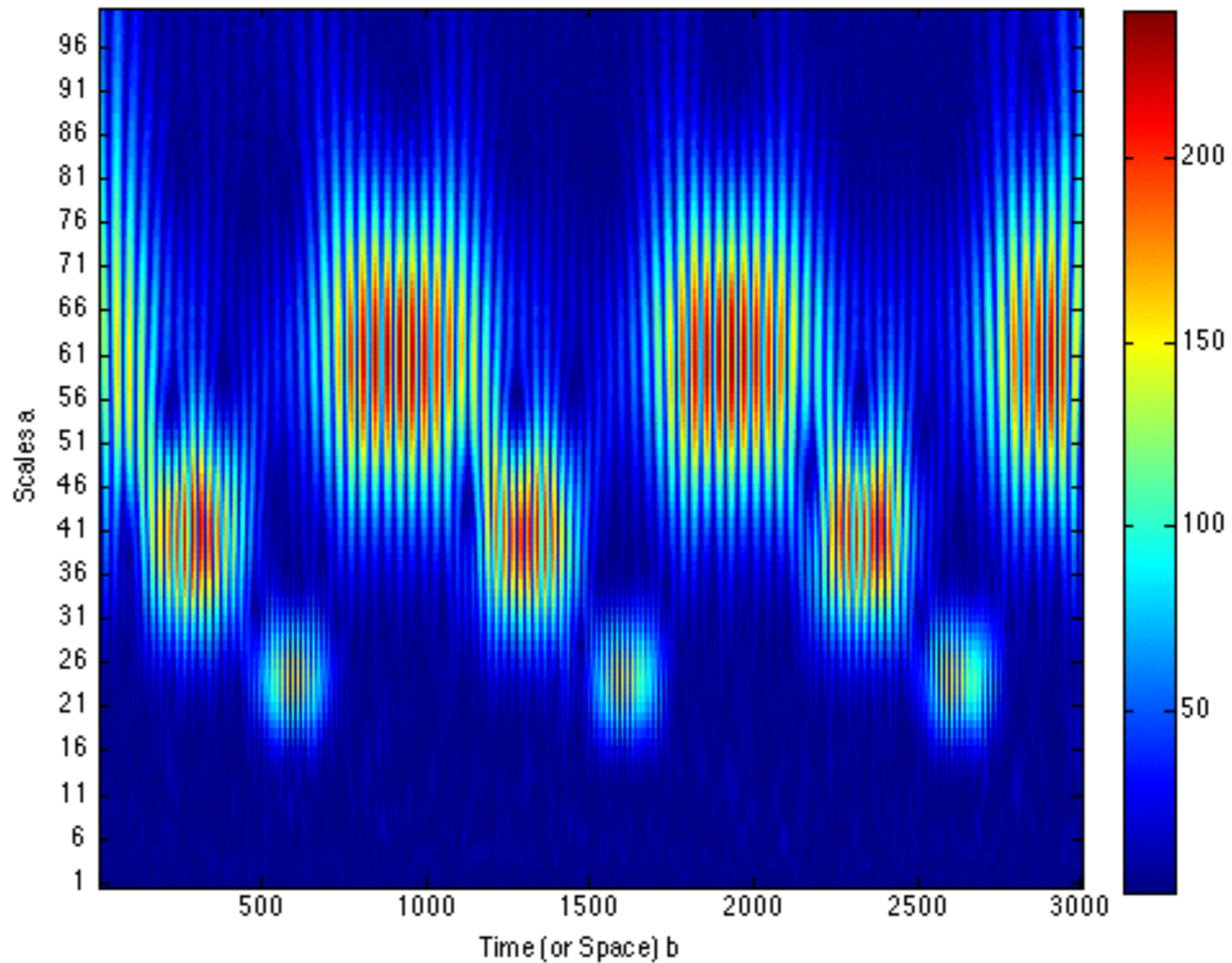
Erklärungen:

1. Unterstruktur
detektiert Maxima und Minima des Signals
2. kleine Leistung bei kleinen Skalen
Energieerhaltung
3. ausgedehnte Leistungsspitzen
mehr Skalen bei bei kleinen Frequenzen
4. Relation zu Frequenz unklar



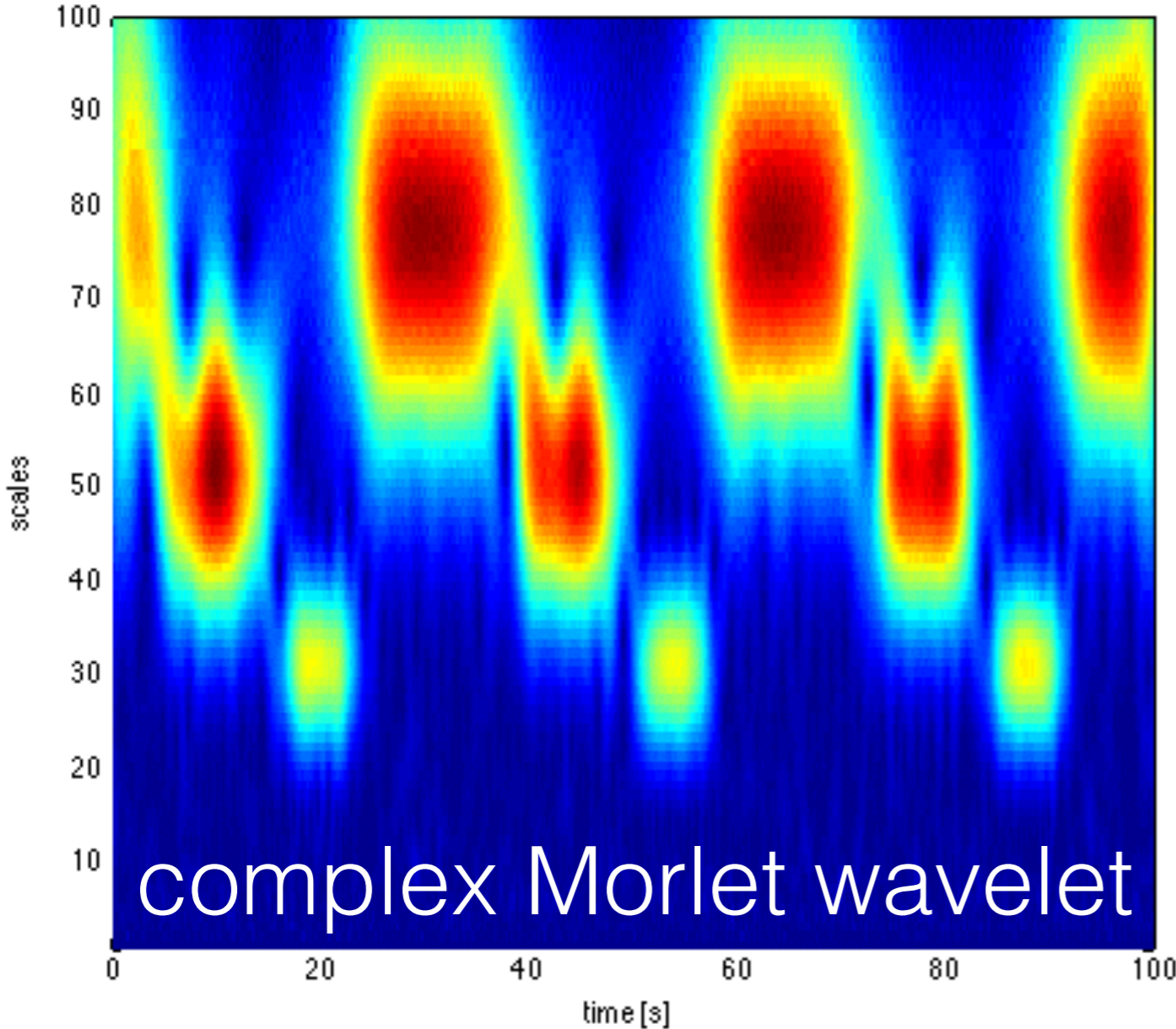


Absolute of Values of $C_{a,b}$ for $a = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \dots$



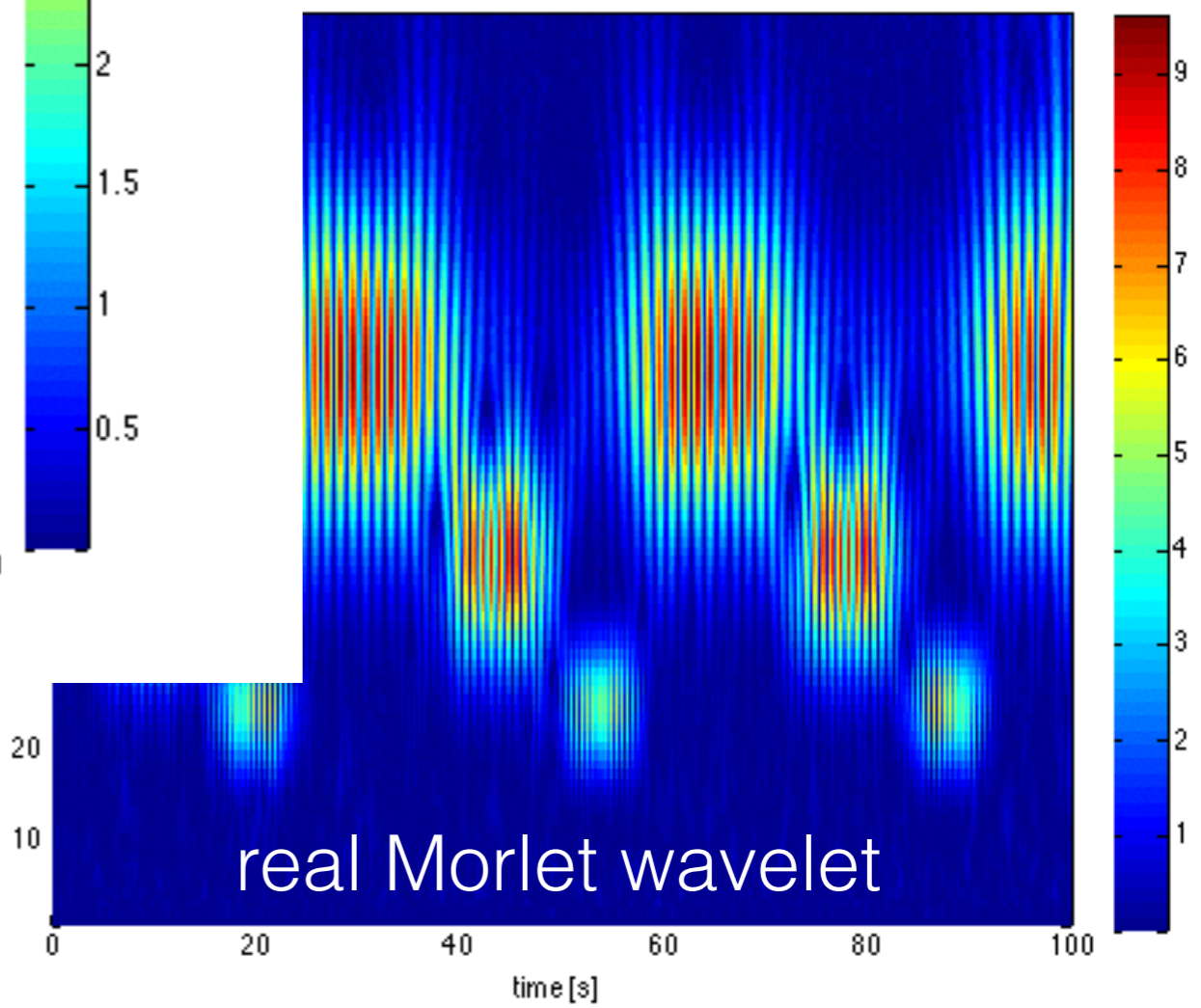
Verbesserungen:

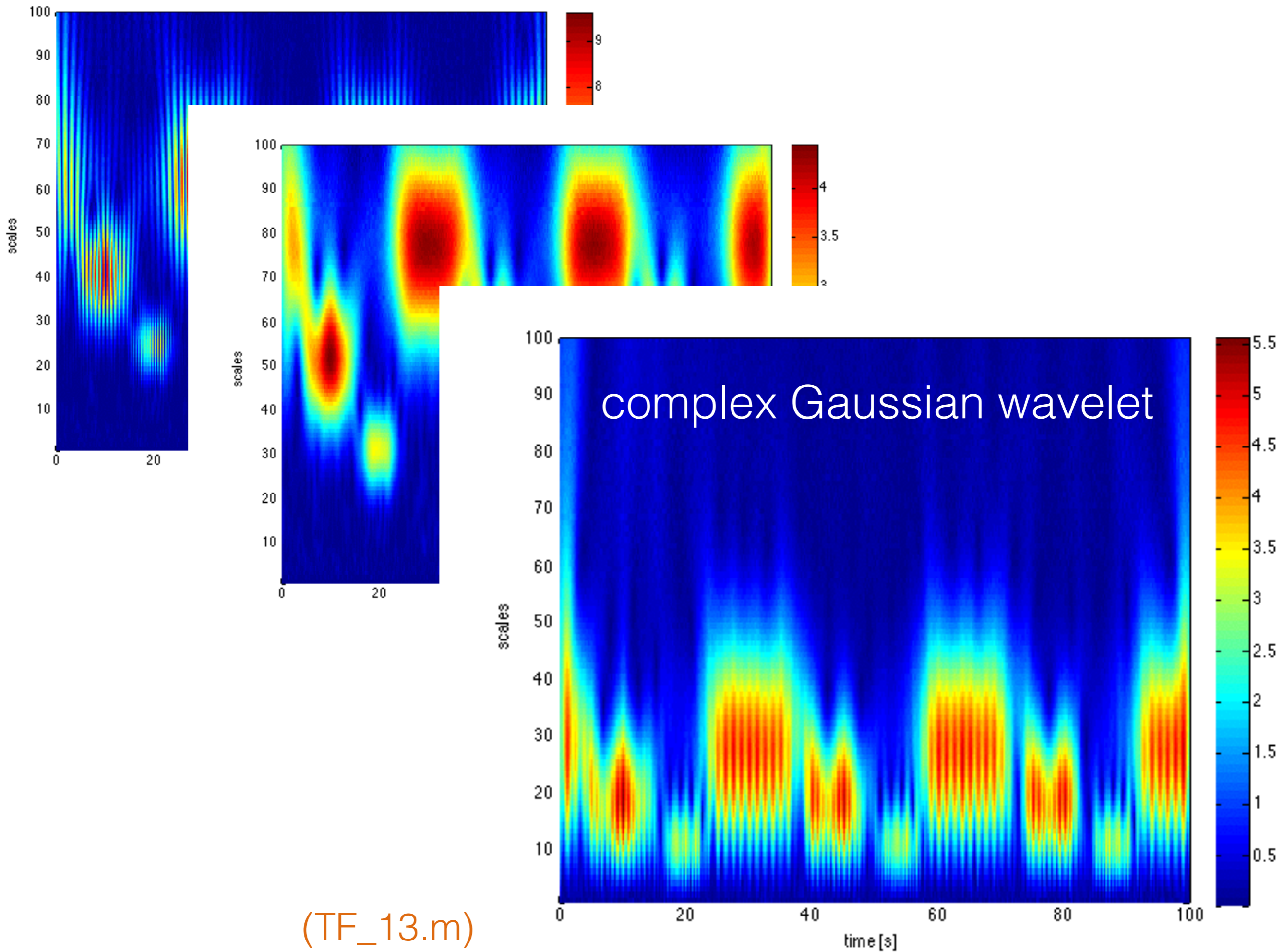
1. Unterstruktur



(TF_13.m)

bessere Wahl des wavelets





Beispiele für wavelets

Komplexwertiges Morlet wavelet

$$\Psi(t) = k_1 e^{-t^2} (e^{-i\sigma t} - k_2)$$

realwertiges Morlet wavelet

$$\Psi(t) = k e^{-\sigma t^2} \cos(5t)$$

komplexwertiges Gauss wavelet

$$\Psi(t) = k e^{-\sigma t^2} e^{it}$$

Verbesserungen:

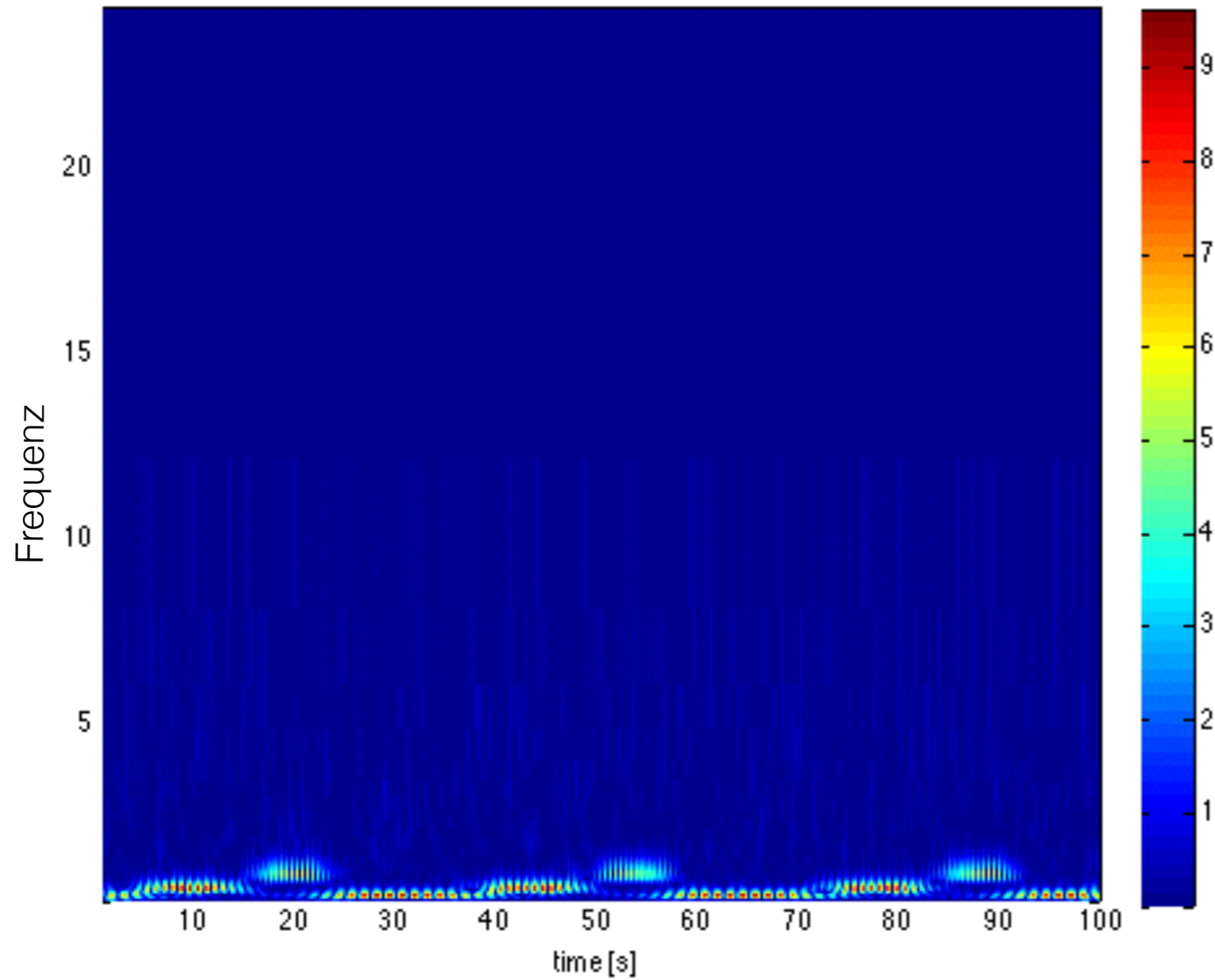
2. kleine Leistung bei kleinen Skalen

keine Verbesserung in klassischer Wavelet-Analyse

da Teil der Konstruktion !!!

Verbesserungen:

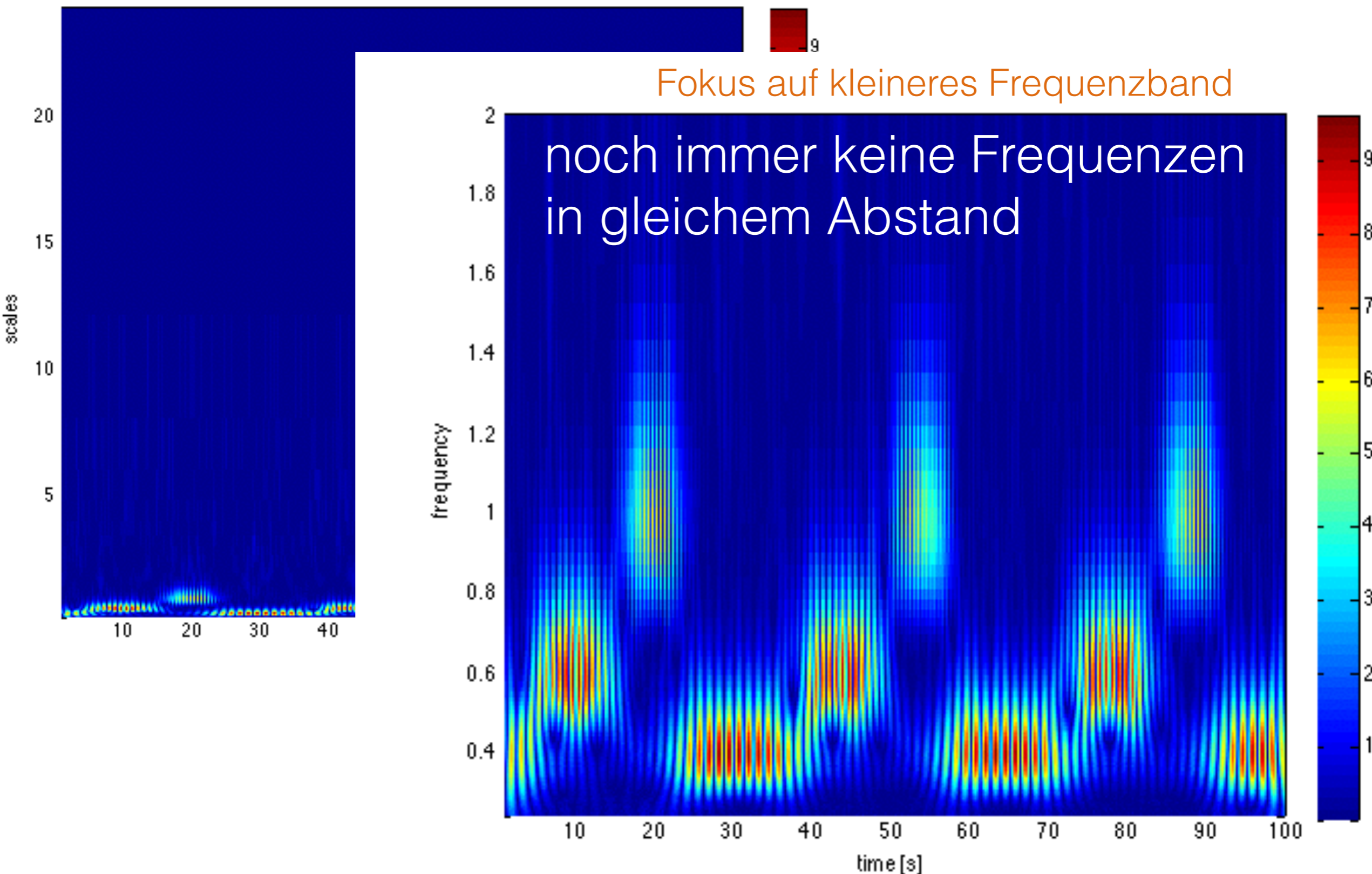
3. erweiterte Leistungsspitze

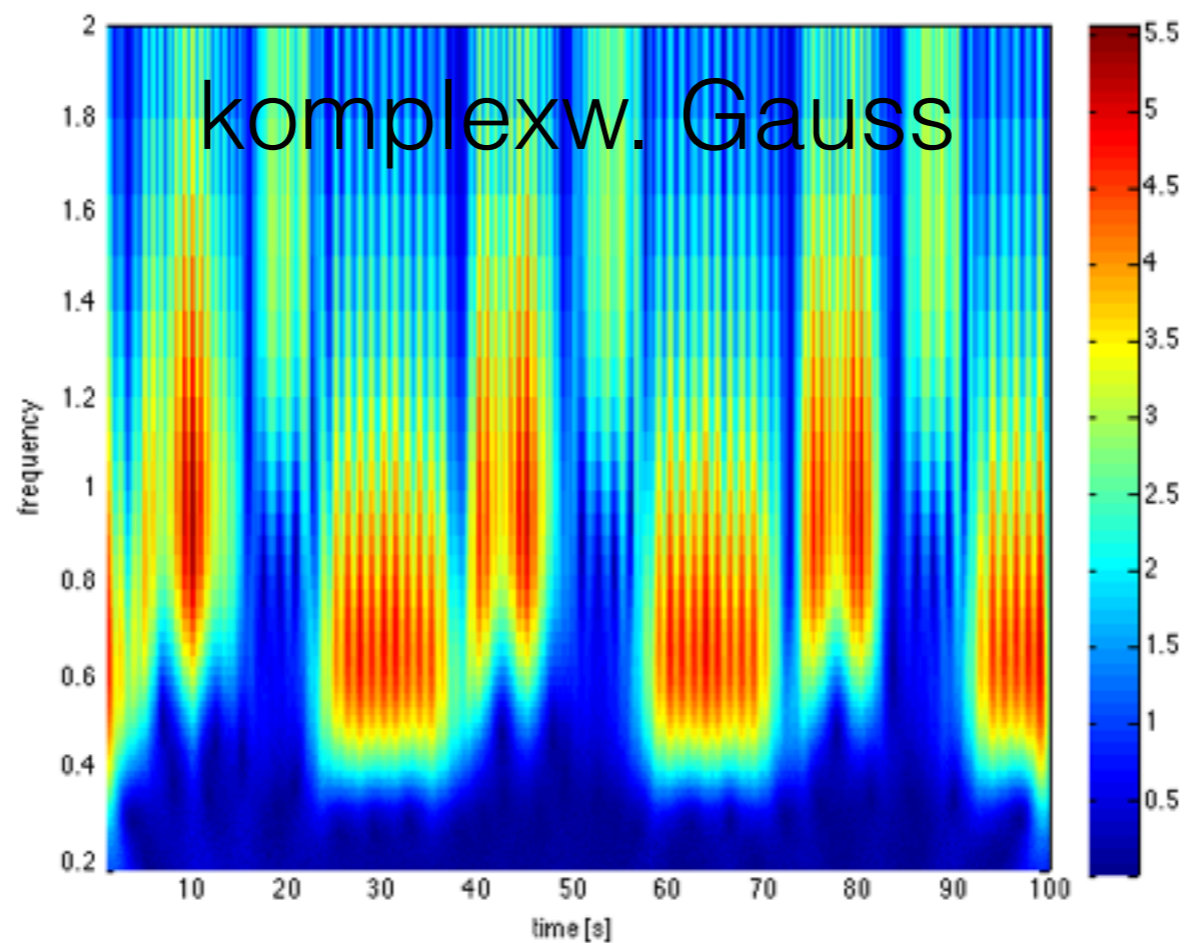
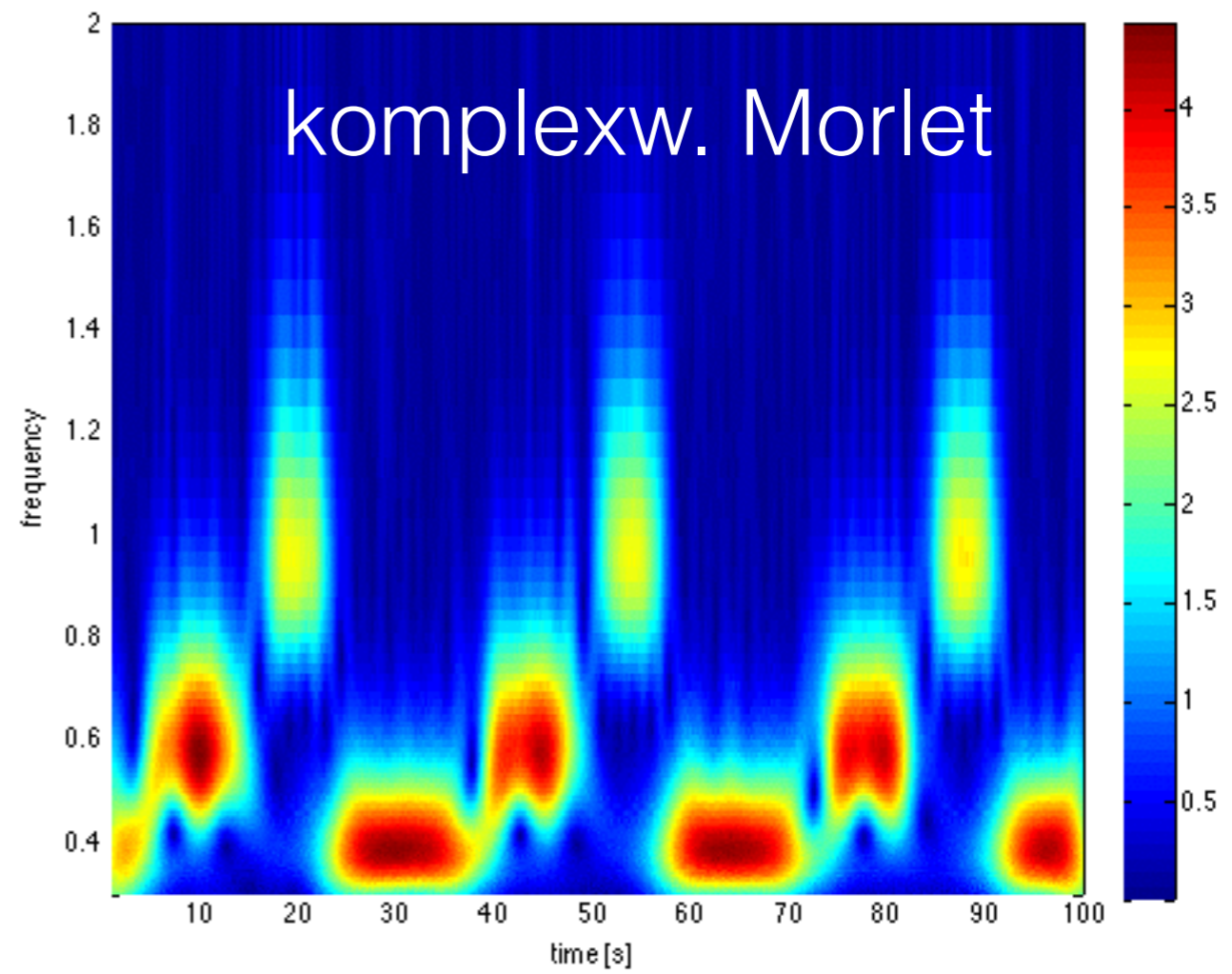
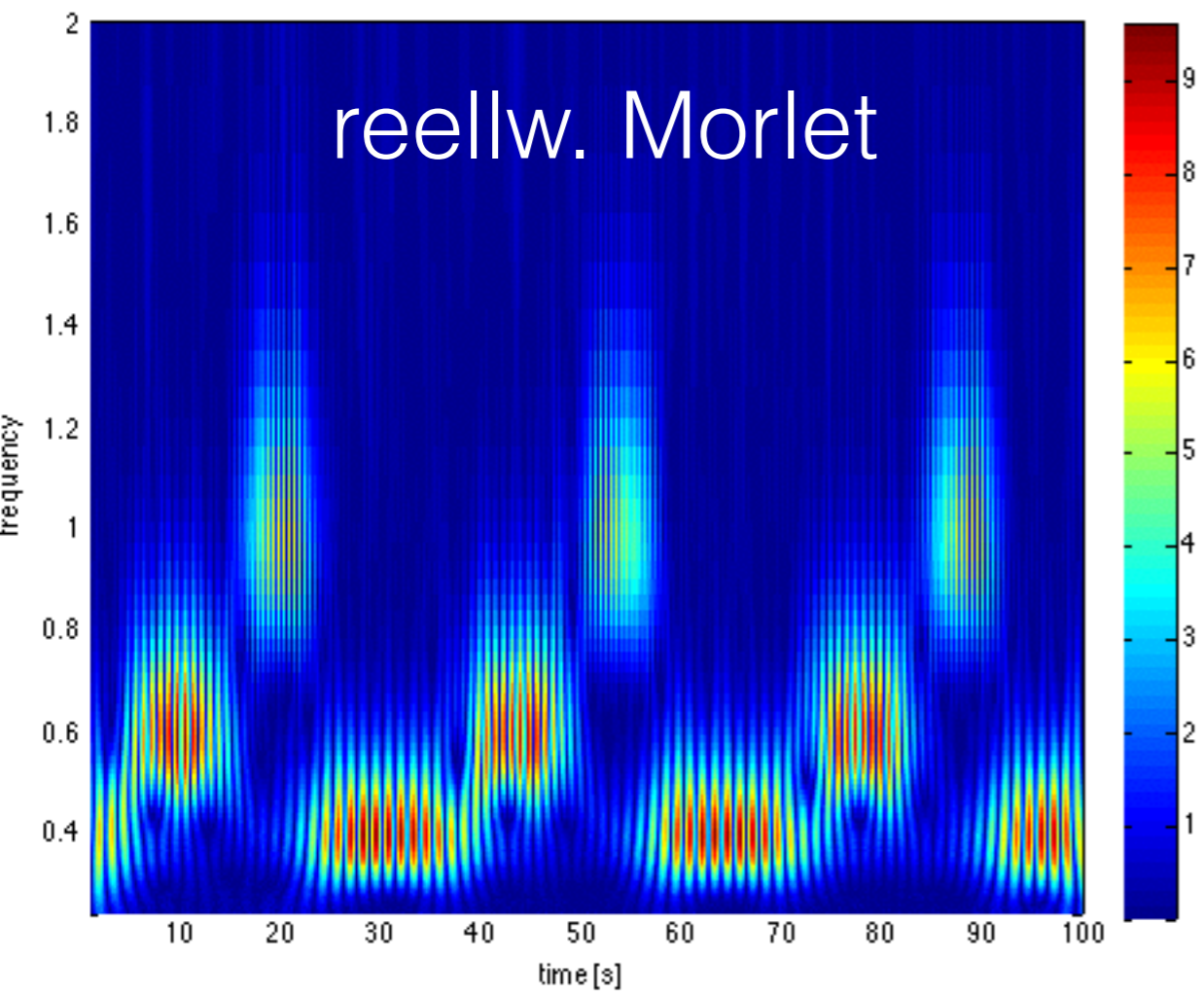


100 Skalen als
Frequenzen aufgetragen

Verbesserungen:

3. erweiterte Leistungsspitze

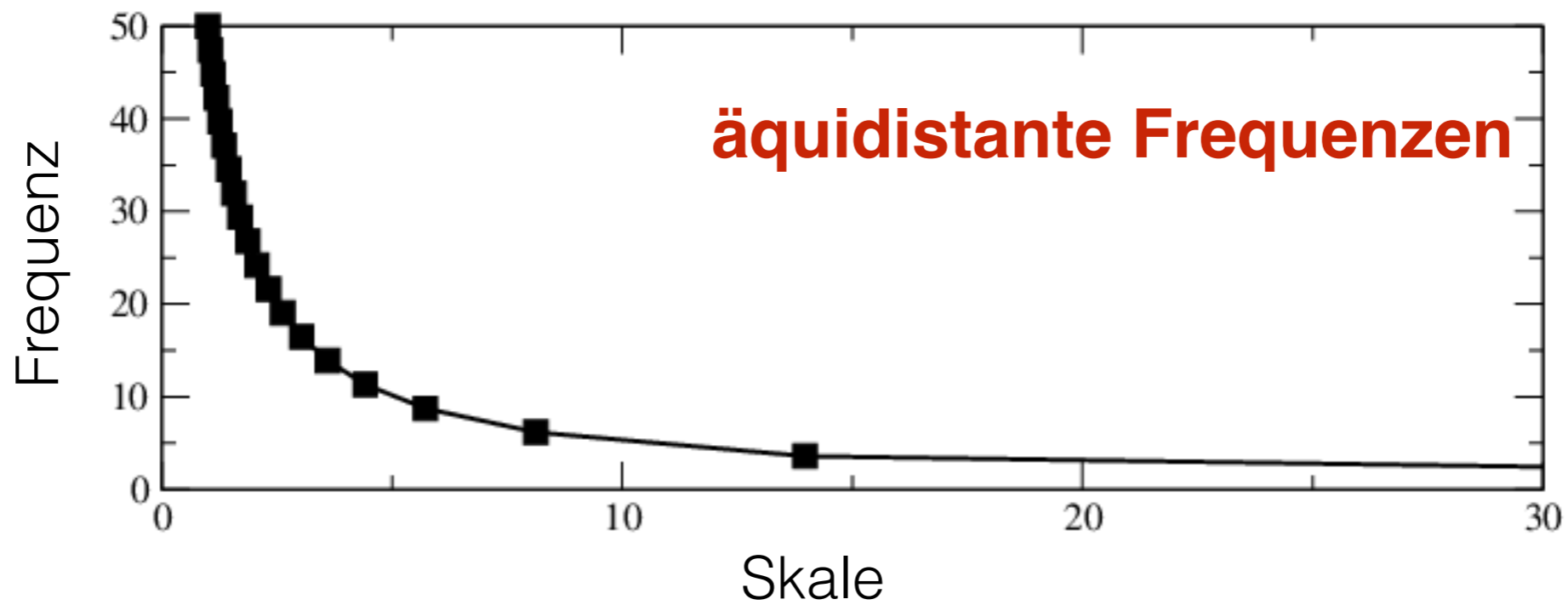
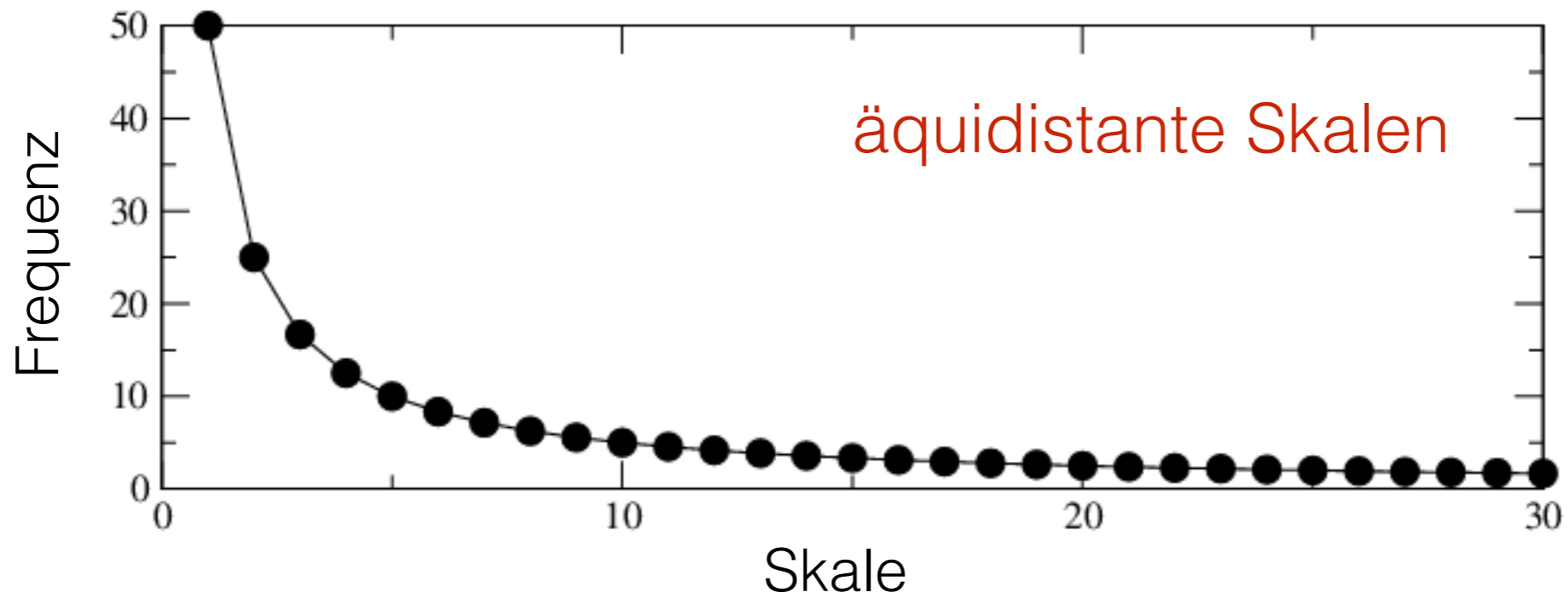




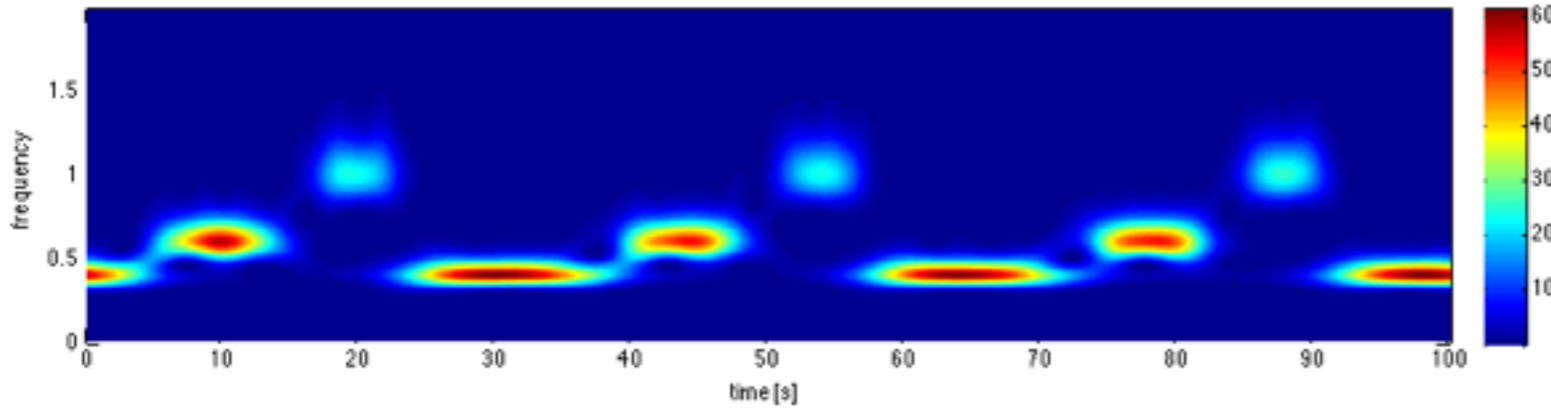
(TF_14.m)

- physikalische Welt der Messung:
Frequenzen sind interpretierbar
- Skalen eher nur für Theorie interessant
- Wahl:
Festlegung von Pseudo-Frequenzen, die von Interesse sind

Lösung:

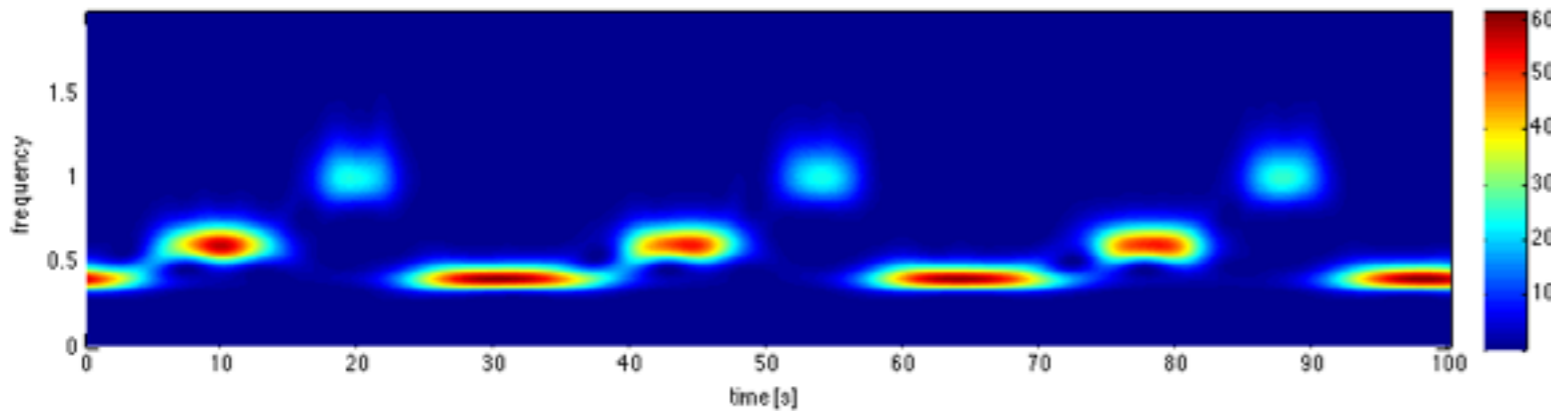


Nun mit regelmässigem Frequenzintervall



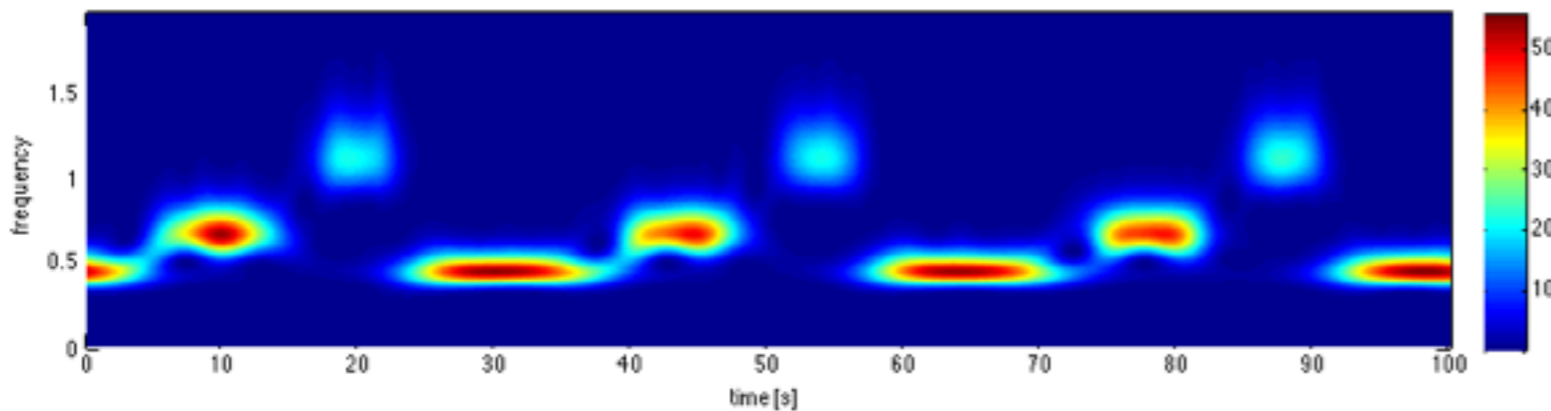
analytical Morlet

$$\tilde{\Psi}(f) = ke^{-(2\pi f - \omega_0)^2/2} \Theta(f)$$



nonanalytical Morlet

$$\tilde{\Psi}(f) = ke^{-(2\pi f - \omega_0)^2/2}$$



admissible Morlet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{Morlet}(t) dt = 0$$

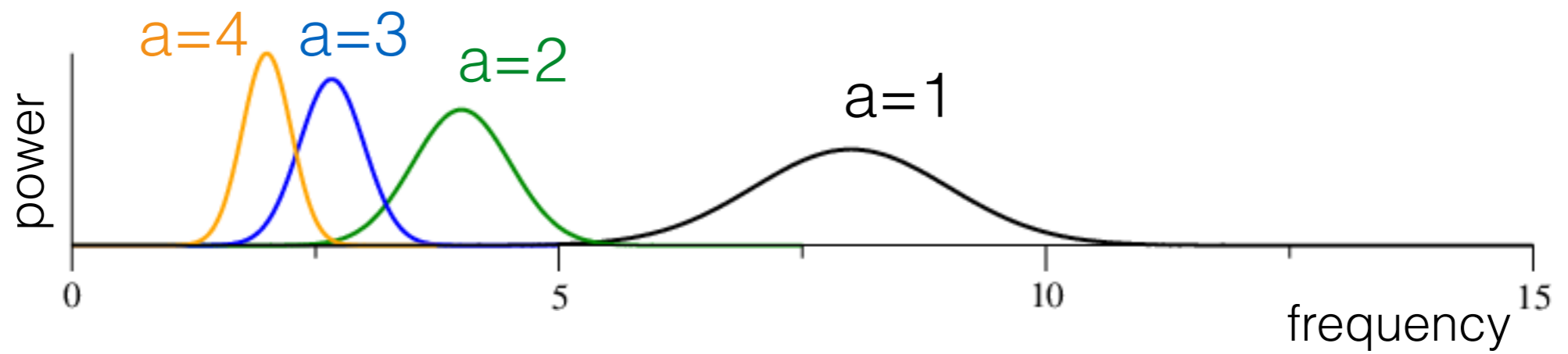
Diskrete Wavelet-Transformation

kontinuierliche W-Transformation

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{\Psi} \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

ist redundant, da a beliebig und ψ nicht orthogonal sind.

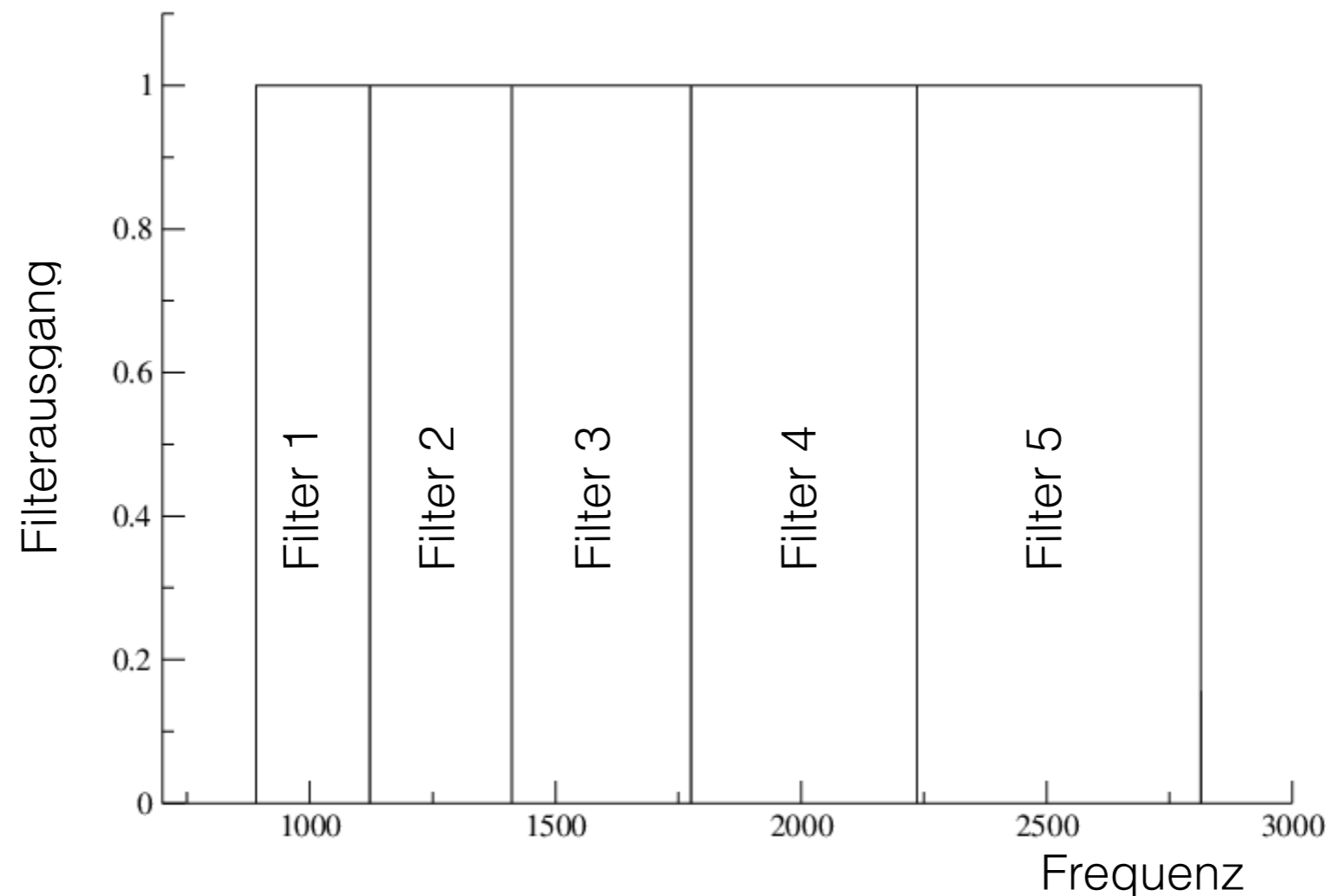
dies sieht man auch im Frequenzraum:



da Skalen beliebig:

CWT gut für Visualisierung, doch keine gute Analyse

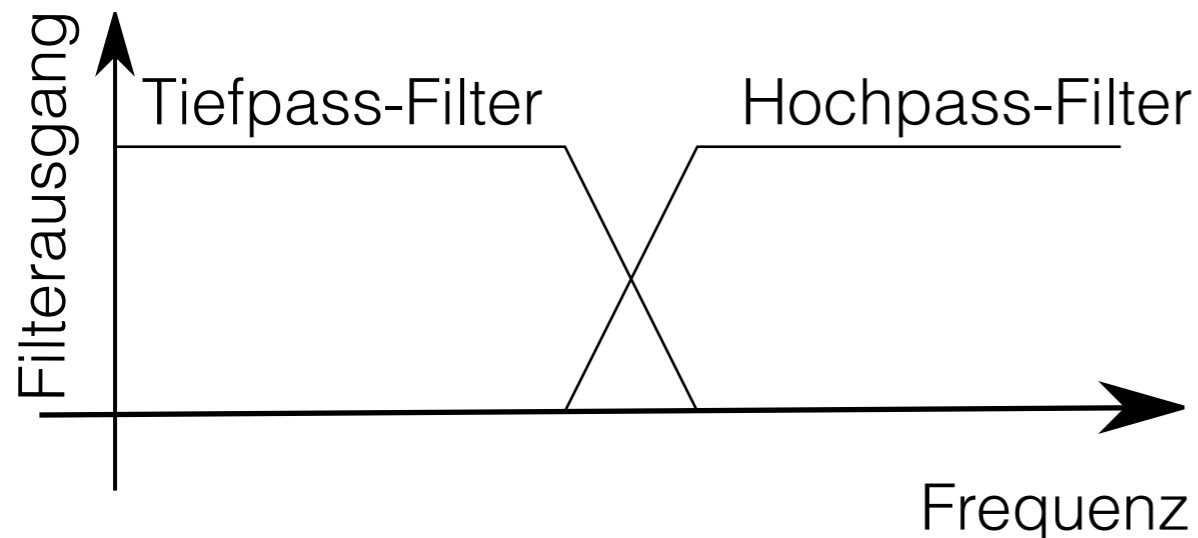
besser eine Analyse wie in Filterbanken



Filterbank

- System generiert Satz von Signalen $s_n(t)$ aus einem Signal $s(t)$
- Signale $s_n(t)$ entsprechen einem Frequenzbereich eines Bandpassfilters n
- Frequenzbereiche decken den Frequenzumfang des Signals vollständig ab.

Quadrature Mirror Filter:



$H_0(z)$, $H_1(z)$ sind Filterfunktionen

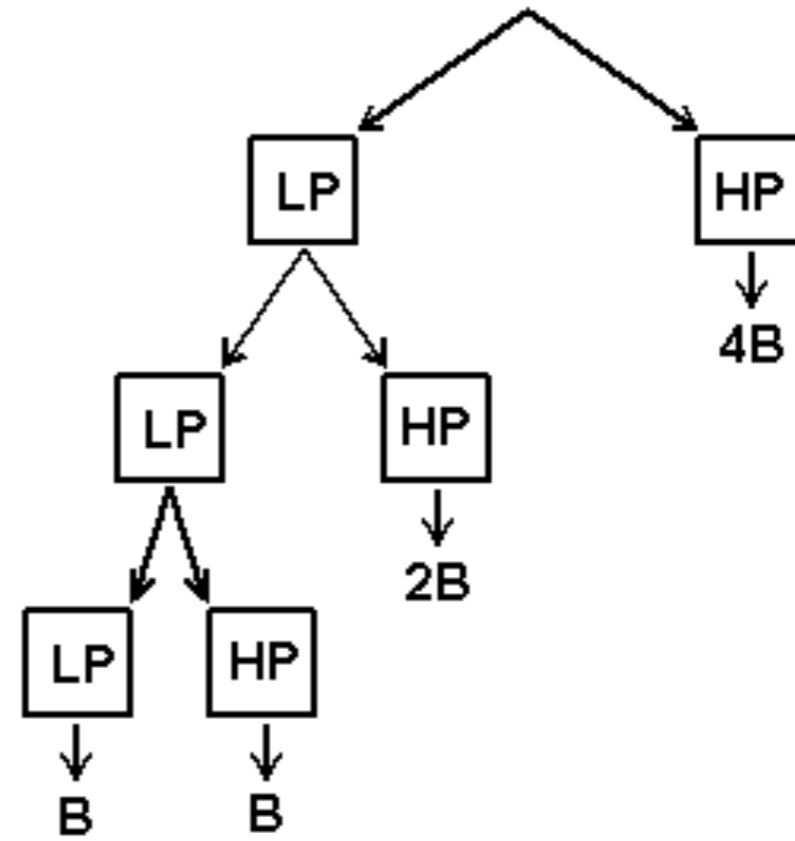
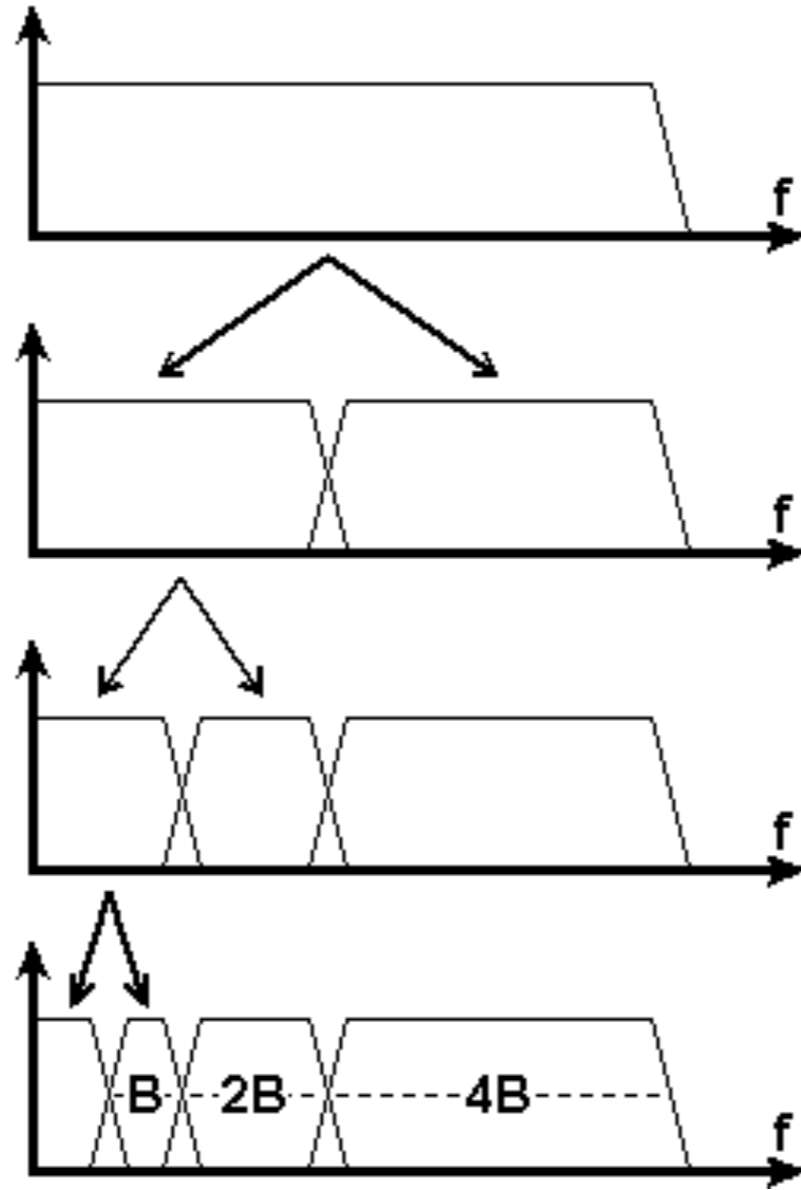
$$H_0(z) = H_1(-z)$$

$$|H_0(e^{i\omega})|^2 + |H_1(e^{i\omega})|^2 = 1$$

(Abtastrate auf 2π normiert)

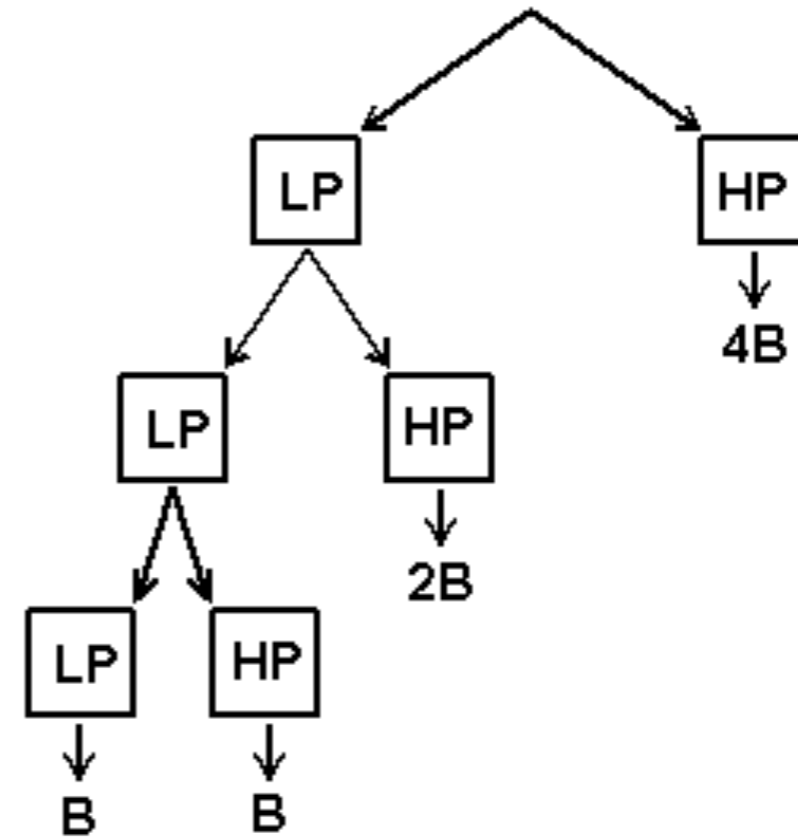
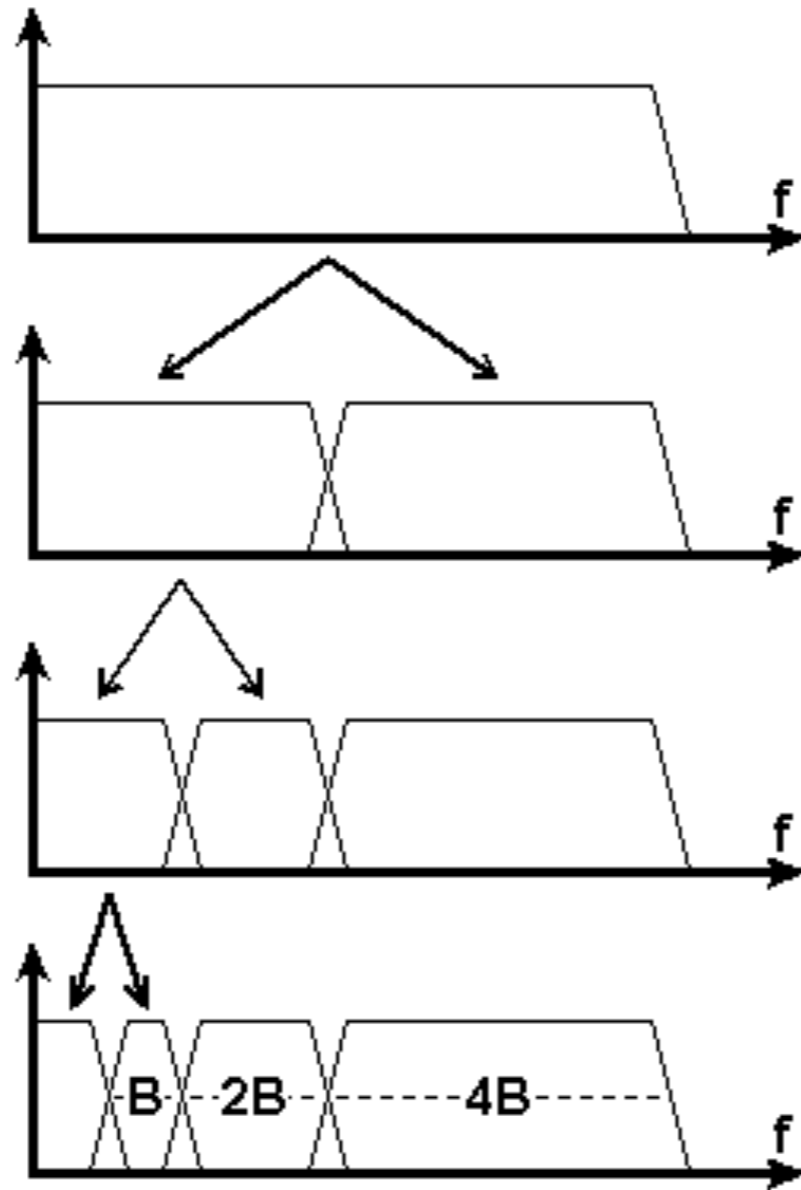
Idee:

Frequenzraum

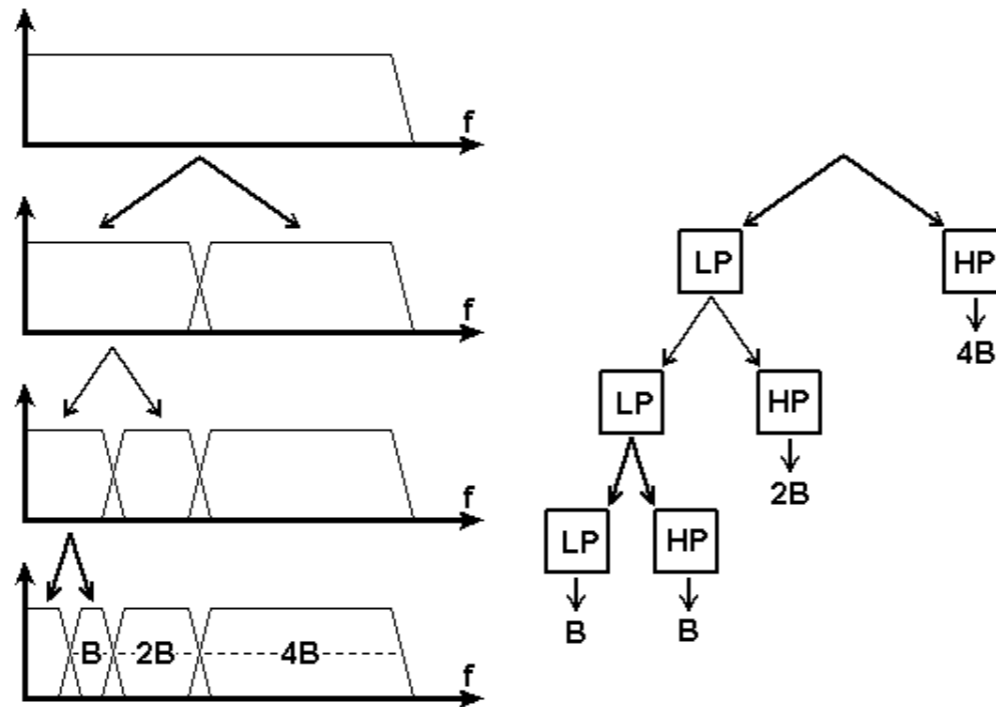


Idee:

Frequenzraum



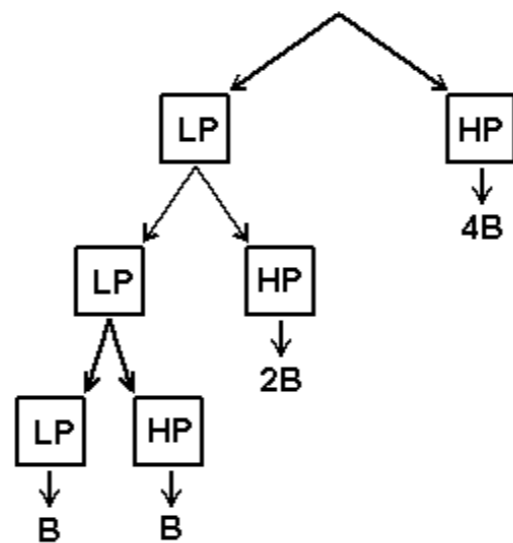
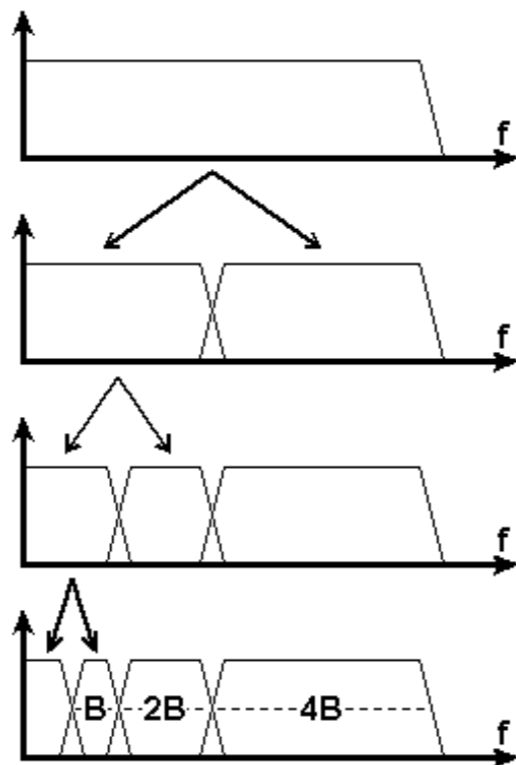
- man wendet *quadrature mirror filter* an
- nur Spektrum von Tiefpass-Signal wird halbiert



Filterbanken mit konstantem Q.

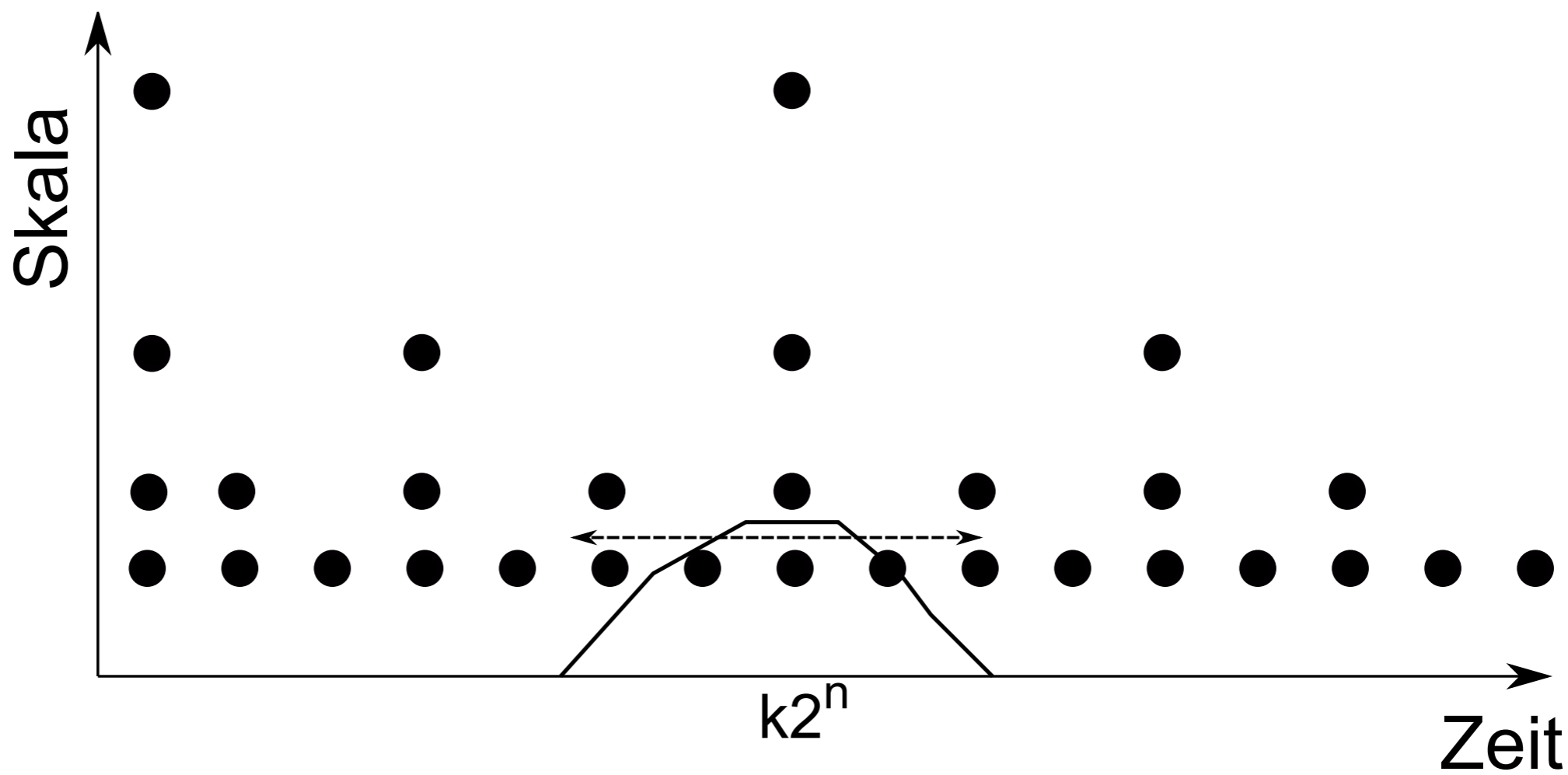
- man wendet *quadrature mirror filter* an
- nur Spektrum von Tiefpass-Signal wird halbiert
- konstantes Q der Filter als Konsequenz
- Tiefpass-Signal hat kleinere Nyquist-Frequenz
 - kann mit halb so vielen Punkten beschrieben werden
 - down-sampling des Signals ist effektiv

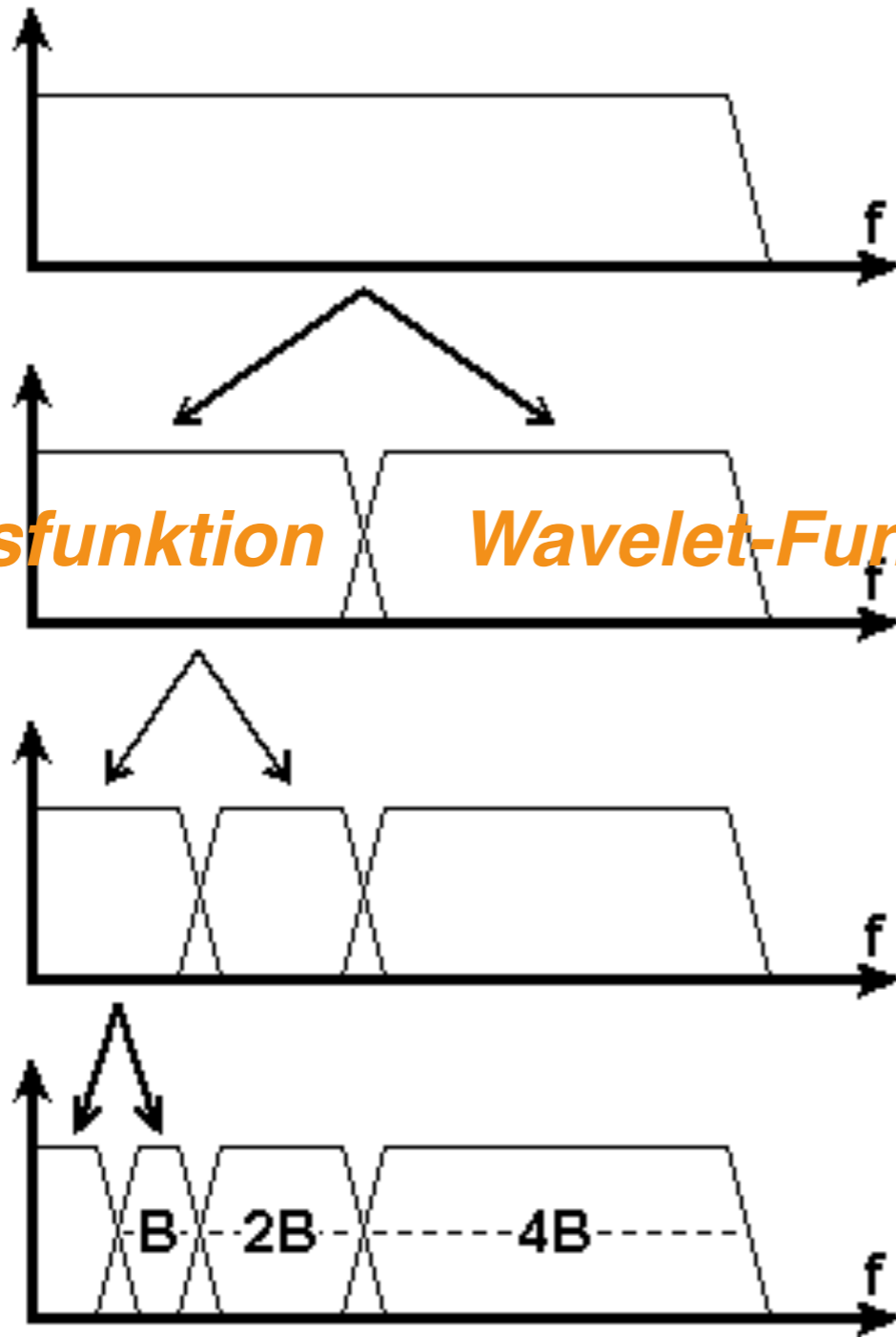
Frequenzraum



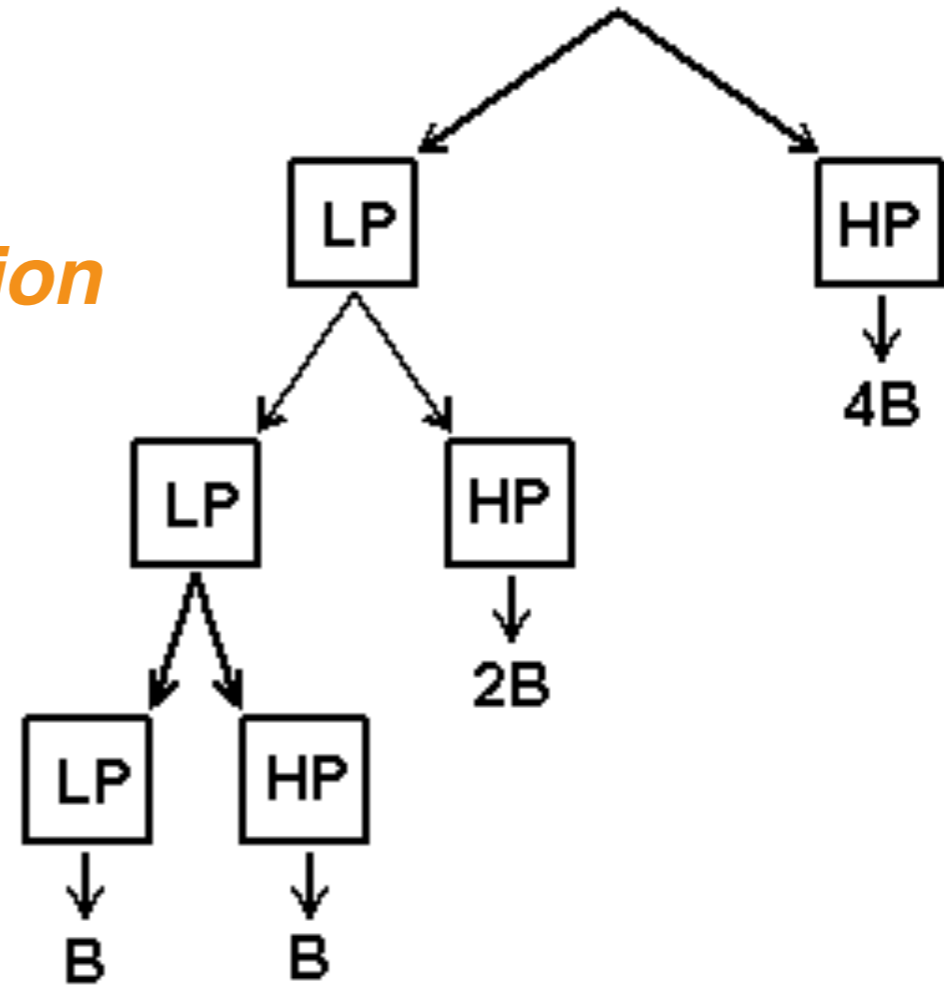
Filterbanken mit konstantem Q.

Zeitraum





Skalierungsfunktion *Wavelet-Funktion*



mathematische Umsetzung:

$$\begin{aligned}\Psi_{b,a} &= \frac{1}{\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Psi^* \left(\frac{t-a}{b} \right) dt \\ &= \sqrt{b} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\nu) \tilde{\Psi}^*(b\nu) e^{i2\pi\nu a} d\nu\end{aligned}$$

b: Skala a: Dilatation

Variation der Wavelet-Transformation:

Diskretisierung der Skalen und Dilatationen:

$$b = s^n, \quad a = ks^n, \quad n, k \in \mathbb{N}_0$$

typischerweise:

$$s = 2$$

$$\Gamma_{n,k} = \frac{1}{\sqrt{s^n}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Psi^* \left(\frac{t - k2^n}{s^n} \right) dt$$

$$= \sqrt{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\nu) \tilde{\Psi}^* (2^n \nu) e^{i2\pi\nu k2^n} d\nu$$

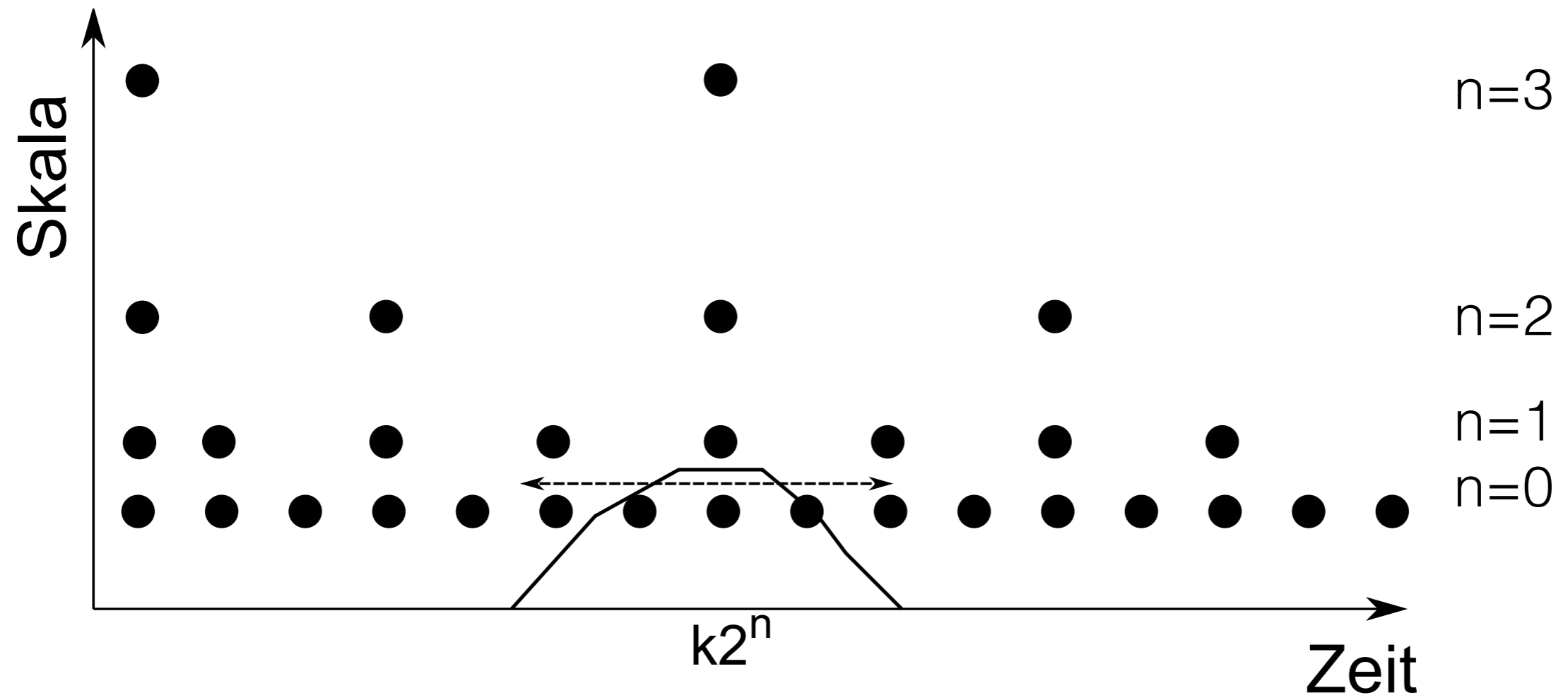
Maximum von *mother wavelet*: $t_{max} = k2^n$

$$n = 0 : t_{max} = 0, 1, 2, 3, 4, \dots N$$

$$n = 1 : t_{max} = 0, 2, 4, 6, 8, \dots N$$

$$n = 2 : t_{max} = 0, 4, 8, 12, 16, \dots N$$

“dyadisches Abtasten”



nochmal:

$$\Gamma_{n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Psi_{n,k}^*(t) dt$$

$$\Psi_{n,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s^n}} \Psi \left(\frac{t - k2^n}{s^n} \right) dt$$

diskrete Wavelets

da
$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{n,k}(t) \Psi_{m,l}^*(t) dt = \delta_{nm} \delta_{kl}$$

kann man mittels der DWT das Signal wieder rekonstruieren:

$$s(t) = \sum_{n,k} \Gamma_{n,k} \Psi_{n,k}(t)$$