

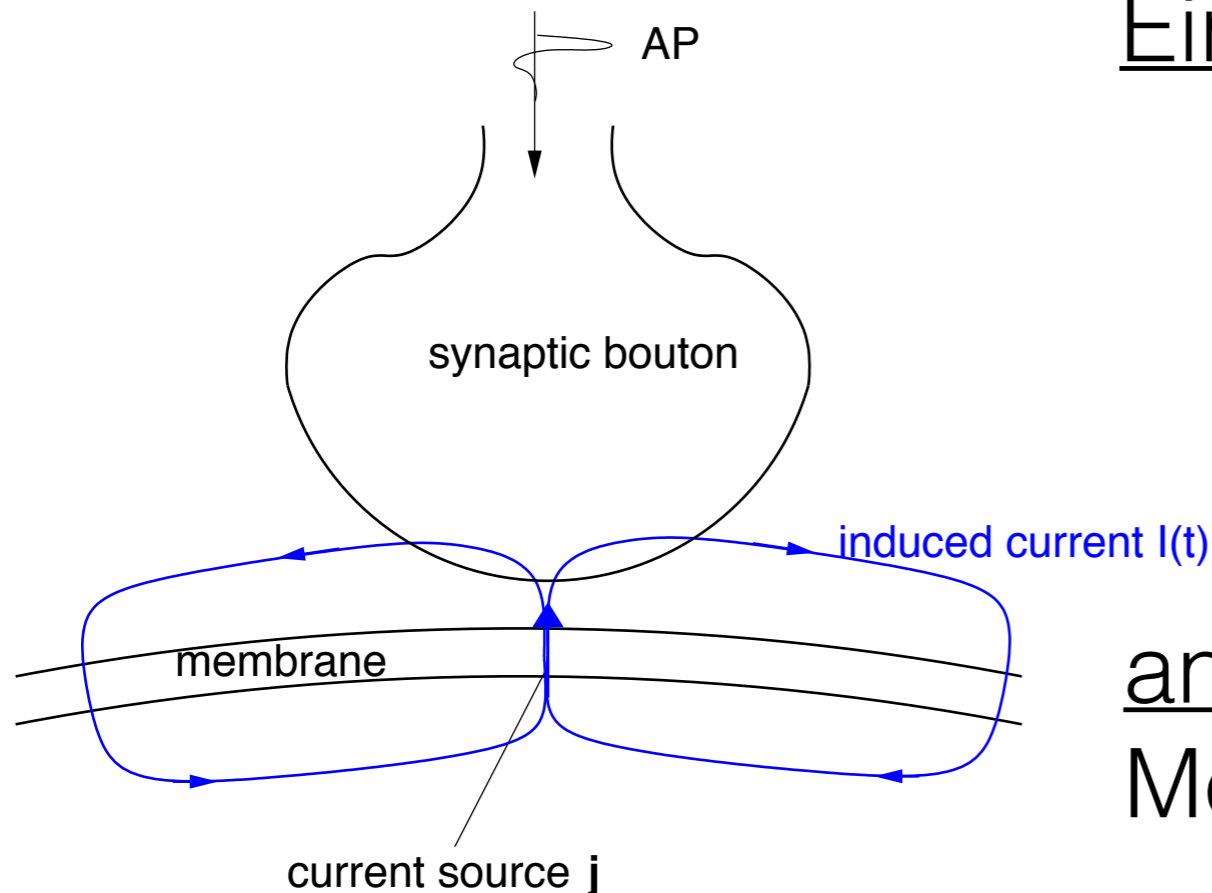
# Spektralanalyse physiologischer Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 7

# Beispiel: Tiefpass-Filter

## einzelne Synapse



## induzierter Strom

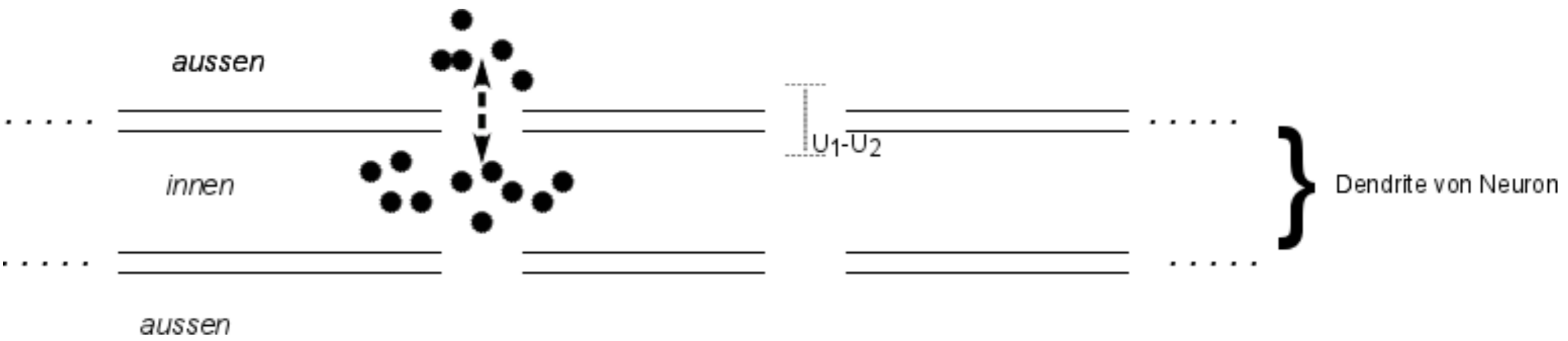
Eingang: Folge von spikes

$$I(t) = \sum_i I_0 \delta(t - t_i) , t_{i+1} > t_i$$

antwortendes System:  
Membran mit Ionenkanal

Ausgang: Membranspannung

$$V = V(t) ?$$



Membran als Kondensator:

$$CV(t) = Q(t) \rightarrow C \frac{dV}{dt} = I_C(t) \quad \text{Strom durch Membran}$$

Kirchhoff-Gesetz:

$$C \frac{dV}{dt} + g(t)(V - E_s) + g_L(V - E_L) = 0$$

↑
↑  
Strom durch Synapse
Leckstrom durch andere Ionenkanäle

Leitfähigkeit  $\frac{dg(t)}{dt} = -\alpha g(t) + \alpha I(t)$

$$C \frac{dV}{dt} = -g_L(V - E_L) - g(t)(V - E_s)$$

ohne Eingangssignal:

$$C \frac{dV}{dt} = -g_L(V - E_L)$$

Ruhezustand:

$$\frac{dV}{dt} = 0 \quad : \quad V_r = E_L$$

Näherung:

$$g(t)(V - E_s) \approx g(t)(V_r - E_s)$$

$$C \frac{dV}{dt} = -g_L(V - E_L) - Kg(t)$$

$$K = V_r - E_s$$

$$u(t) = V(t) - V_r$$

$$\left( \frac{C}{g_L} \right) \frac{du}{dt} = -u(t) - \frac{K}{g_L} g(t)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = -\alpha g(t) + \alpha I(t)$$

$$t \rightarrow \infty : u(t) = \frac{K}{g_l} \int_{-\infty}^t H(T - \tau) g(\tau) d\tau$$

$$g(t) = \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\alpha(t-\tau)} \sum_i \delta(\tau - t_i) d\tau$$

$$= \alpha \sum_i e^{-\alpha(t-t_i)}$$

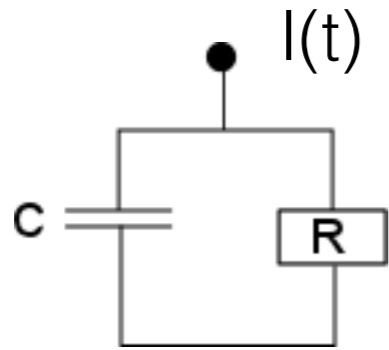
Annahme: spikes treten regelmäßig auf mit Rate  $F$ ,  $\alpha \rightarrow \infty$

$$E \left[ \sum_{i,j} \delta(t - t_i) \delta(t' - t_j) \right] = F \delta(t - t')$$

→  $S_u(f) = \frac{I_0 \gamma^2 F}{1 + 4\pi^2 \beta^2 f^2}$  (Übungen)

Synapse ist Tiefpassfilter

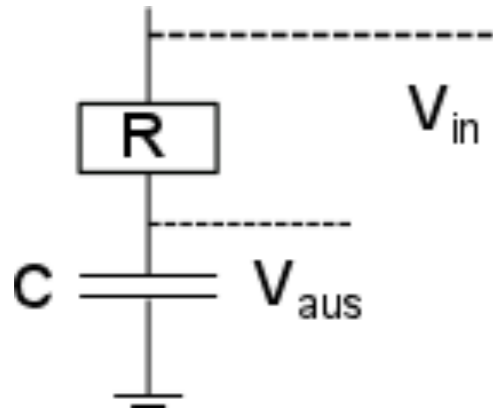
## Ersatzschaltkreis:



$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V(t)}{R} = I$$

Tiefpass  $C \frac{dV}{dt} = -gV(t) + I$

oder:



$$I_R = \frac{V_R}{R}, I_C = C \frac{dV_{aus}}{dt}$$

$$I_R = I_C, V_{in} = V_R + V_{aus}$$

Tiefpass 1. Ordnung

$$\frac{dV_{aus}}{dt} = -\frac{1}{RC} V_{aus}(t) + \frac{V_i(t)}{RC}$$

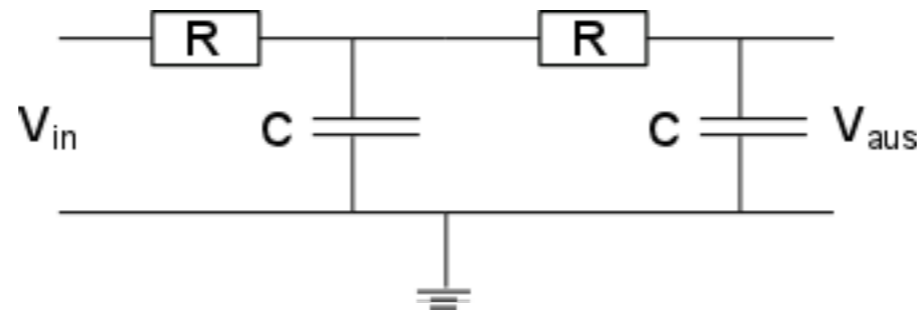
im Fourierraum:

$$\frac{\tilde{V}_{aus}(f)}{\tilde{V}_{in}(f)} = \frac{1}{i2\pi RCf + 1}$$

$$\left| \frac{\tilde{V}_{aus}(f)}{\tilde{V}_{in}(f)} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}}$$



## Tiefpass 2. Ordnung



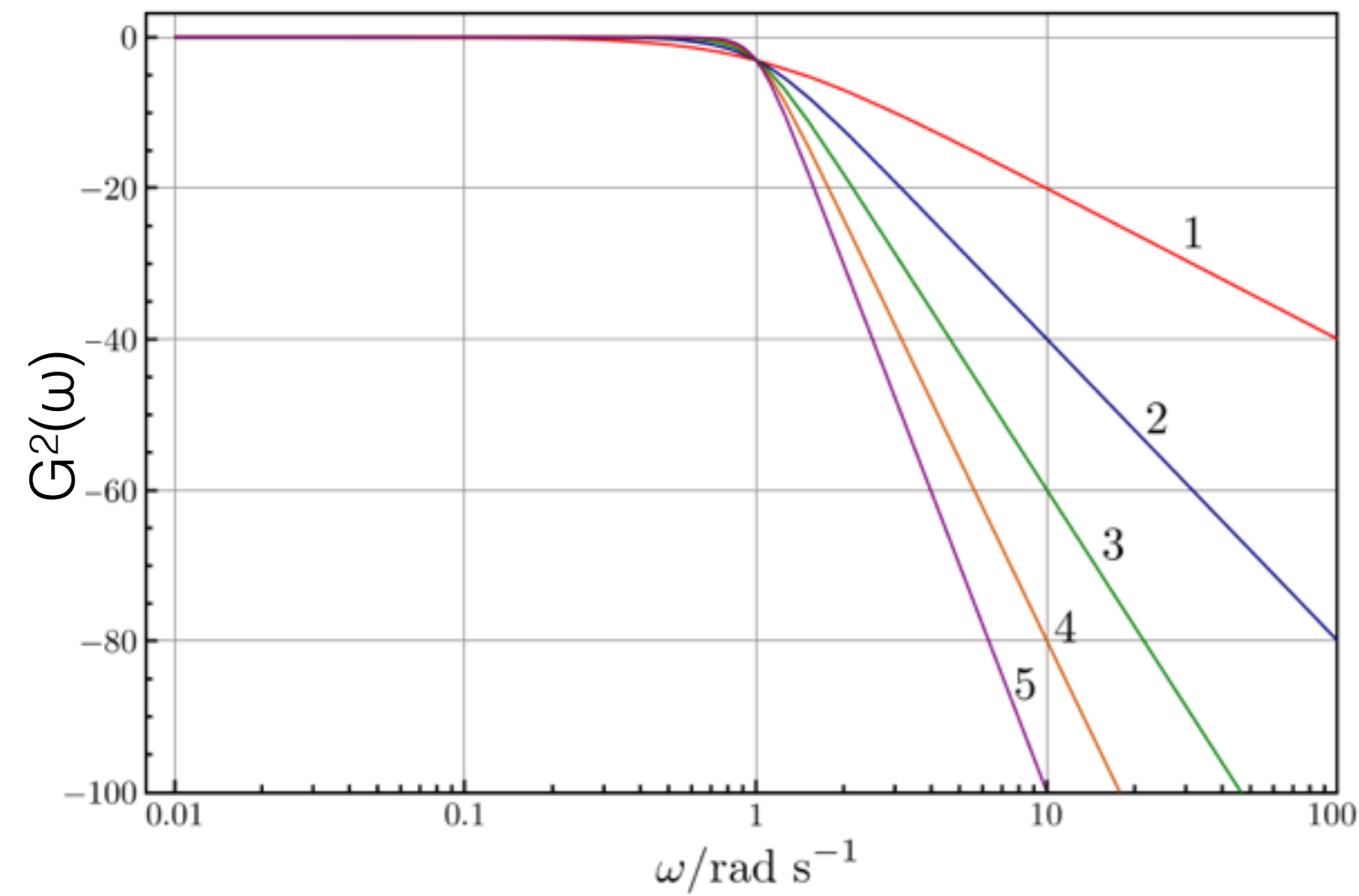
$$\left| \frac{\tilde{V}_{aus}(f)}{\tilde{V}_{in}(f)} \right| = \frac{1}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}$$

# weiteres Beispiel für Tiefpassfilter

## Butterworth-Filter

Ein B.-Filter ist maximal glatt im Passband und nähert sich 0 im Stopband

$$G^2(\omega) = |H(i\omega)|^2 = \frac{G_0^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$



$\omega_c$ : cut-off Frequenz

$\omega$ : Winkelfrequenz

$n$ : Ordnung des Filters

$H$ : Fouriertransformierte  
Impulsantwort-Funktion

$$|H(z)|^2 = \frac{G_0^2}{1 + \left(\frac{-z^2}{\omega_c^2}\right)^n}$$

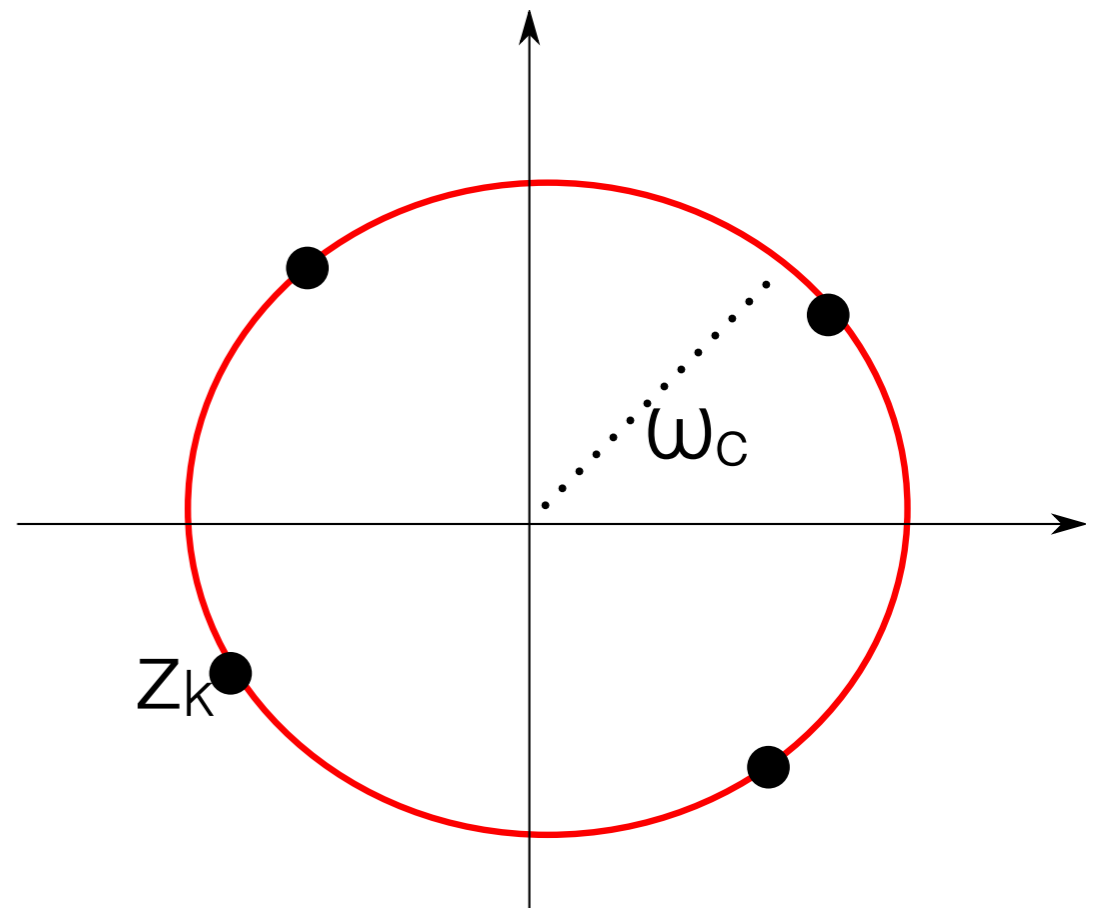
betrachte:

$$1 + \left(\frac{-z^2}{\omega_c^2}\right)^n = 0$$

$$(-1)^{\frac{1}{n}} = \frac{-z^2}{\omega_c^2}$$

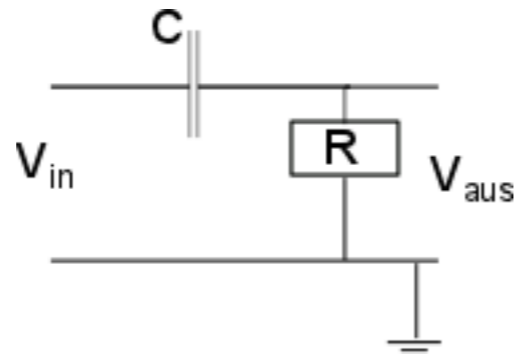
$$(-1)^{\frac{1}{n}} = e^{i\pi \frac{(2k-1)}{n}}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\longrightarrow z_k = \omega_c e^{i\pi \frac{2k-n-1}{2n}}$$



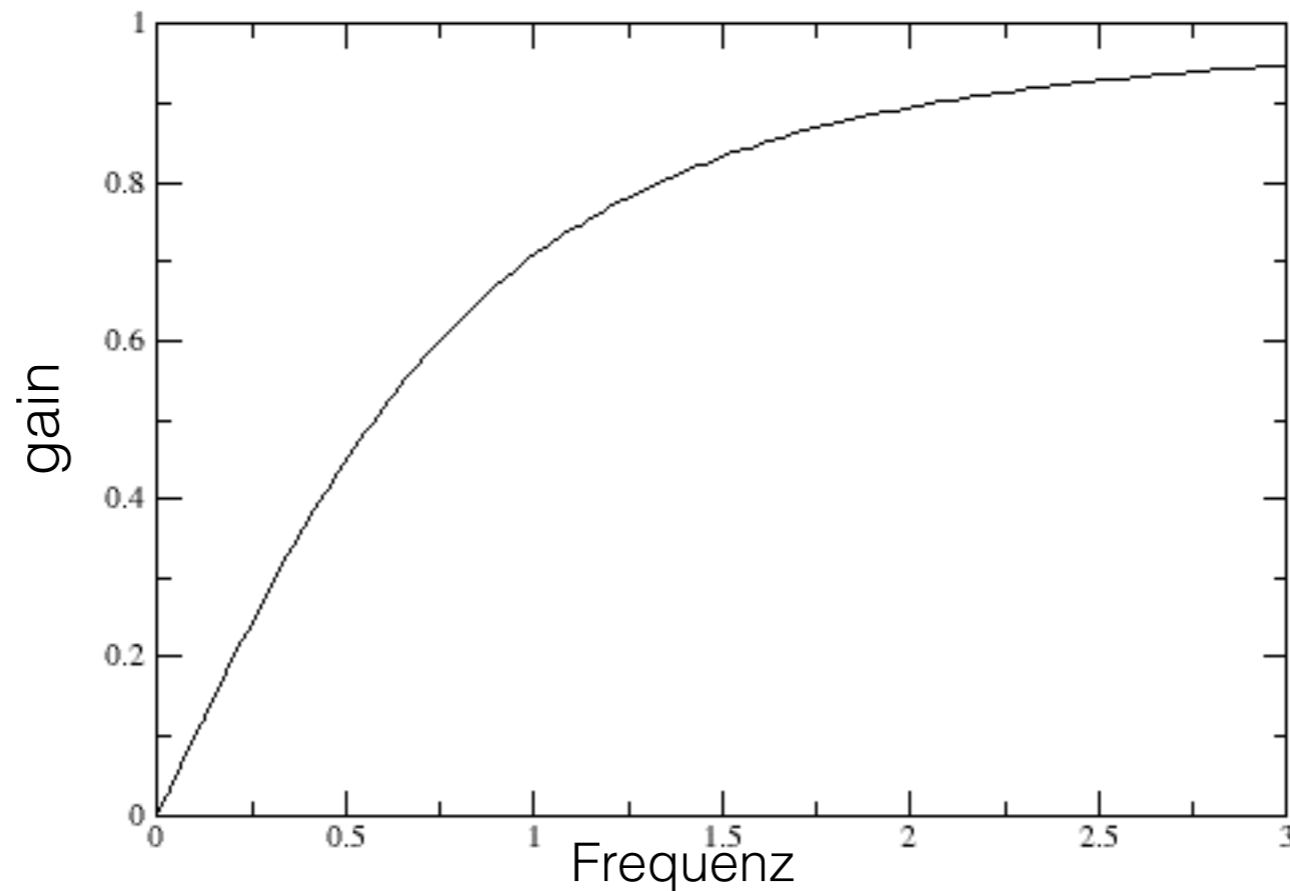
$$H(z) = \frac{G_0}{\prod_{k=1}^n (z - z_k) / \omega_c}$$

# Hochpass Filter:

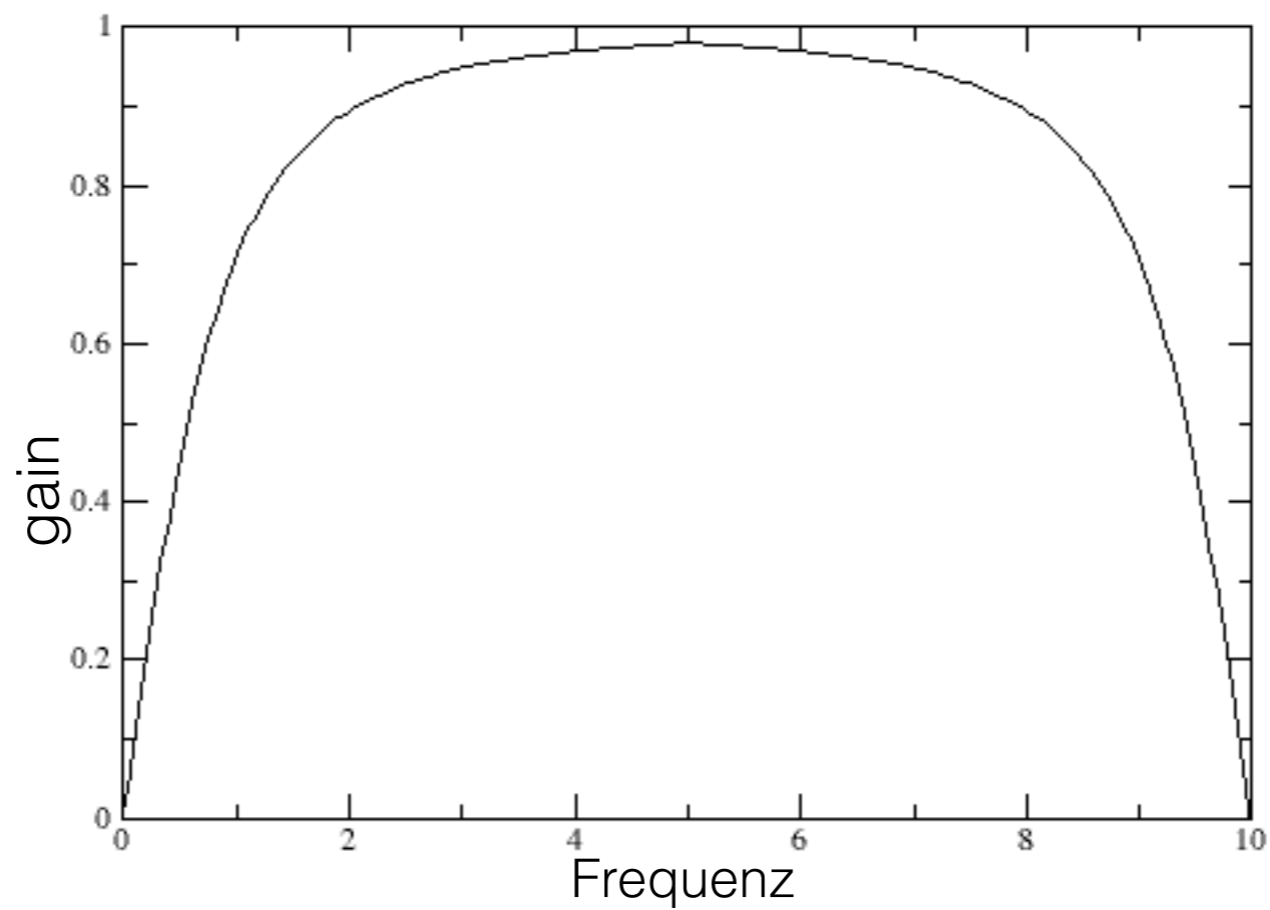
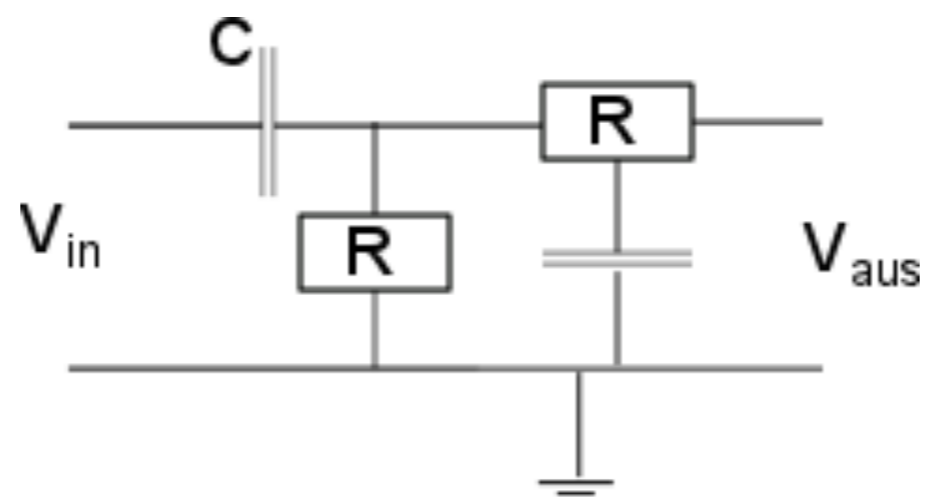


$$\frac{dV_{aus}}{dt} = -\frac{V_{aus}}{RC} + \frac{dV_{ein}}{dt}$$

$$\left| \frac{\tilde{V}_{aus}(f)}{\tilde{V}_{ein}(f)} \right| = \frac{2\pi RC f}{\sqrt{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}}$$

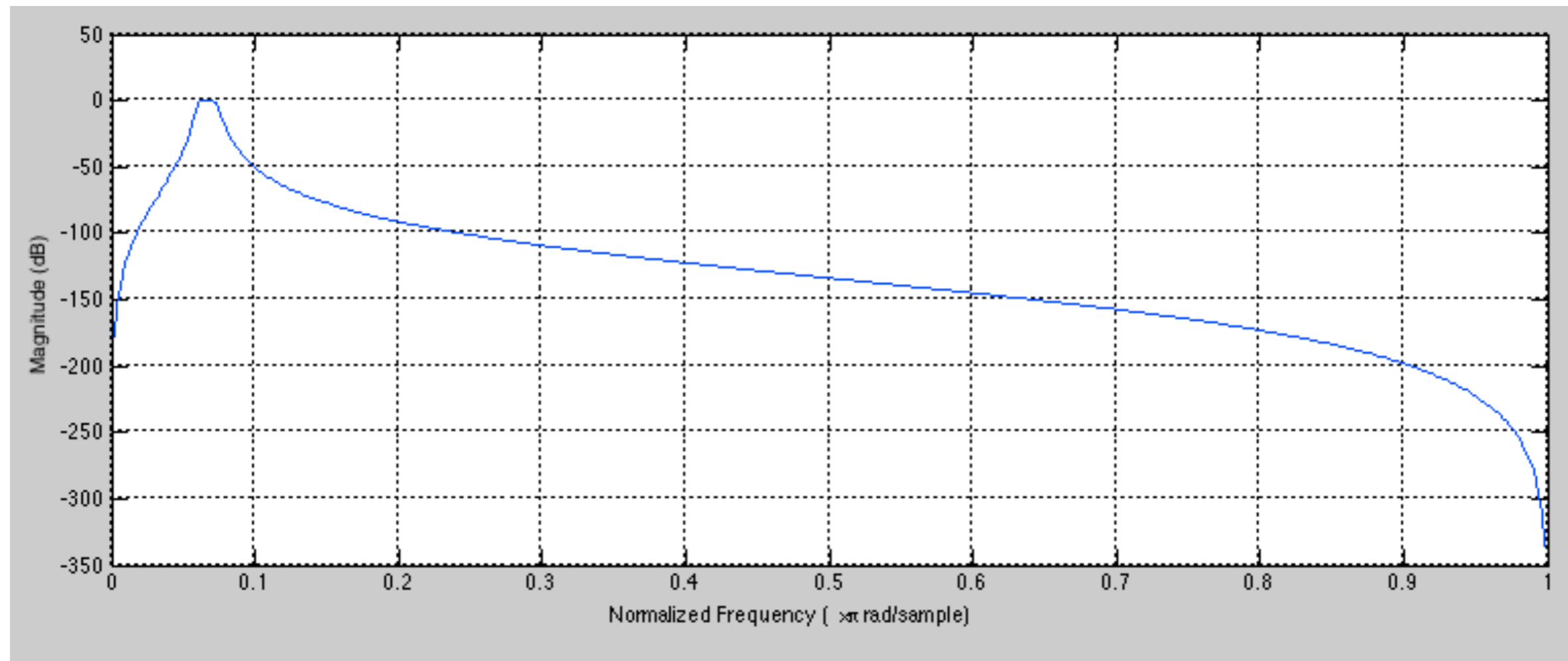


# Bandpass Filter:

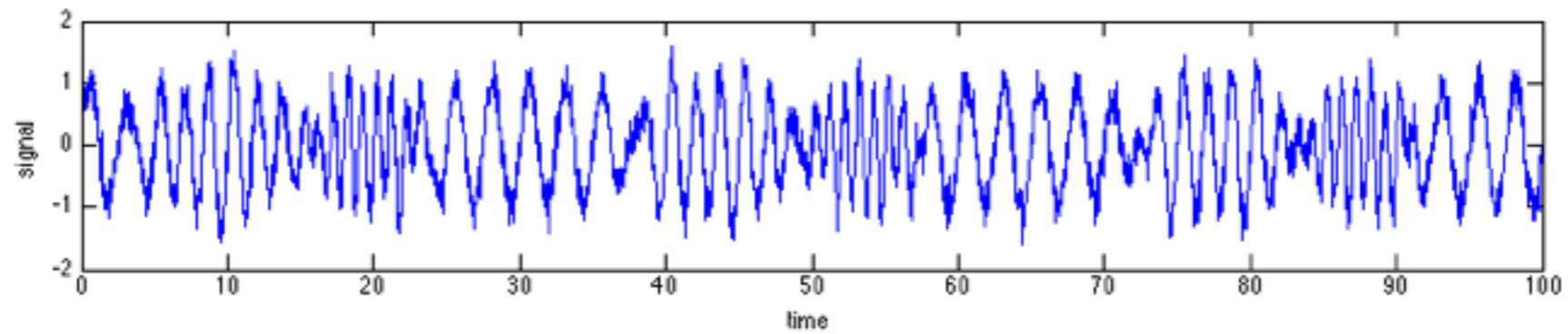


# Beispiel: Bandpassfilter

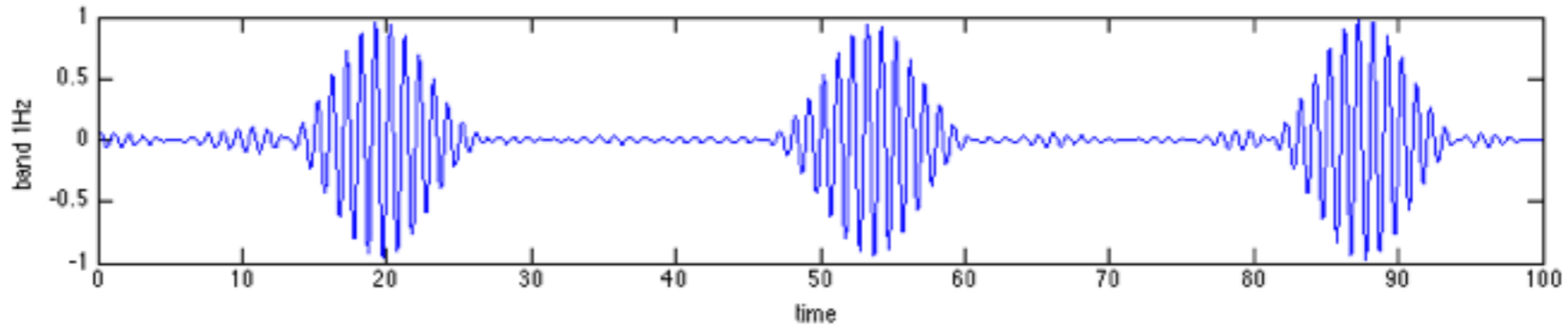
Typ: Butterworth, 4. Ordnung



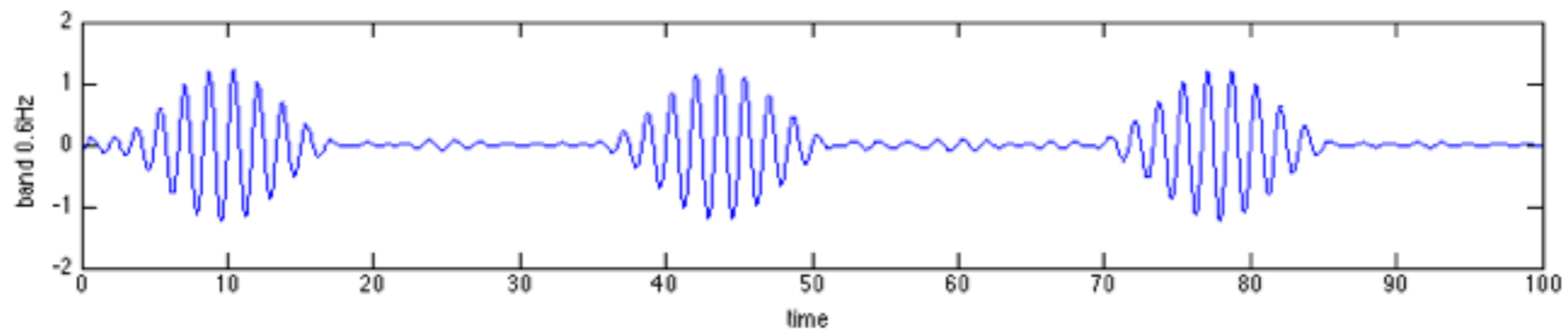
# Anwendung von Bandpassfilter auf künstliches Signal



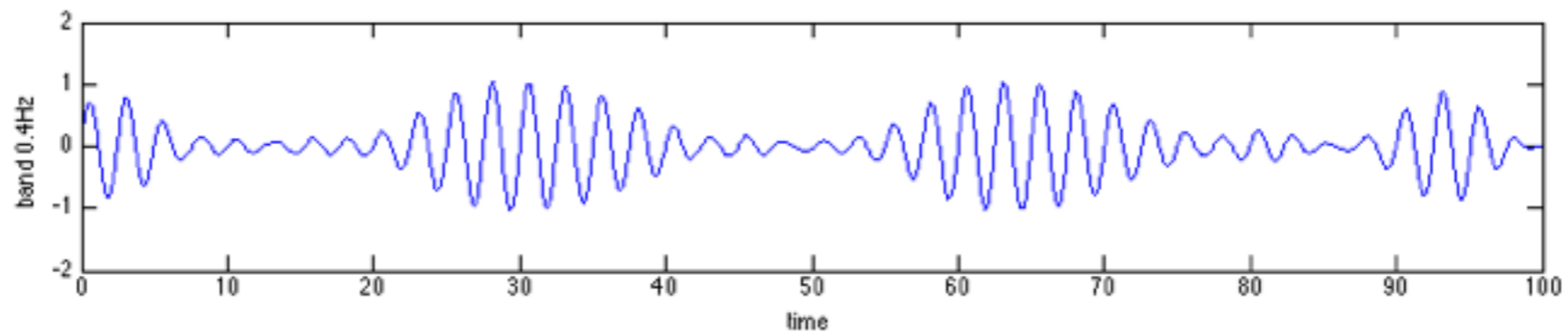
cut-off bei  
0.9Hz und 1.1Hz



cut-off bei  
0.5Hz und 0.7Hz



cut-off bei  
0.3Hz und 0.5Hz



- Frequenzbandbreite definiert zeitliche Korrelationen
- Frequenzbandbreite / zeitliche Korrelationslänge  
identisch in allen Frequenzen



- falls die Impulsantwort-Funktion hat  
Filter heißt

$$s(t) = \int_0^{\infty} H(\tau)I(t - \tau)d\tau$$

- falls die Impulsantwort-Funktion *finite* Dauer hat:  
Filter heißt **Finite Impulse Response (FIR)** - Filter

$$s(t) = \int_0^T H(\tau)I(t - \tau)d\tau$$

# Beispiel: Tiefpassfilter

## Savitzky-Golay Filter (FIR)

Ziel:

ein Signal soll **entauscht** werden durch  
**optimale Anpassung** einer deterministischen Funktion

Wenn Signal  $x(t)$  die Dauer  $T$  hat, dann ist das gefilterte Signal  $y(t)$

$$y(t) = \int_{-\tau_m/2}^{\tau_m/2} H(\tau) x(t - \tau) d\tau \quad , \quad \tau_m \leq t \leq T - \tau_m$$

oder

$$y_n = \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} H_k x_{n+k}$$

- man transformiert das Signal in einem Fenster um den Zeitpunkt  $t$  (bzw.  $n$ ) mit Fensterbreite  $\tau_m$  (bzw.  $m-1$ )
- man kann ein Modell des Signals  $s$  in diesem Fenster ableiten

Idee:

$$\text{Signal } s(t_n) = s_n \quad s_n = \sum_{k=1}^m a_k n^k + e_n$$

$$\rightarrow s_n - \sum_{k=1}^m a_k n^k = e_n \quad \sum_{n=1}^N e_n^2 = \min$$

$$V = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^m (a_k n^k - s_n)^2 = \min$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_l} = 0 :$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_l} = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^m 2 (a_k n^k - s_n) \frac{\partial (a_k n^k)}{\partial a_l}$$

$$= \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^m 2 (a_k n^k - s_n) n^k \delta_{kl}$$



$$\sum_{k=0}^m \sum_{n=0}^N n^{l+k} a_k = \sum_{n=0}^N n^l s_n$$

man definiert nun

$$n^l = A_{ln}$$

$$\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times N}$$

$$\sum_{n=0}^N A_{ln} A_{kn} = \sum_{n=0}^N n^{l+k} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^t)_{jk}$$

$$\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times N}$$

$$\sum_{k=0}^m (\mathbf{A}\mathbf{A}^t)_{lk} a_k = \sum_{n=0}^N A_{ln} s_n$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^t \mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{s} \quad \mathbf{a} \in \mathcal{R}^m \quad \mathbf{s} \in \mathcal{R}^N$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s}$$
$$= \mathbf{H}\mathbf{s}$$

$$\mathbf{H} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times N}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^m a_k n^k + e_n$$

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{a}^t \mathbf{A} \approx \mathbf{s}$$

mean least-square - Schätzung des Modells

$$\tilde{\mathbf{s}}^t = (\mathbf{A}^t \mathbf{H}) \mathbf{s}$$

*Impulsantwort-Matrix  $\mathbf{A}^t \mathbf{H}$*

Beispiel: Glättungsfiter vom Typ *moving average*

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^M s_{n-j}$$

$$= \frac{1}{2M+1} \sum_{k=n-M}^{n+M} s_k$$

$$= \sum_{k=-N/2}^{N/2} P_{nk} s_k$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}^t \mathbf{H}$$

$$P_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{2M+1} & , \quad n-M \leq k \leq n+M \\ 0 & , \quad \textit{sonst} \end{cases}$$

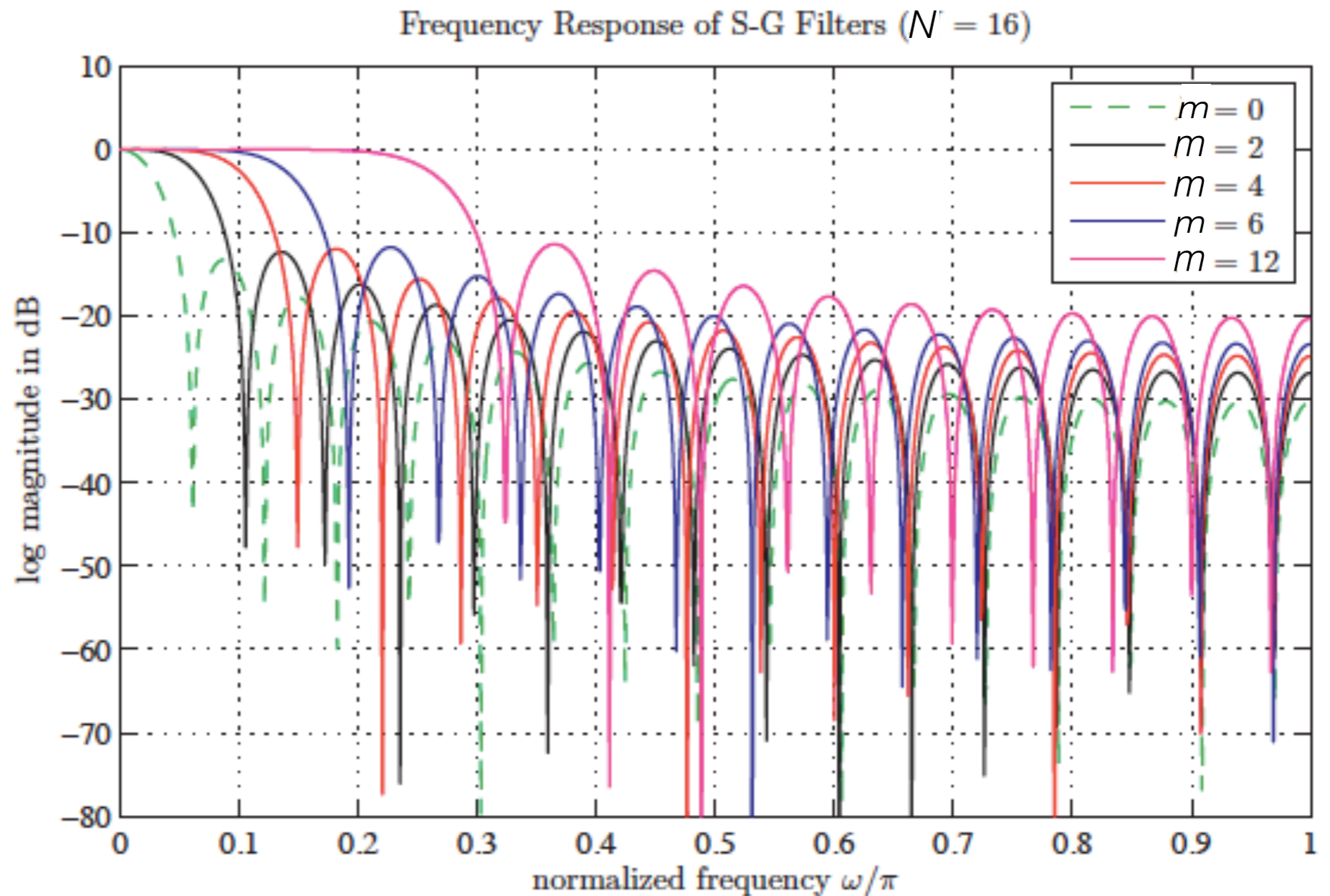
Zeitfenster:  $N=2M$     Polynomialgrad:  $m=0$

im Allgemeinen:

Parameter sind *Länge des Zeitfensters* ( $N$ ) und *Polynomialgrad* ( $m$ )

$$|\mathcal{F}[\mathbf{A}^t \mathbf{I}]$$

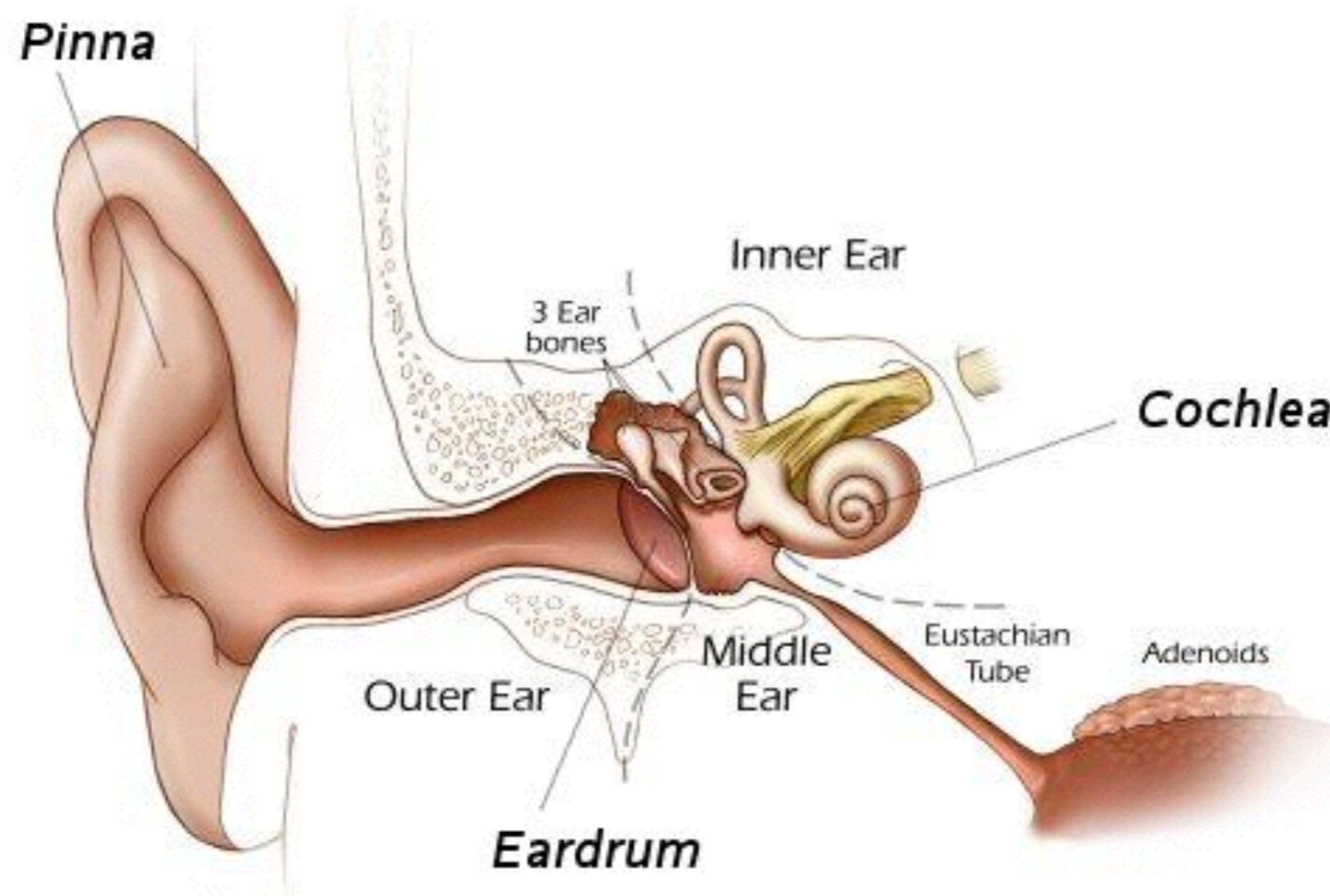
Tiefpassfilter



=m

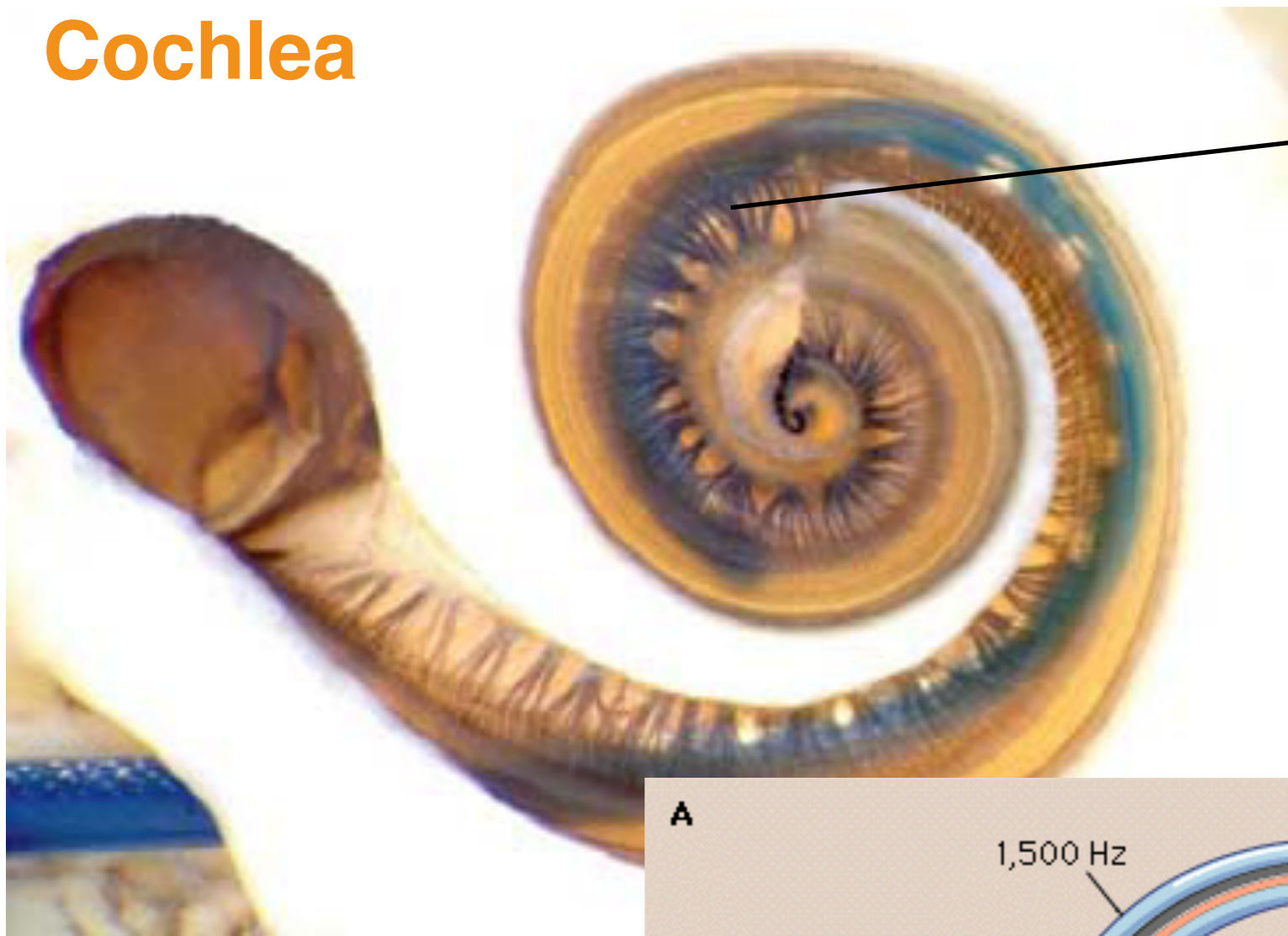
(aus R. Schafer, *On the Frequency-Domain Properties of Savitzky-Golay Filters*, HP-Bericht)

# In Biologie: **Frequenzfilter im Innenohr**



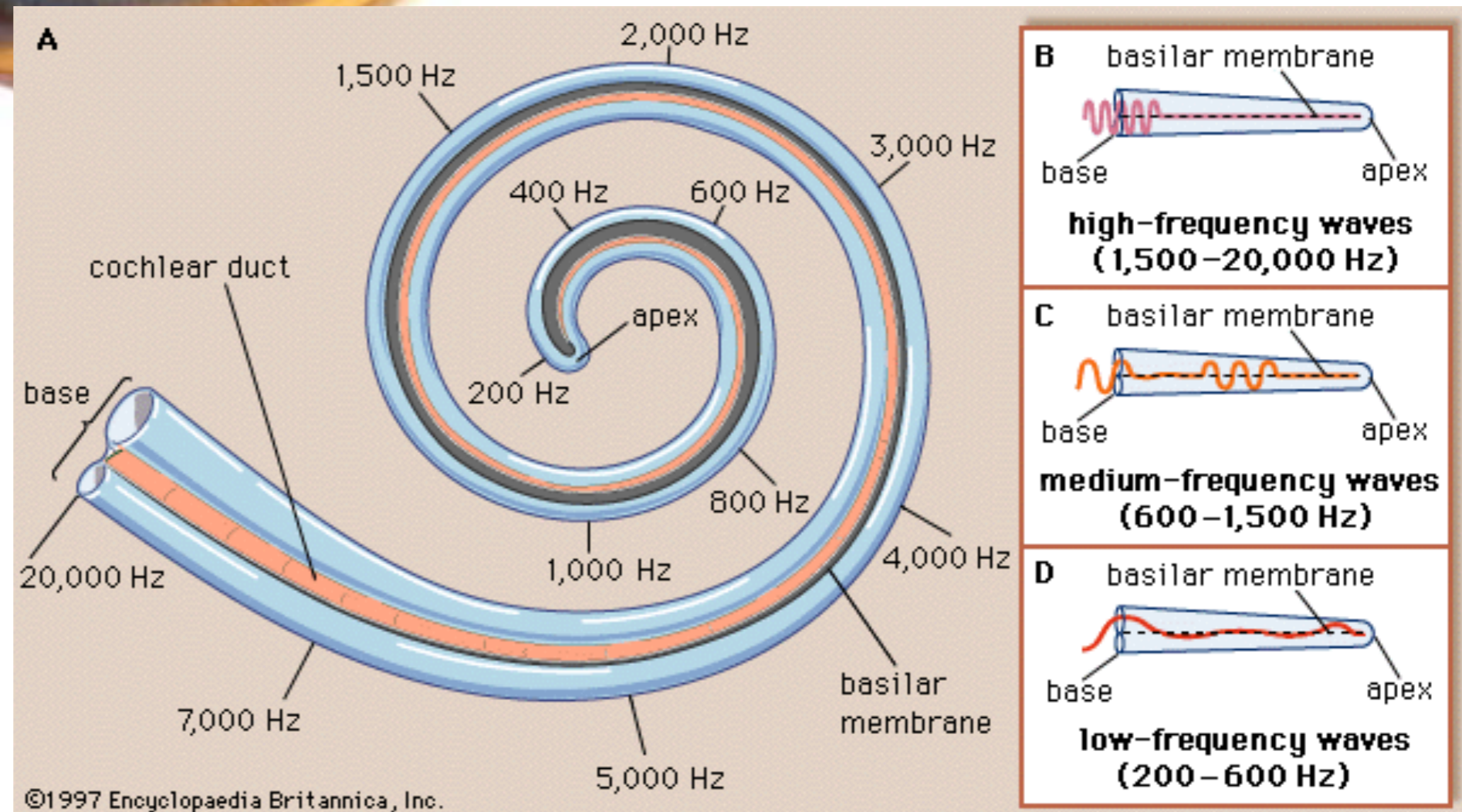


# Cochlea



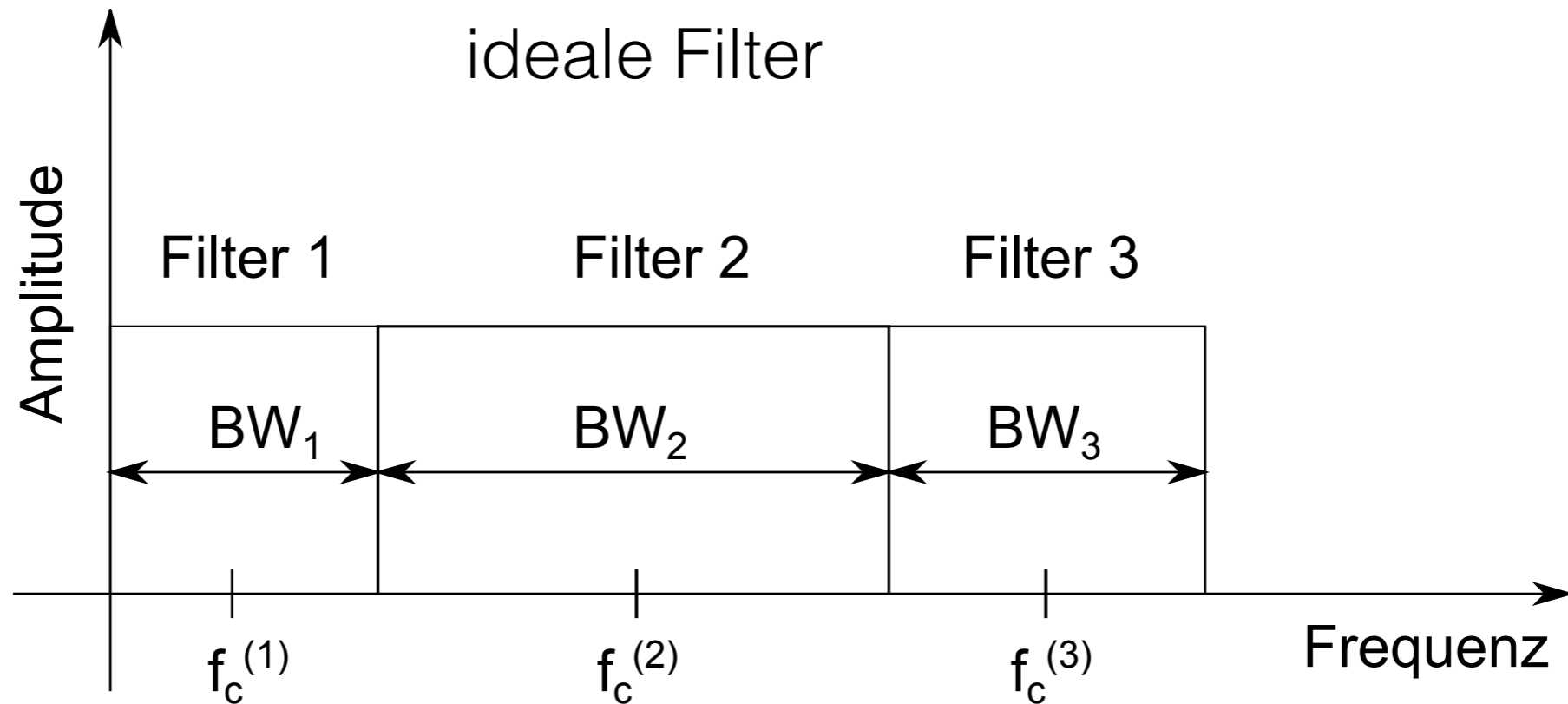
Haarzellen

## Frequenzkodierung



- Dekodierung von verschiedenen Frequenzen (16Hz-20kHz beim Menschen)
- Dekodierung erfolgt an verschiedenen Orten in Cochlea
- Haarzellen in Cochlea **filtern Signale in verschiedenen Frequenzbändern**
- Gehirn setzt Signale in Frequenzbändern zusammen

# Struktur der Frequenzfilter



Filter sind nicht-überlappende Bandpass-Filter

$BW$ : *band-width* = Frequenzbreite des Bandpasses

$f_c$ : *center frequency* = Zentrumsfrequenz des Bandpasses

## Filter des menschlichen Hörsystems:

- decken vollen Hörbereich ab
- Hörbereich deckt bis zu 12 Oktaven ab
- Oktaven :  
Frequenzintervall dessen Ränder im Verhältnis 2:1 stehen

# Filterbank

## Definition:

- System generiert Satz von Signalen  $s_n(t)$  aus einem Signal  $s(t)$
- Signale  $s_n(t)$  entsprechen einem Frequenzbereich eines Bandpassfilters  $n$
- Frequenzbereiche decken den Frequenzumfang des Signals vollständig ab.
- der Frequenzfilter  $n$  mit Bandbreite  $BW_n$  und Zentrumsfrequenz  $f_c^{(n)}$  bestimmt Signal  $s_n(t)$
- implementiert in der Cochlea

## Beispiel: Third-octave Filterbank

(gute Näherung der auditorischen biologischen Filterbank)

definiere Basis-Zentrumsfrequenz  $f_c^{(0)}$

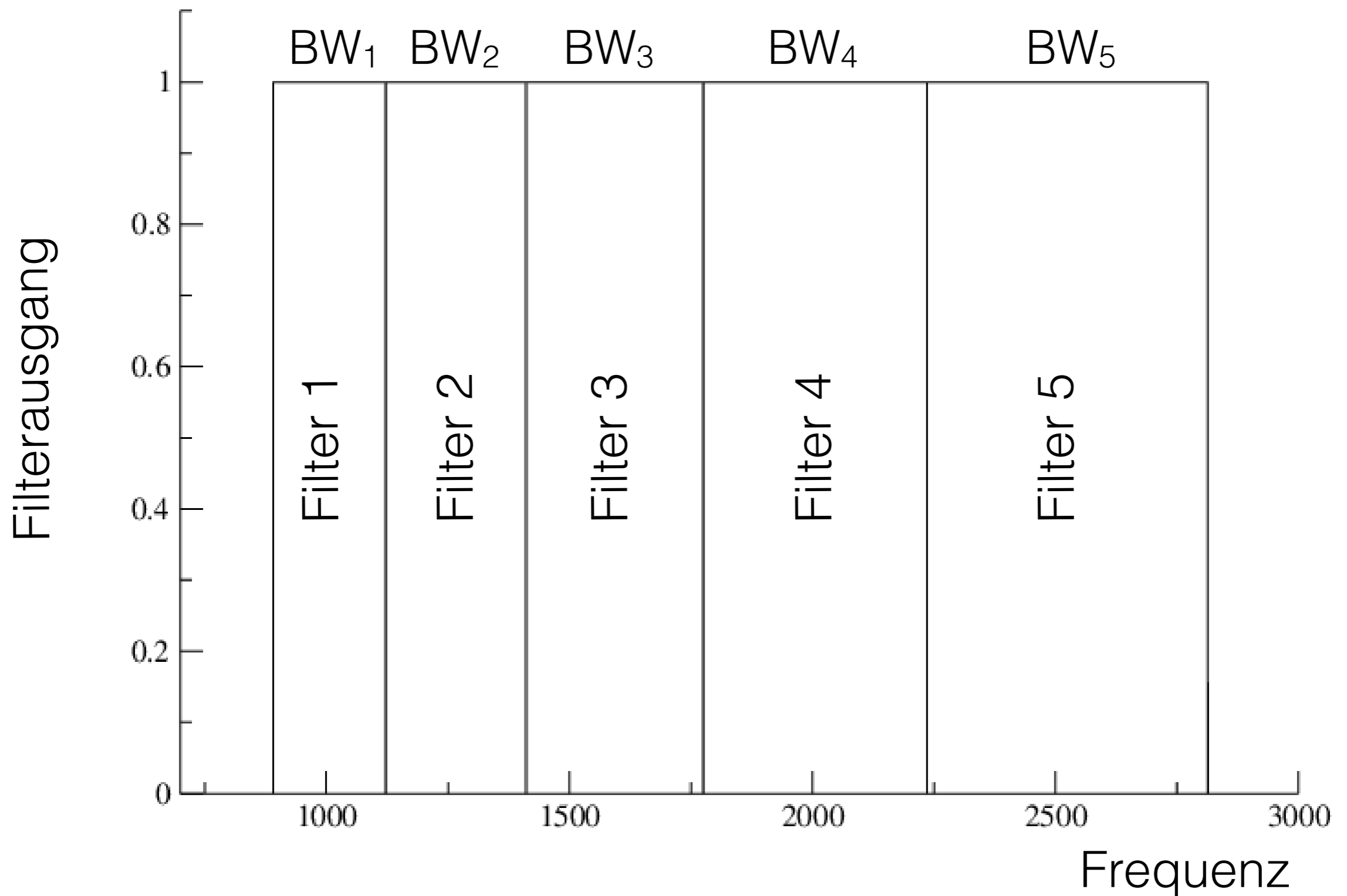
Zentrumsfrequenzen der Filter:  $f_c^{(k)} = 2^{k/3} f_c^{(0)}$

Bandbreiten:

$$\begin{aligned} BW_k &= \sqrt{f_c^{(k+1)} f_c^{(k)}} - \sqrt{f_c^{(k)} f_c^{(k-1)}} \\ &= \sqrt{f_c^{(k)}} \left( \sqrt{f_c^{(k+1)}} - \sqrt{f_c^{(k-1)}} \right) \\ &= f_c^{(k)} \left( 2^{1/6} - 2^{-1/6} \right) \end{aligned}$$

Quality-factor:

$$Q_k = \frac{f_c^{(k)}}{BW_k} = \text{const}$$



$$f_c^{(0)} = 1000\text{Hz}$$

## kurze Zusammenfassung der Hauptresultate dieses Kapitels:

- Methoden sind anwendbar auf  
*im weiteren Sinn stationäre* Signale
- Bedingungen an Analyse mittels Fourierreihe
- Sampling und endliche Zeitfenster führen zu Fehlern in Fourieranalyse
- Lineare Antwort-Theorie
- konkrete Methoden zur Berechnung des PSD
- lineare Frequenz-Filter

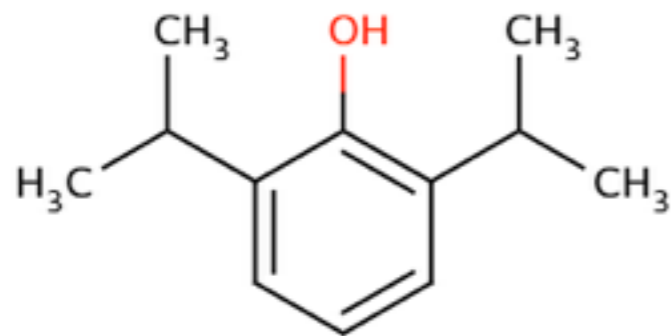




# Was passiert dabei im Gehirn ?

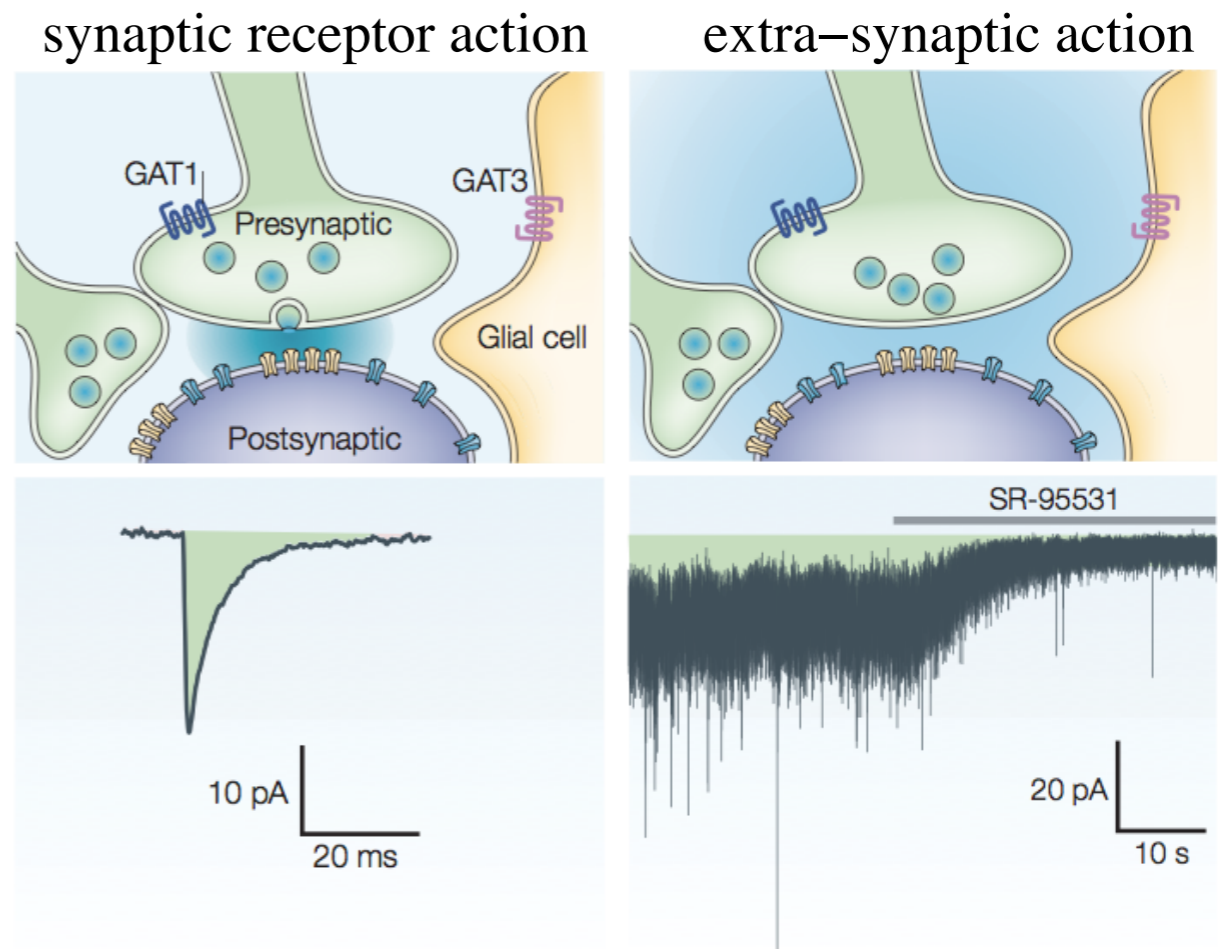
mikroskopische Skala:

## Anästhetikum Propofol

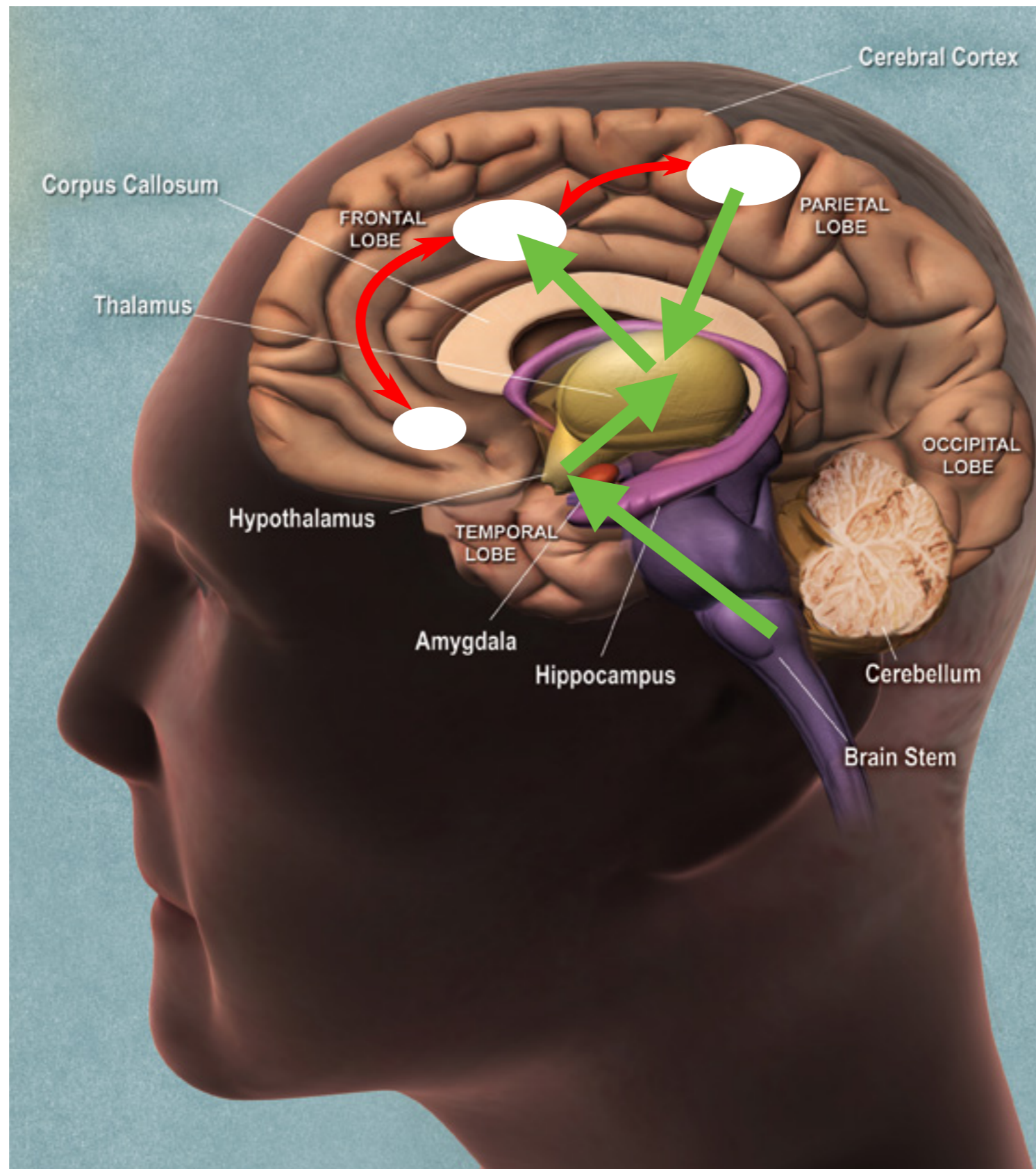


(Diisopropylphenol)

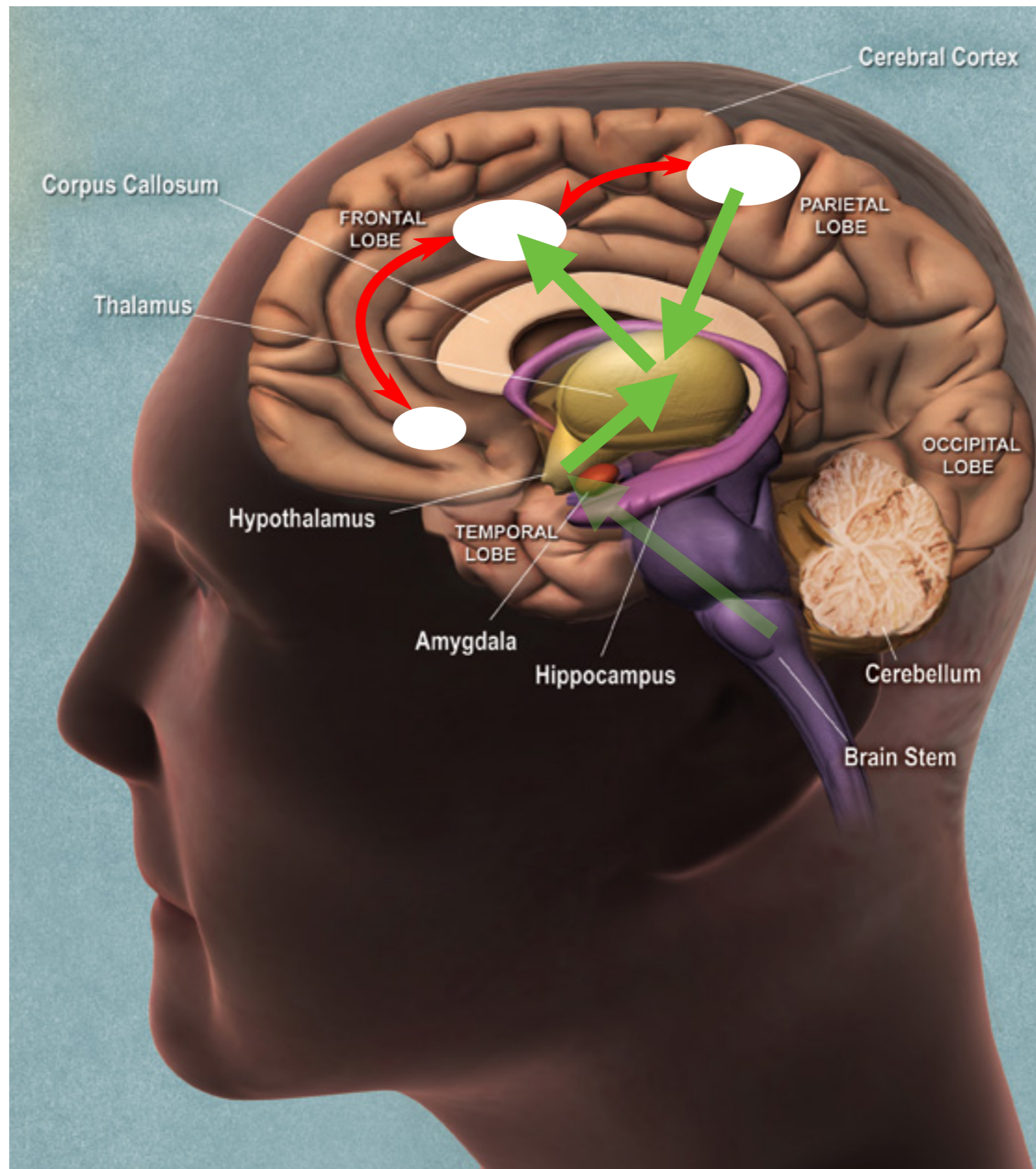
## Effekte auf Synapsen



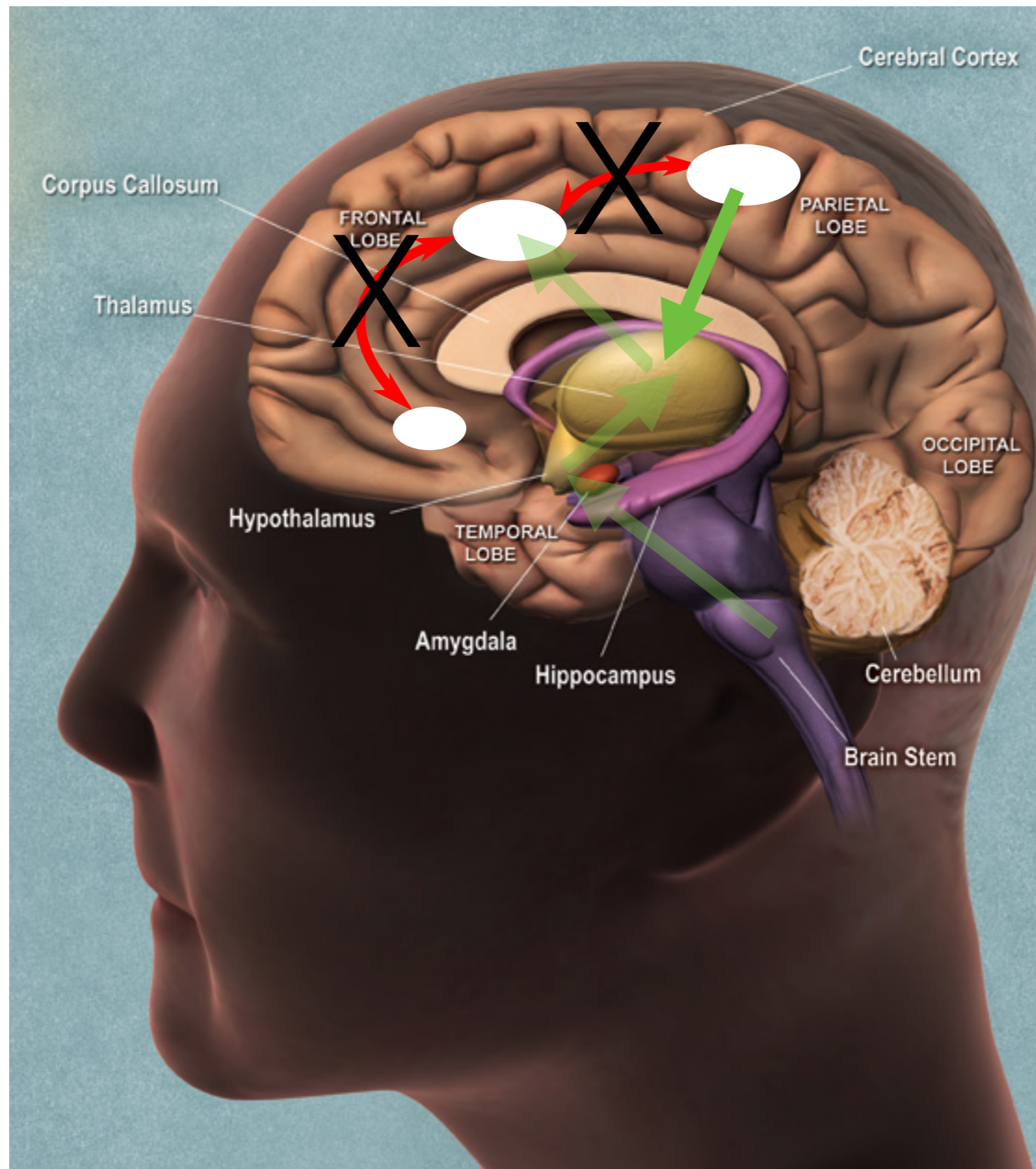
# Was passiert im Gehirn bei Bewusstsein ?



# Was passiert im Gehirn bei Sedierung ?



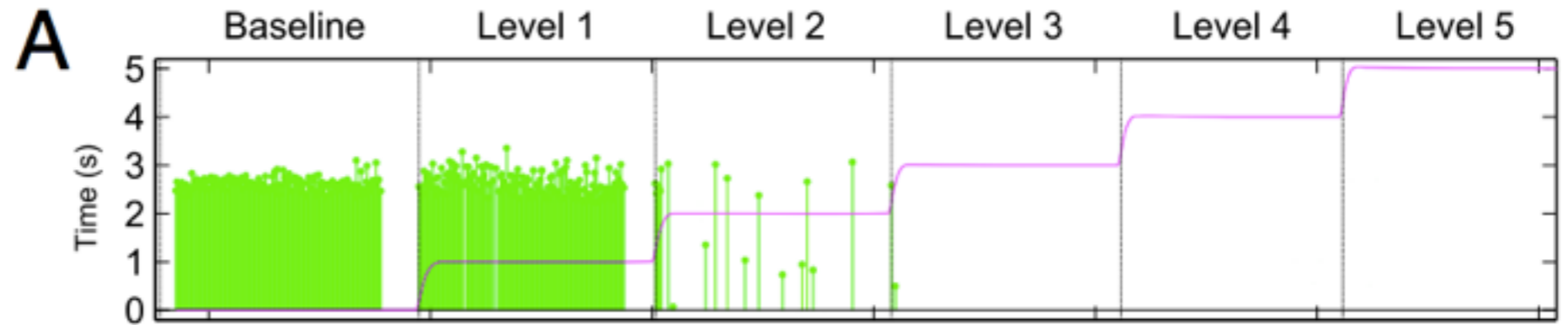
# Was passiert im Gehirn in tiefer Narkose ?



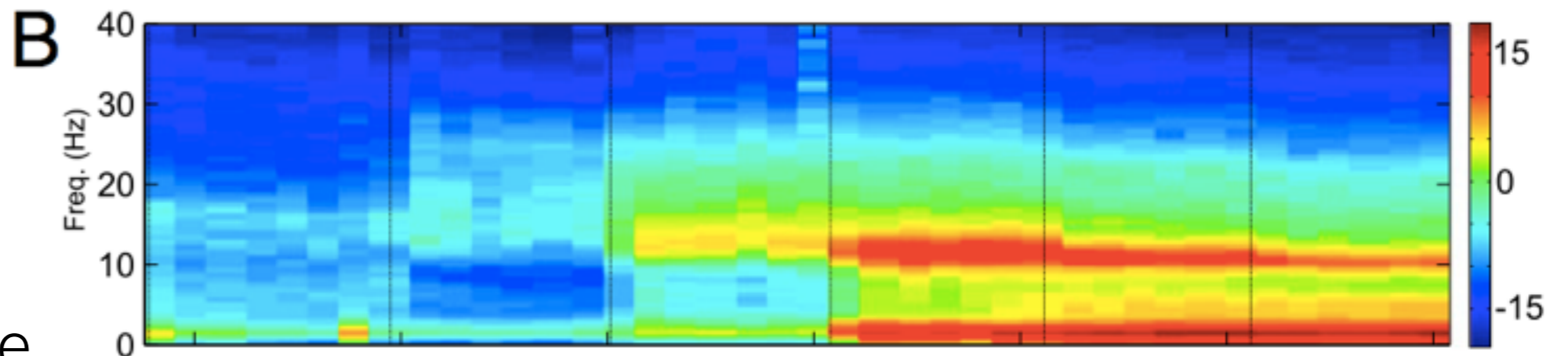
# EEG-Experiment unter Anästhesie

makroskopische Skala:

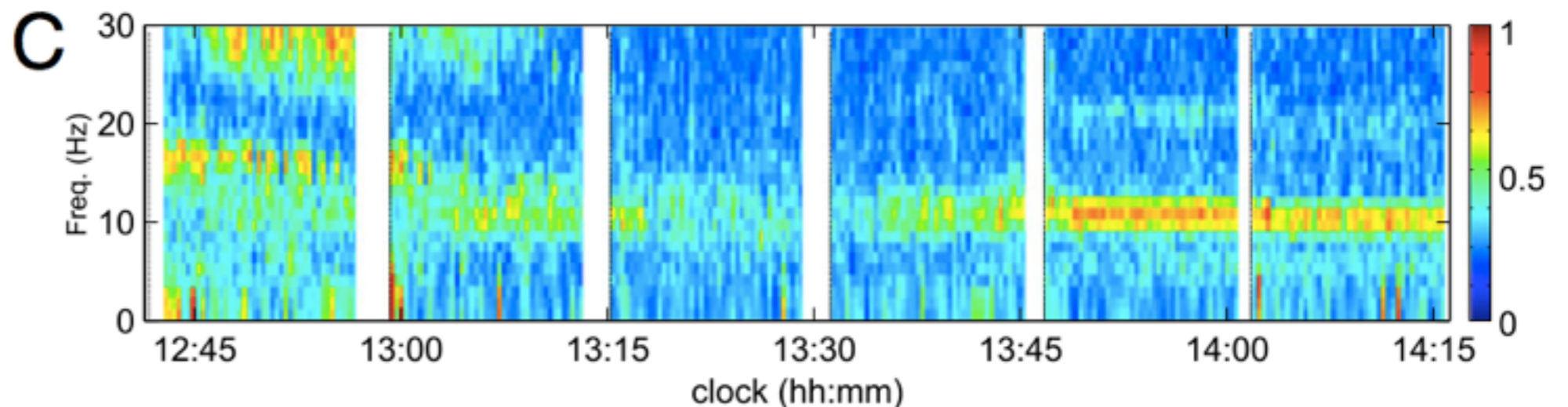
Verhalten



EEG einer  
frontalen Elektrode



räumliche  
Kohärenz



Erhöhung der Propofol-Konzentration



## nun:

- Methoden sind anwendbar auf *im weiteren Sinn stationäre* Signale
- Bedingungen an Analyse mittels Fourierreihe
- Sampling und endliche Zeitfenster führen zu Fehlern in Fourieranalyse
- Lineare Antwort-Theorie
- konkrete Methoden zur Berechnung des PSD
- lineare Frequenz-Filter

I. Abtast-Theorem

II. Fourier-Analyse

**III. Zeit-Frequenz Analyse**



# III. Zeit-Frequenz Analyse

Short-time Fourier Transform

Gabor Transformation

Lineare Filter

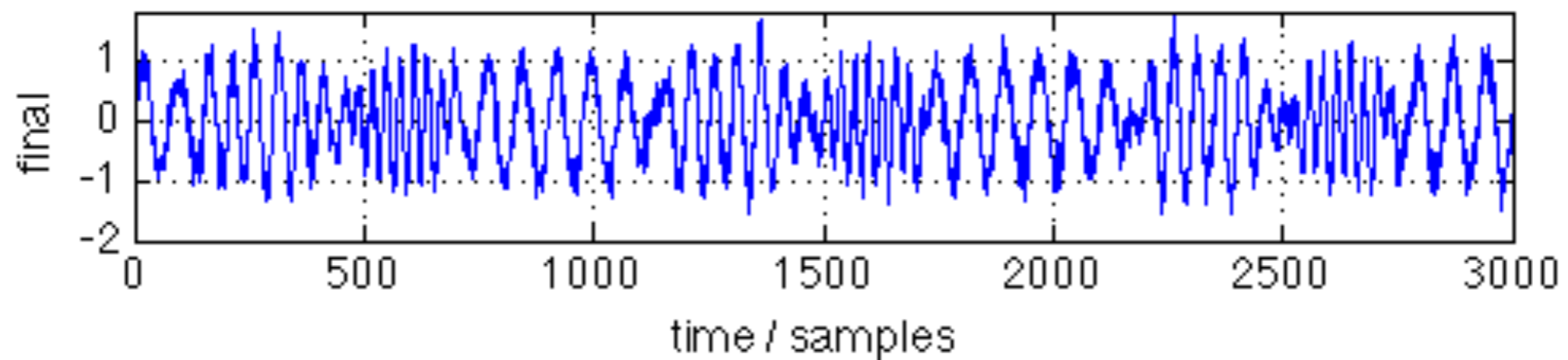
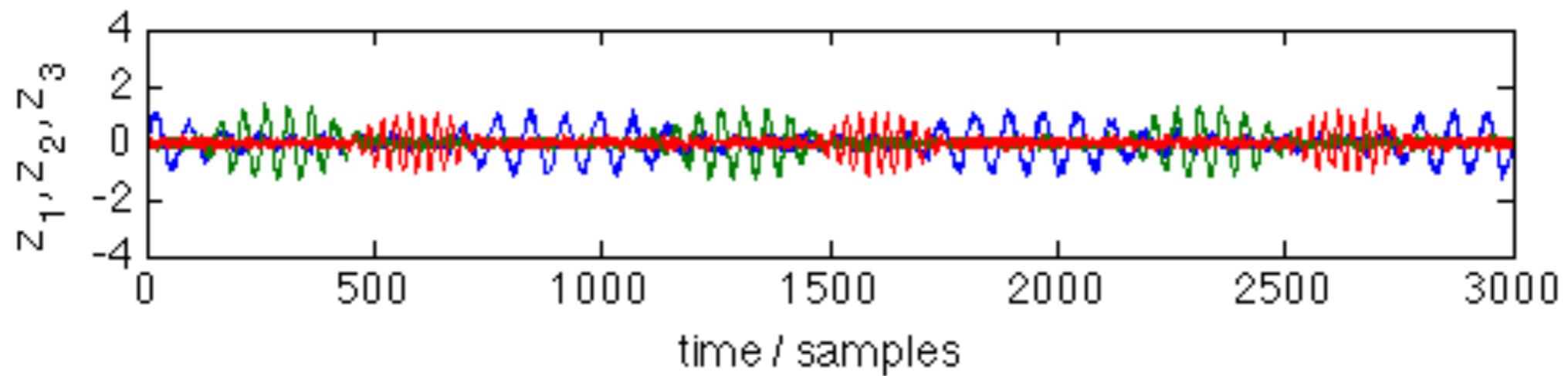
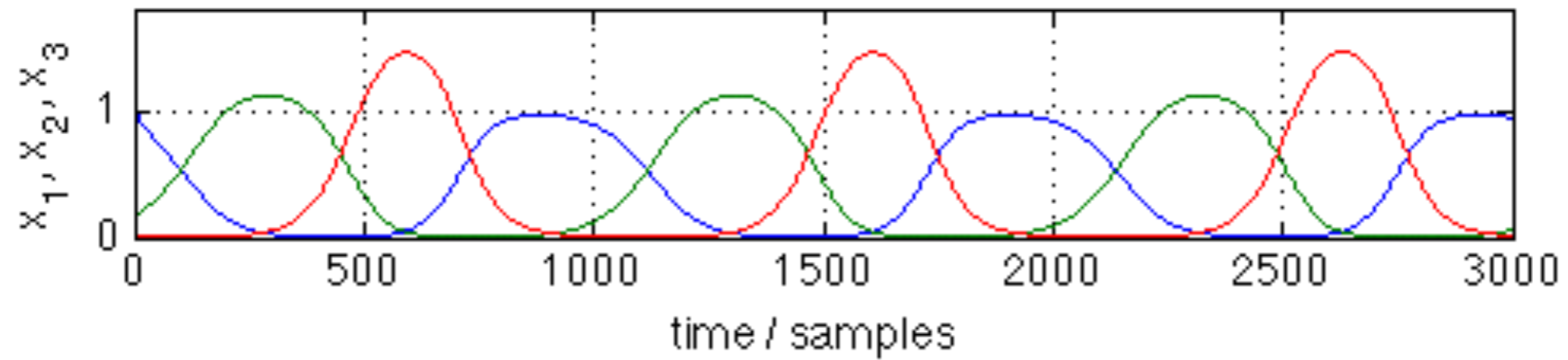
Wavelet Transformation

Konzept des Analytischen Signals

Reassignment Methoden

nocheinmal:

Struktur des Beispiels von drei transiente Oszillatoren

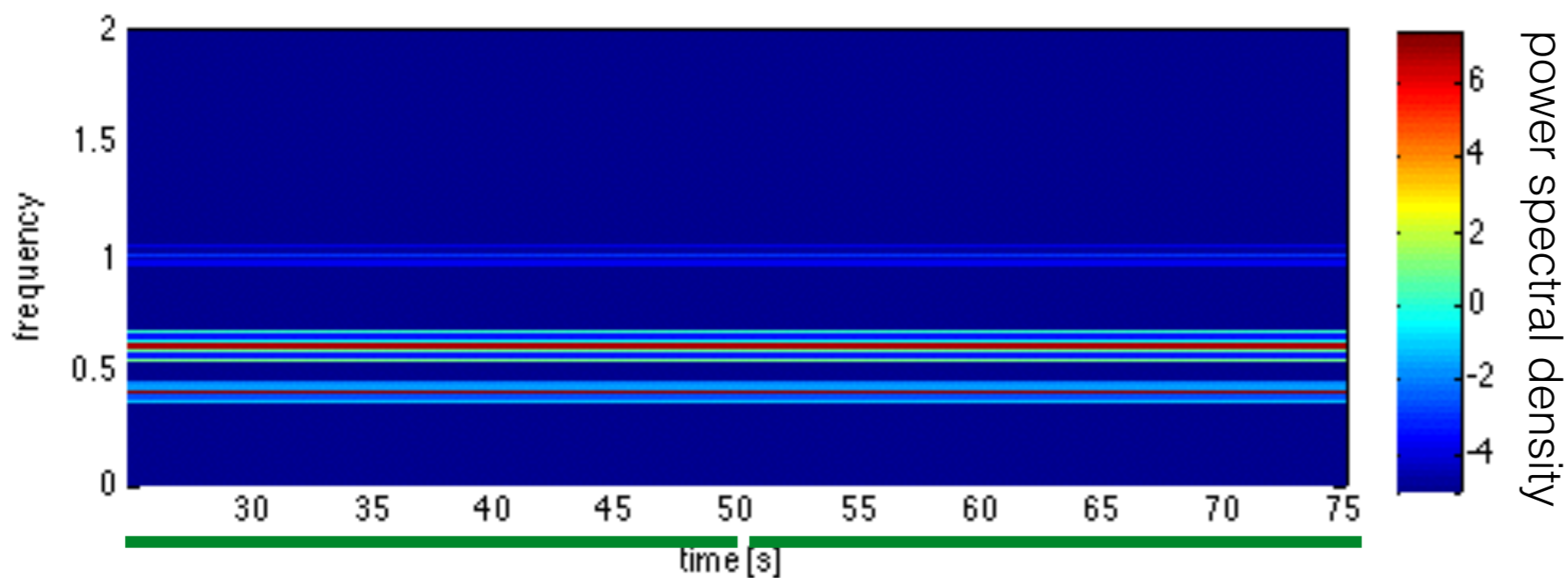
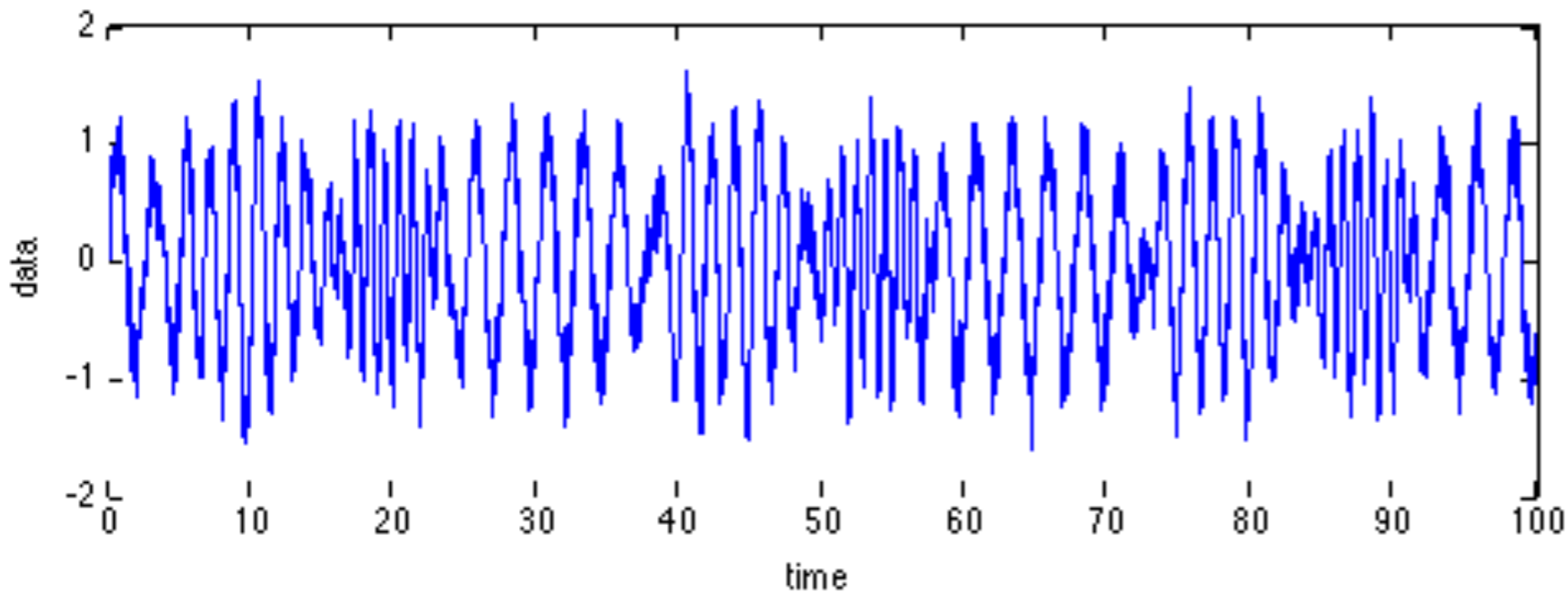


gemittelt

gemittelt

Zeitfenster  
**50s**

Frequenzauflösung  
**0.02Hz**

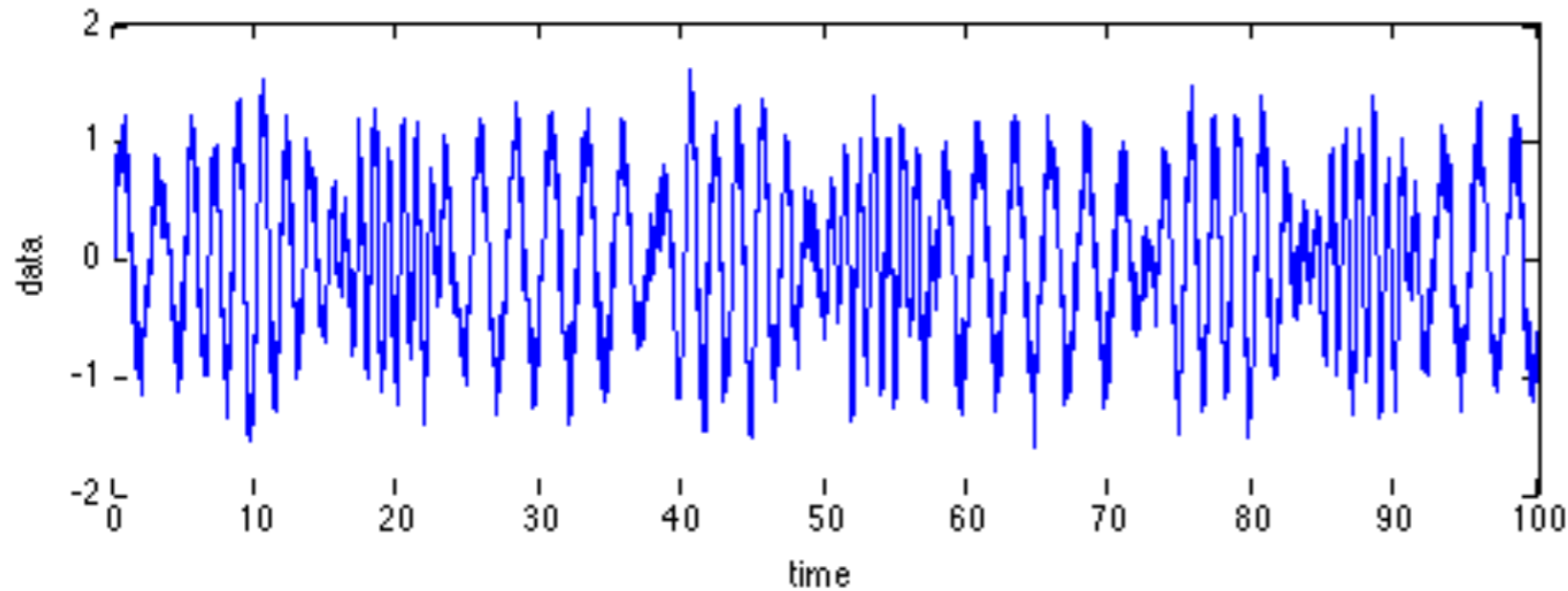


kein Überlapp  
Rechteck-Fenster

beide Signalabschnitte zeigen identische PSD.

(TF\_1.m)

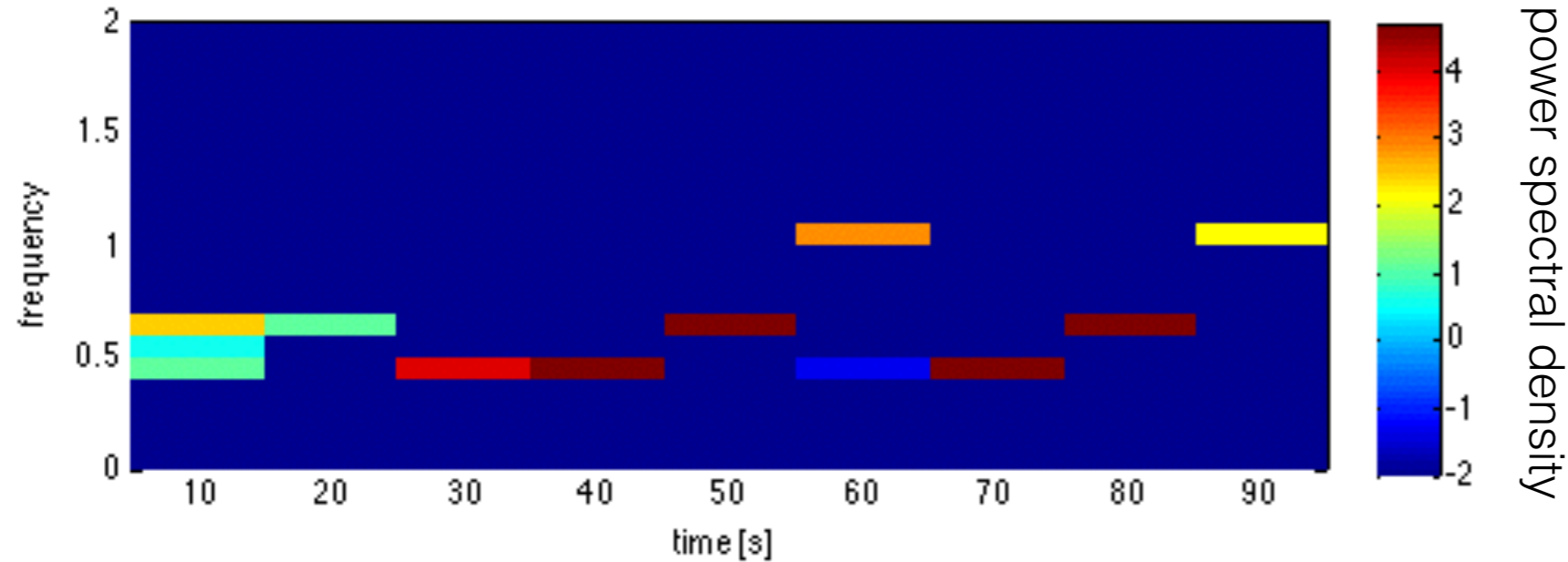
gemittelte Fenster



Zeitfenster:  
**10s**

Frequenzauflösung  
**0.1Hz**

kein Überlapp,  
Rechteckfenster



Zeitfenster zeigen zeitabhängige PSD

(TF\_2.m)

man kann  
eine **Frequenz**  
in **jedem Fenster**  
definieren

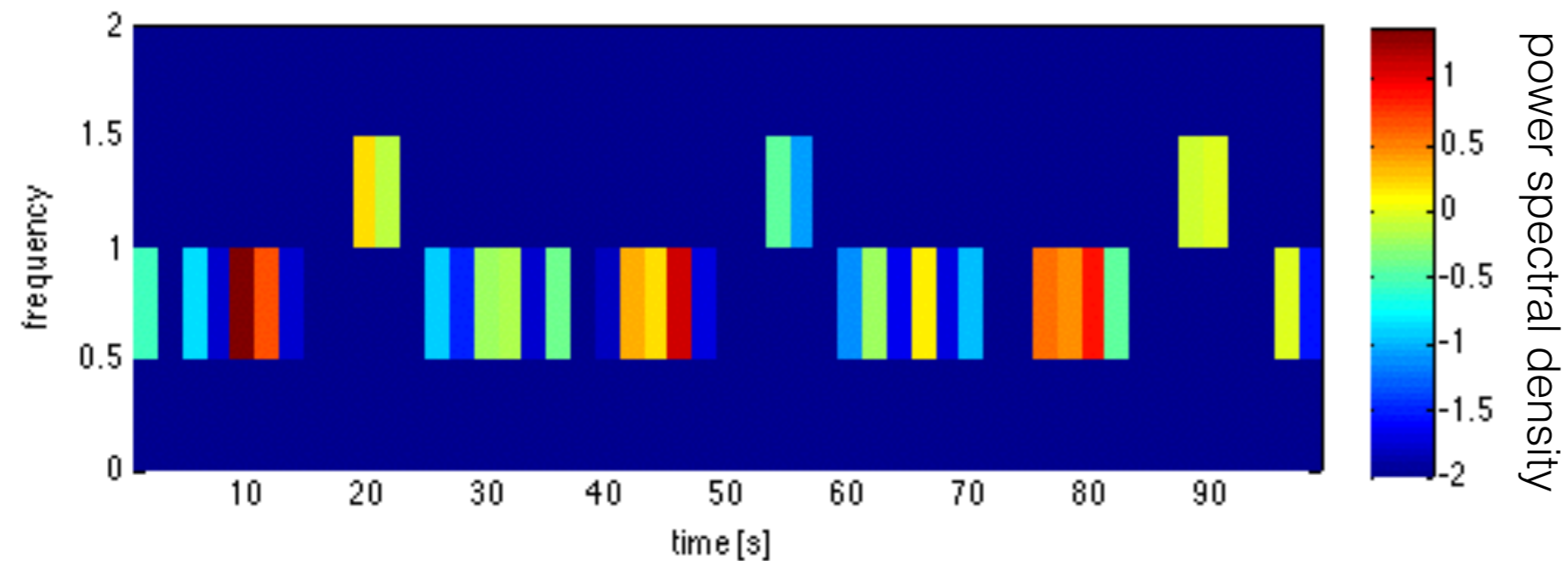
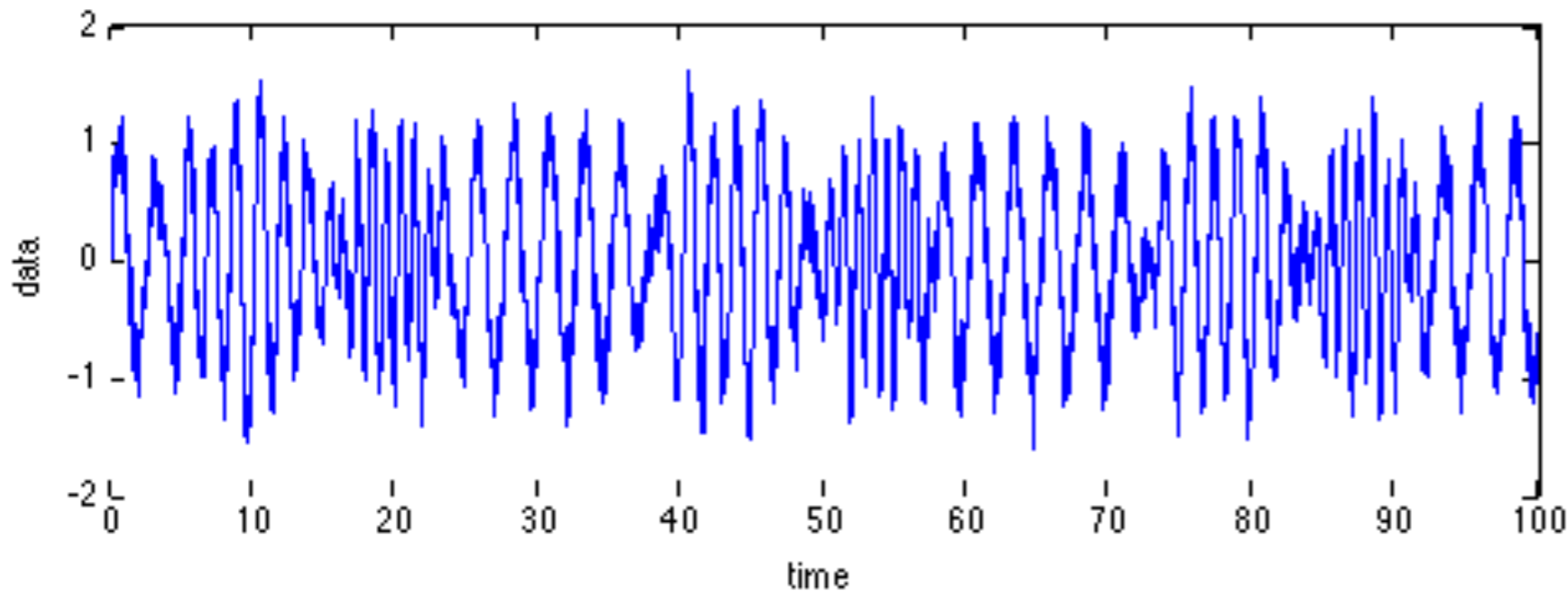


**zeitabhängige Frequenz**

Zeitfenster:  
**2s**

Frequenzauflösung  
**0.5Hz**

kein Überlapp  
Rechteckfenster



schlechte Frequenzauflösung durch kurzes Zeitfenster  
(TF\_3.m)

man muss

**Zeitauflösung**

and

**Frequenzauflösung**

**abwägen**

da

$$\Delta T \sim \frac{1}{\Delta f}$$

im Detail:

es sei  $x(t)$  ein Signal mit

Mittelwerte:  $\bar{t} = \int_{\mathcal{R}} t |x(t)|^2 dt = 0$

$$\bar{f} = \int_{\mathcal{R}} f |X(f)|^2 df = 0$$

Varianzen:  $\sigma_t^2 = \int_{\mathcal{R}} t^2 |x(t)|^2 dt$        $\sigma_f^2 = \int_{\mathcal{R}} f^2 |X(f)|^2 df$

dann gilt:

$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4}$$

folgt aus Fourier-Transformation



Frage:

wie kann man eine instantane Frequenz definieren  
mit seiner Zeit-Frequenz Unschärfe ?

$$\Delta T \Delta f = \textit{const}$$

(Heisenberg-Relation)