# Spektralanalyse physiologischer Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 6

zum Übungsblatt

# Aufgabe 2:

$$S_{\alpha\alpha}(\nu) = \sum_{j,k} \tilde{G}_{\alpha,j}(\nu)\tilde{G}^*_{\alpha,k}(\nu)\kappa^2_{jk}$$

$$E[I_2(t)I_2(t')] = \kappa^2\delta(t-t')$$

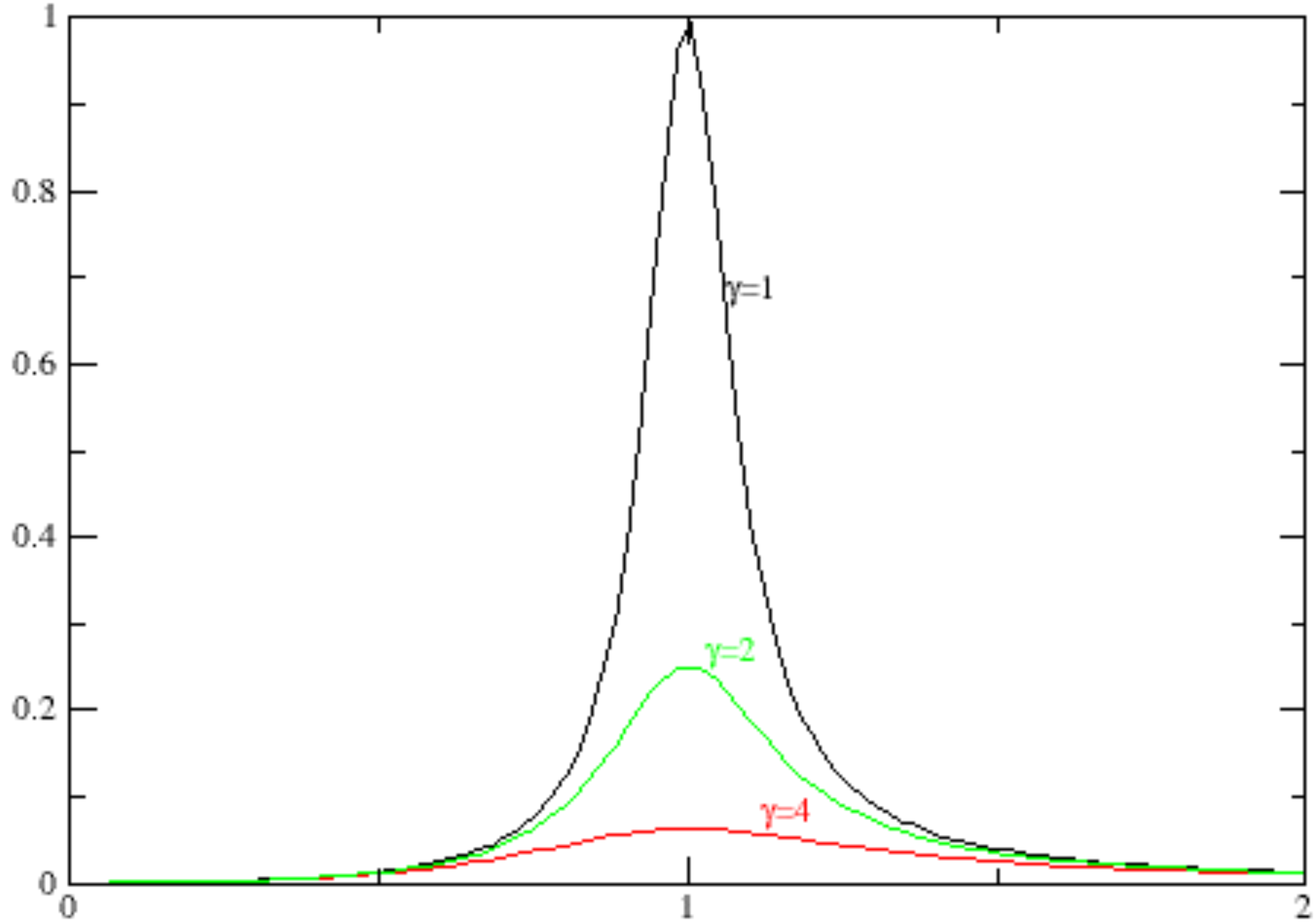
$$E[I_i(t)I_j(t')] = 0 \quad \text{sonst}$$

$$\kappa^2_{22} = \kappa^2 \ , \ \kappa^2_{jk} = 0 \quad \text{sonst}$$

$$S_{22}(\nu) = |\tilde{G}_{22}(\nu)|^2\kappa^2$$

$$\tilde{G}_{22}(\nu) = \frac{i2\pi\nu}{i2\pi\nu(i2\pi\nu - \gamma) + \omega^2}$$

$$S_{22}(\nu) = \frac{\kappa^2\nu^2}{4\pi^2\nu^4 + (\gamma^2 - 2\omega^2)\nu^2 + \omega^4/4\pi^2}$$




frequency

weiter mit Vorlesung 6

# Wie berechnet man die zeitliche lineare Antwort eines Systems auf ein äusseres Signal ?

<u>voriges Beispiel:</u>

$$\dot{x} = -\alpha x + I(t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) I(\tau) d\tau$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(\nu) e^{i2\pi\nu t} d\nu$$

eingesetzt:

$$\dot{G}(t) + \alpha G(t) = \delta(t)$$

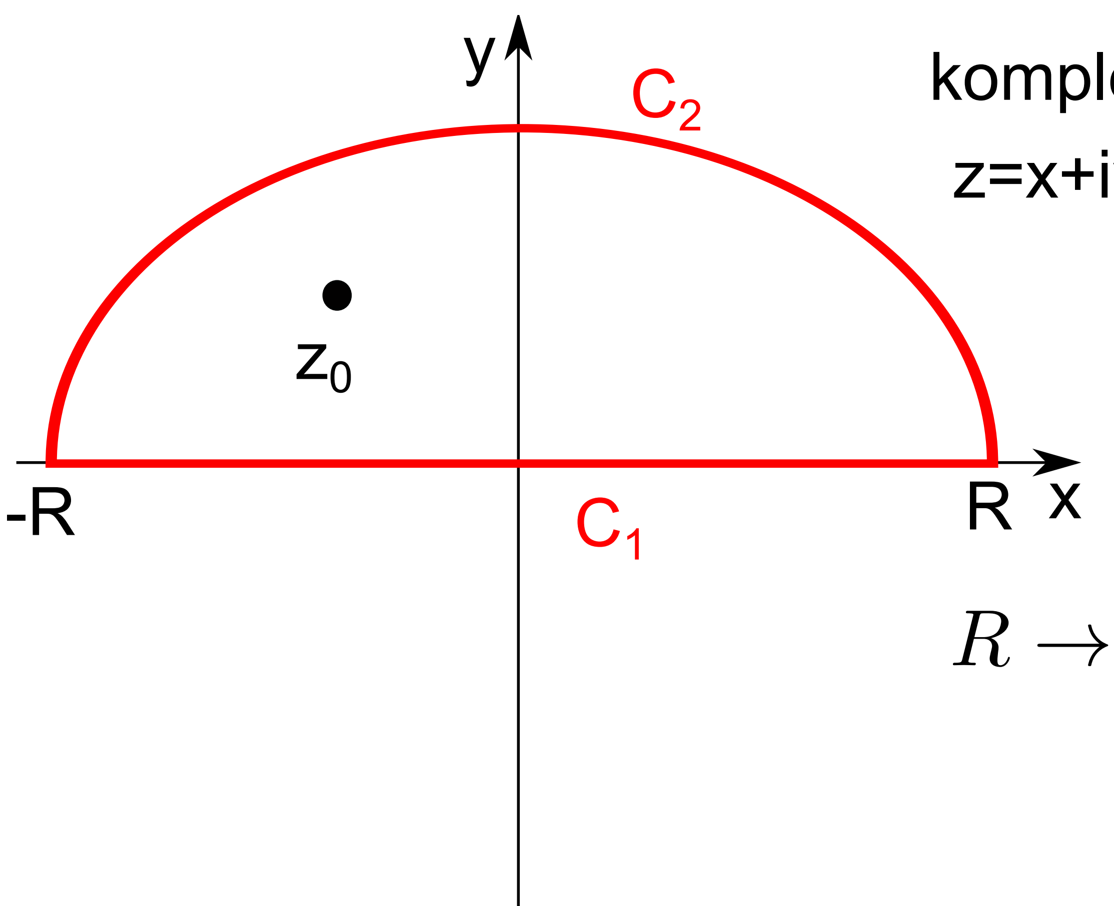
$$\tilde{G}(\nu) = \frac{1}{i2\pi\nu + \alpha}$$

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi\nu t}}{i2\pi\nu + \alpha} d\nu$$

$$= \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i2\pi\nu t}}{2\pi\nu - i\alpha} d\nu$$

Erweiterung in komplexe Ebene:

$$= \frac{1}{i} \int_{C_1} \frac{e^{i2\pi z t}}{2\pi z - i\alpha} dz \ , \ \ z \in \mathcal{C}$$




komplexe Ebene C

z=x+iy

Singularität $z_0 = i\alpha/2\pi$

$R \to \infty$

# Residuensatz der Funktionalanalysis (vereinfacht):

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_k Res(z_k)f$$

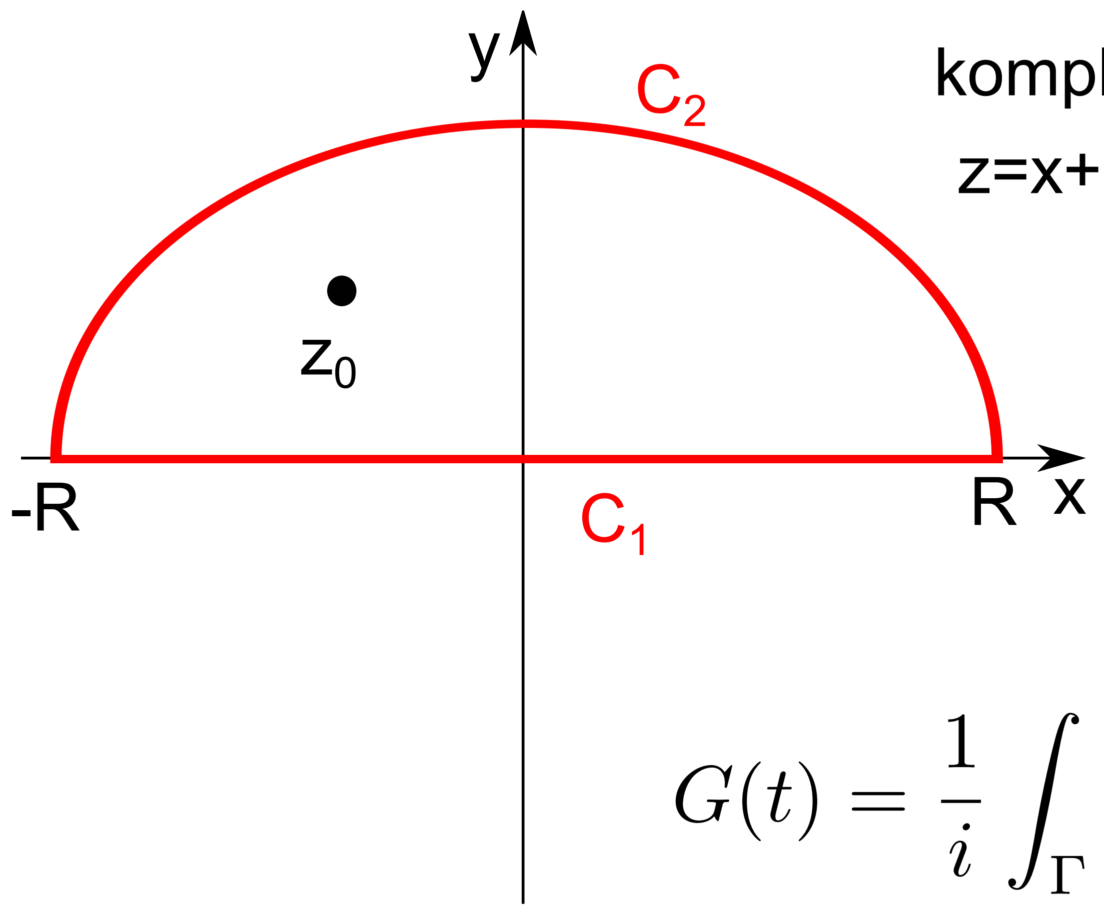
$\Gamma$ : geschlossener Weg in einfach zusammenhängendem Gebiet *D* in komplexer Ebene $\mathcal{C}$

$f : D \to \mathcal{C}$ holomorphe Funktion (ist komplex differenzierbar)

$Res(z_k)f$ : **Residuum** von *f* an Singularität $z_k$

Spezialfall: $f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}$

**Residuum:** $Res(z_0) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0} g(z)$




komplexe Ebene C

z=x+iy

$$\Gamma = C_1 + C_2$$

$$G(t) = \frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{e^{i2\pi zt}}{2\pi z - i\alpha}dz - \frac{1}{i}\int_{C_2} \frac{e^{i2\pi zt}}{2\pi z - i\alpha}dz$$

Weg Γ:

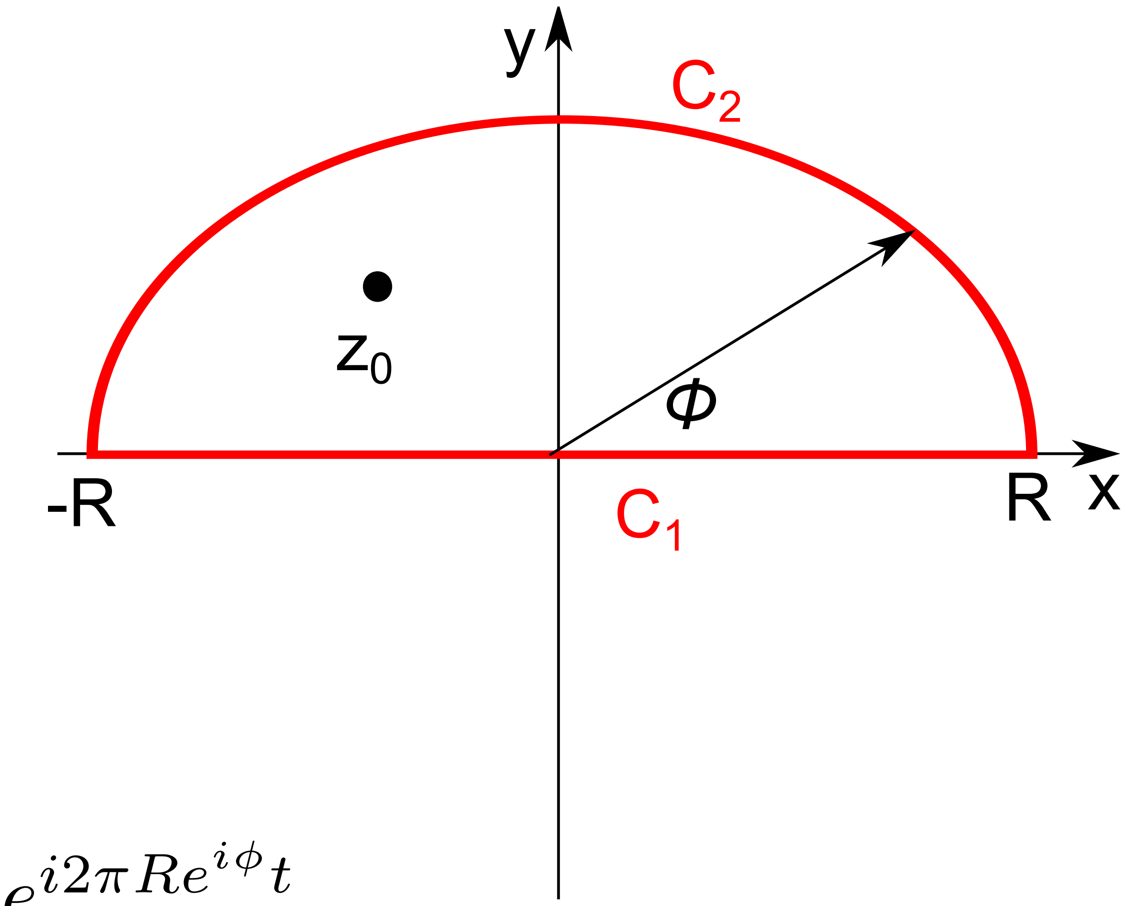
$$\frac{1}{i}\int_\Gamma \frac{e^{i2\pi zt}}{2\pi z - i\alpha}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{i2\pi zt}}{z - i\alpha/2\pi}dz$$

Residuensatz $= 2\pi i\frac{1}{2\pi i}e^{i2\pi(i\alpha/2\pi)t}$

$$= e^{-\alpha t}$$

# Wegintegral C2:

$$z = Re^{i\phi} \ , \ 0 \leq \phi \leq \pi \ , \ R \to \infty$$




$$\frac{1}{i}\int_{C_2} \frac{e^{i2\pi z t}}{2\pi z - i\alpha} dz = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\pi} \frac{e^{i2\pi Re^{i\phi} t}}{Re^{i\phi} - i\alpha/2\pi} d\phi$$

$$\leq \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\pi} \frac{|e^{i2\pi Re^{i\phi} t}|}{|Re^{i\phi} - i\alpha/2\pi|} d\phi$$

$$\frac{|e^{i2\pi Re^{i\phi} t}|}{|Re^{i\phi} - i\alpha/2\pi|} = \frac{|e^{i2\pi R\cos\phi t - 2\pi R \sin\phi t}|}{|Re^{i\phi} - i\alpha/2\pi|} \to 0 \ , \ t > 0$$

also: $$\frac{1}{i}\int_{C_2} \frac{e^{i2\pi zt}}{2\pi z - i\alpha} dz \to 0 \ , \ \ R \to \infty$$

nur dann, wenn t>0

Zusammenfassung:

$$\boxed{G(t) = e^{-\alpha t}\Theta(t)}$$

Θ(t): Heaviside-Funktion

eingesetzt:

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} I(\tau) d\tau}$$

grosse Bedeutung von linearer Antwort-Theorie:

beschreibt lineare Filter eines Signals

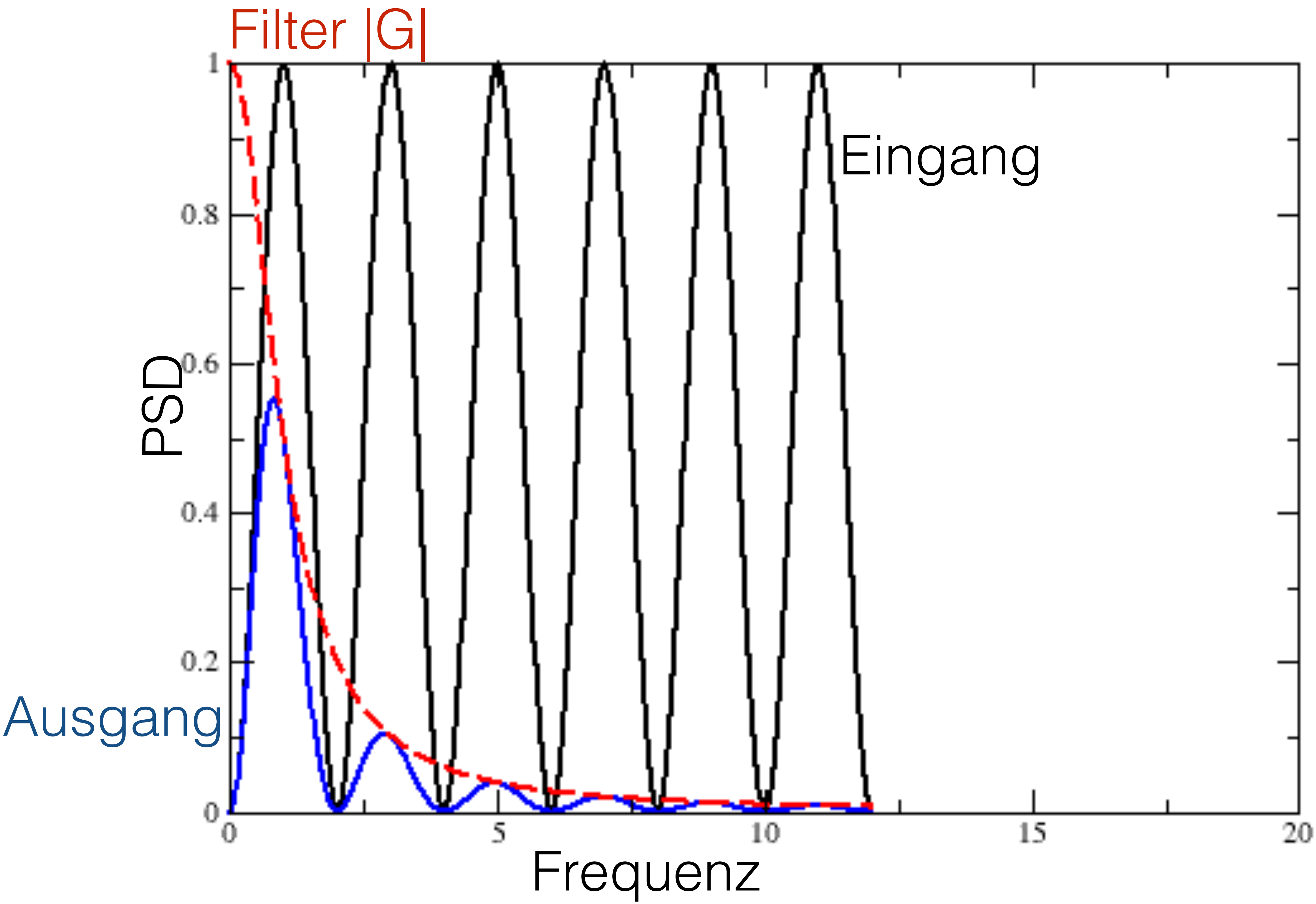
$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} F(t-\tau) I(\tau) d\tau$$

F: Filterfunktion

$$= \int_{-\infty}^{\infty} G(t-\tau) I(\tau) d\tau \qquad G(t) = F(t)\Theta(t)$$

$$\tilde{s}(f) = \tilde{G}(f)\tilde{I}(f)$$ spektraler Filter

# Beispiel für linearen Filter: Tiefpass-Filter



# II.3. Berechnung von Spektren

a) Definitionen

b) Periodogram+ Bartlett-Welch Methode

c) multi-taper Methode

# III. Zeit-Frequenz Analyse

## Periodogram

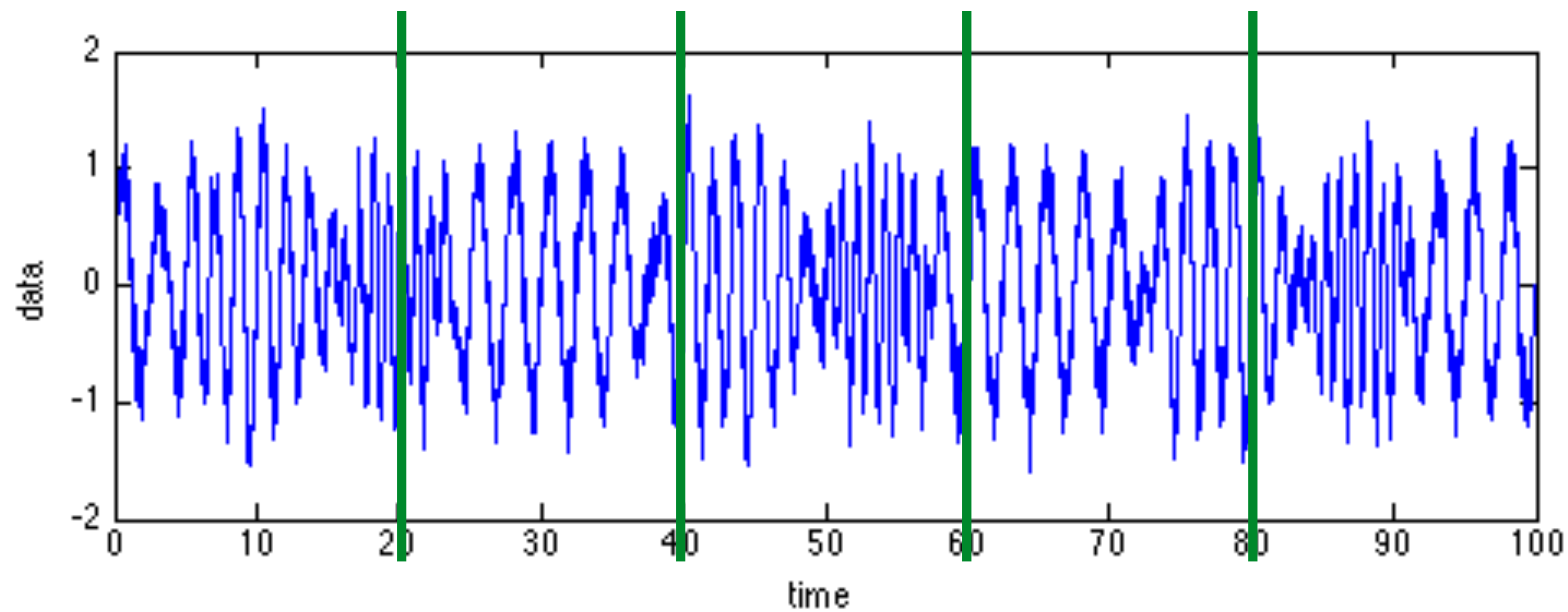
direkt aus DFT über endliche Zeitserie

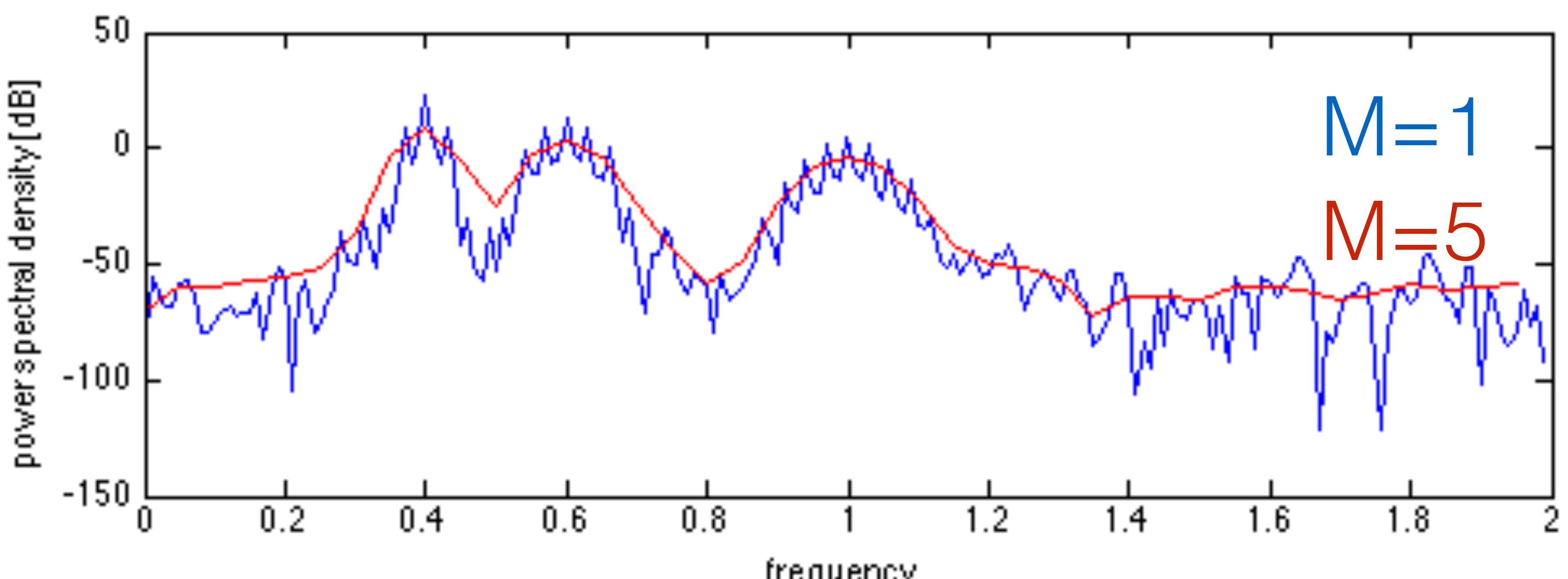
$$= \frac{\Delta t}{N} |DFT(f_n)|^2$$

(Fourier_10.m)

# Bartlett Methode

*schneide Zeitserie in M Segmente*
*und nimm das Mittel ihrer Periodograme*

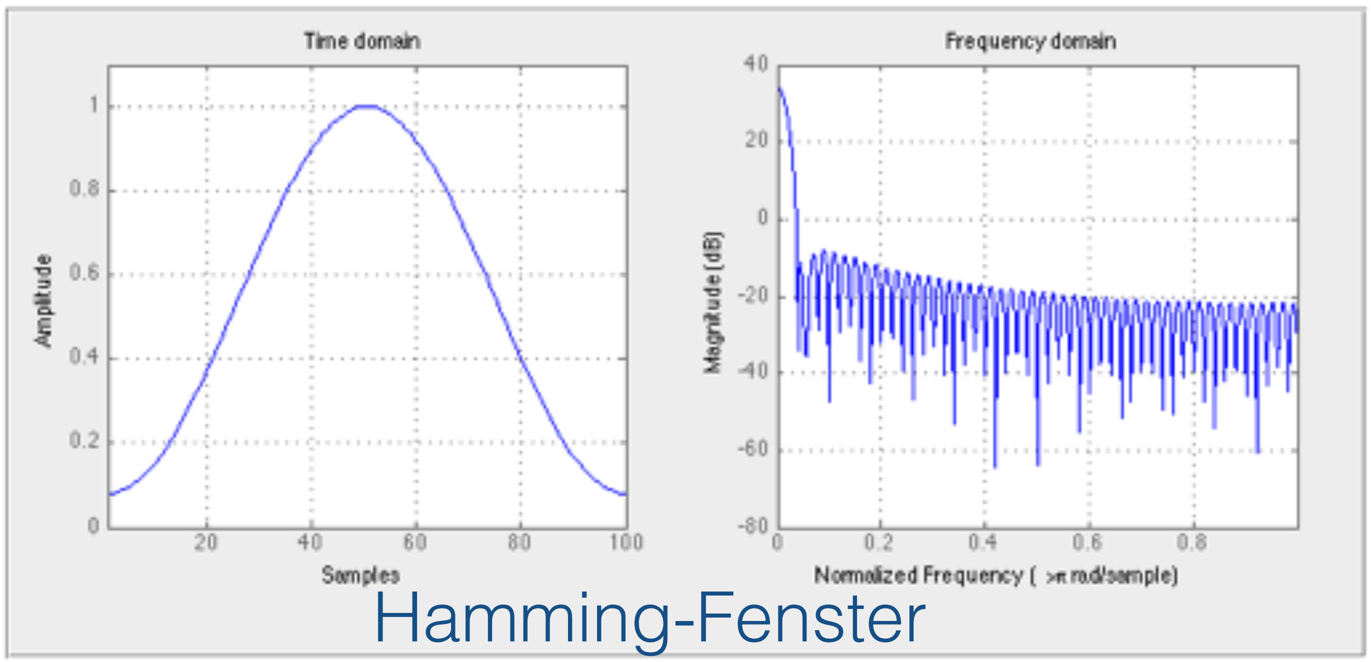


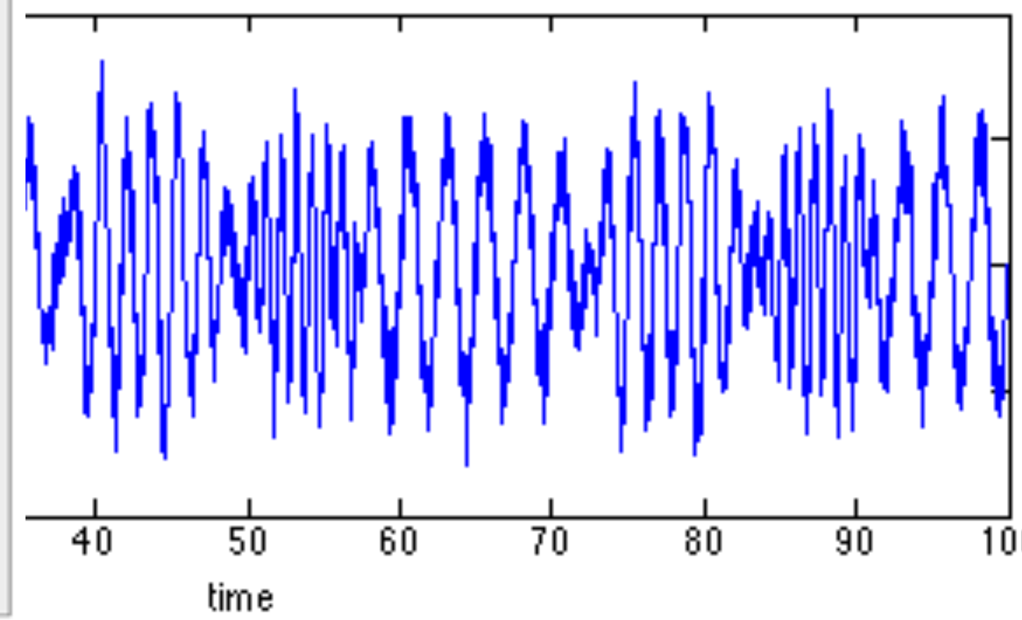



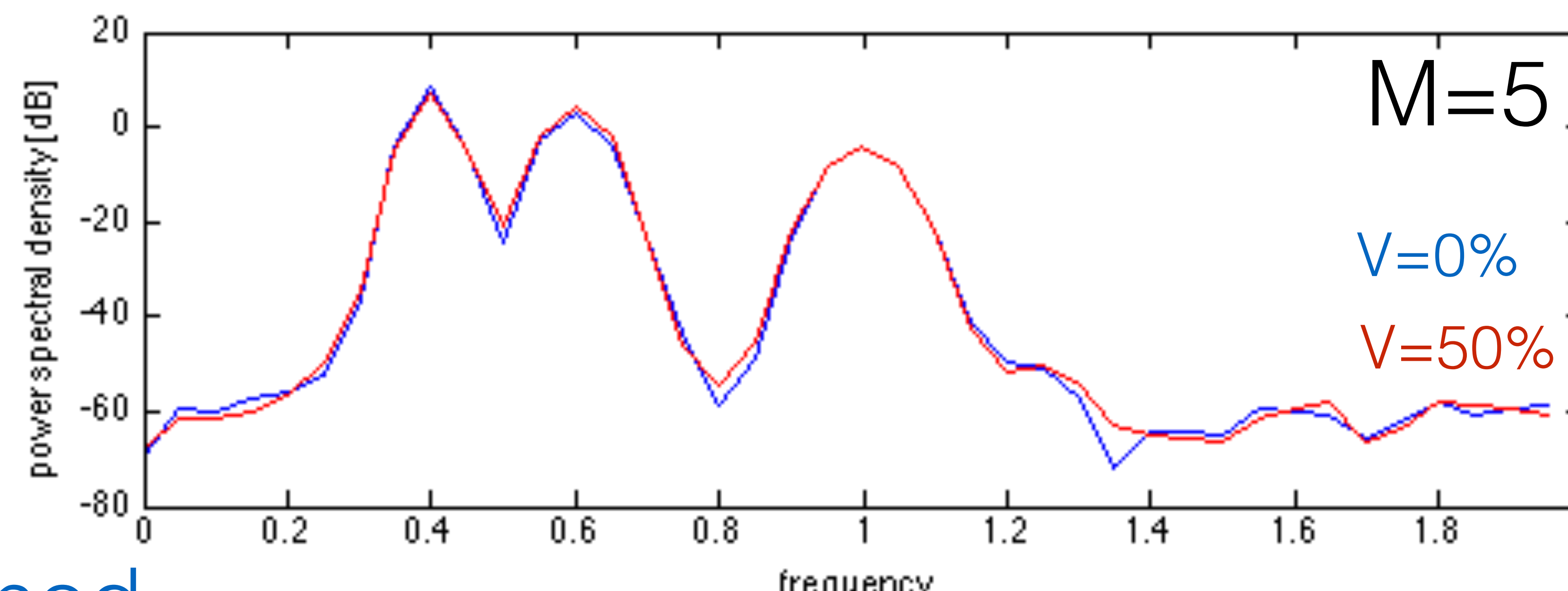

M=1: Periodogram

# Bartlett-Welch Methode

*teile Zeitserie in M Segmente, gewichte diese mit einem Hamming-Fenster mit Überlapp von V Datenpunkten und nimm den Mittelwert ihrer Periodograme window*




V=0: Bartlett method

(Fourier_11.m)

# II.3. Berechnung von Spektren

a) Definitionen

b) Periodogram+ Bartlett-Welch Methode

c) multi-taper Methode

# III. Zeit-Frequenz Analyse

Bartlett und Welch Methode :

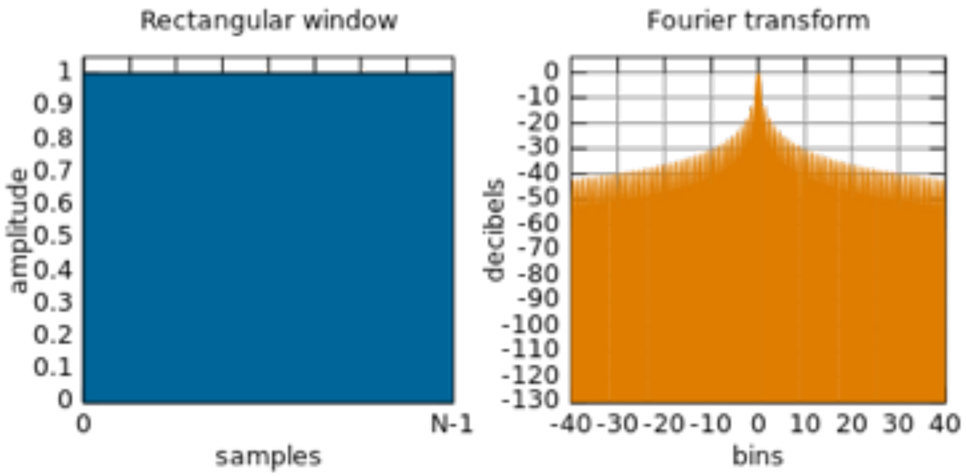
- Scharmittel über Realisierungen
- Annahme von ausreichend langen Zeitserien
- nicht anwendbar auf kurze Zeitserien

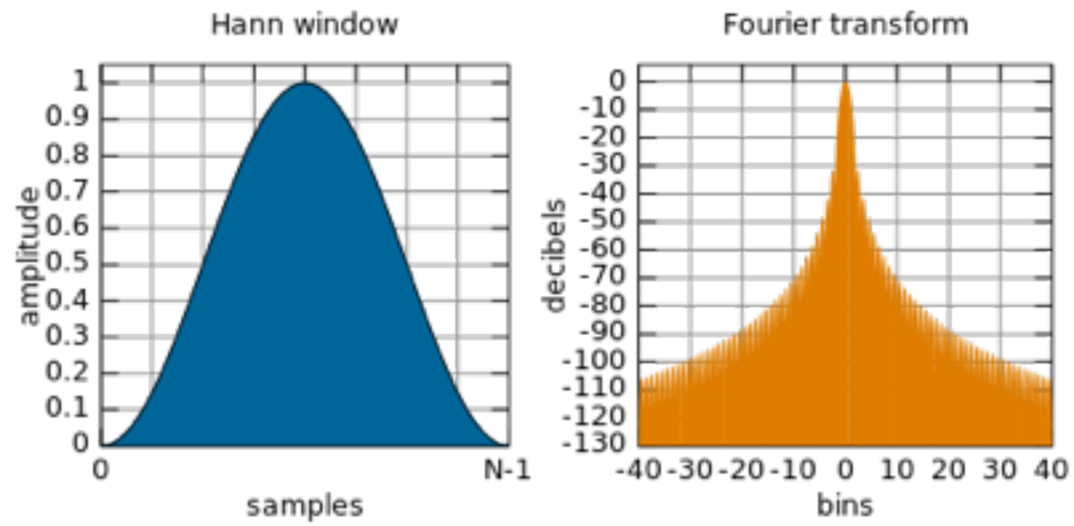
**Multitaper**

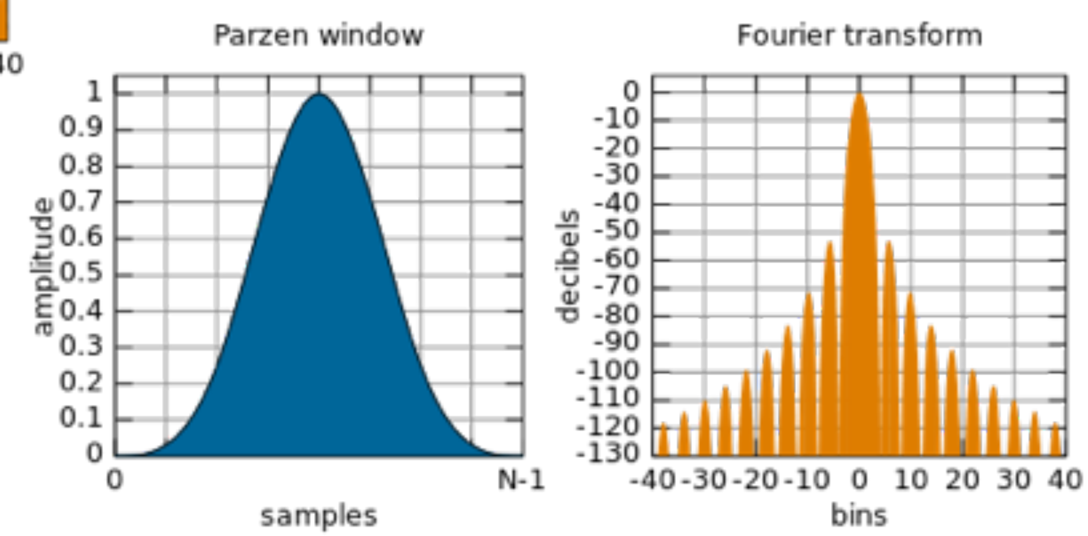
- Mittel über dieselbe Zeitserie
- Mittel über orthogonale Fensterfunktionen, sog. *data tapers*

Frage: welche Fensterfunktionen sind optimal ?

Erinnerung: verschiedene Fensterfunktionen



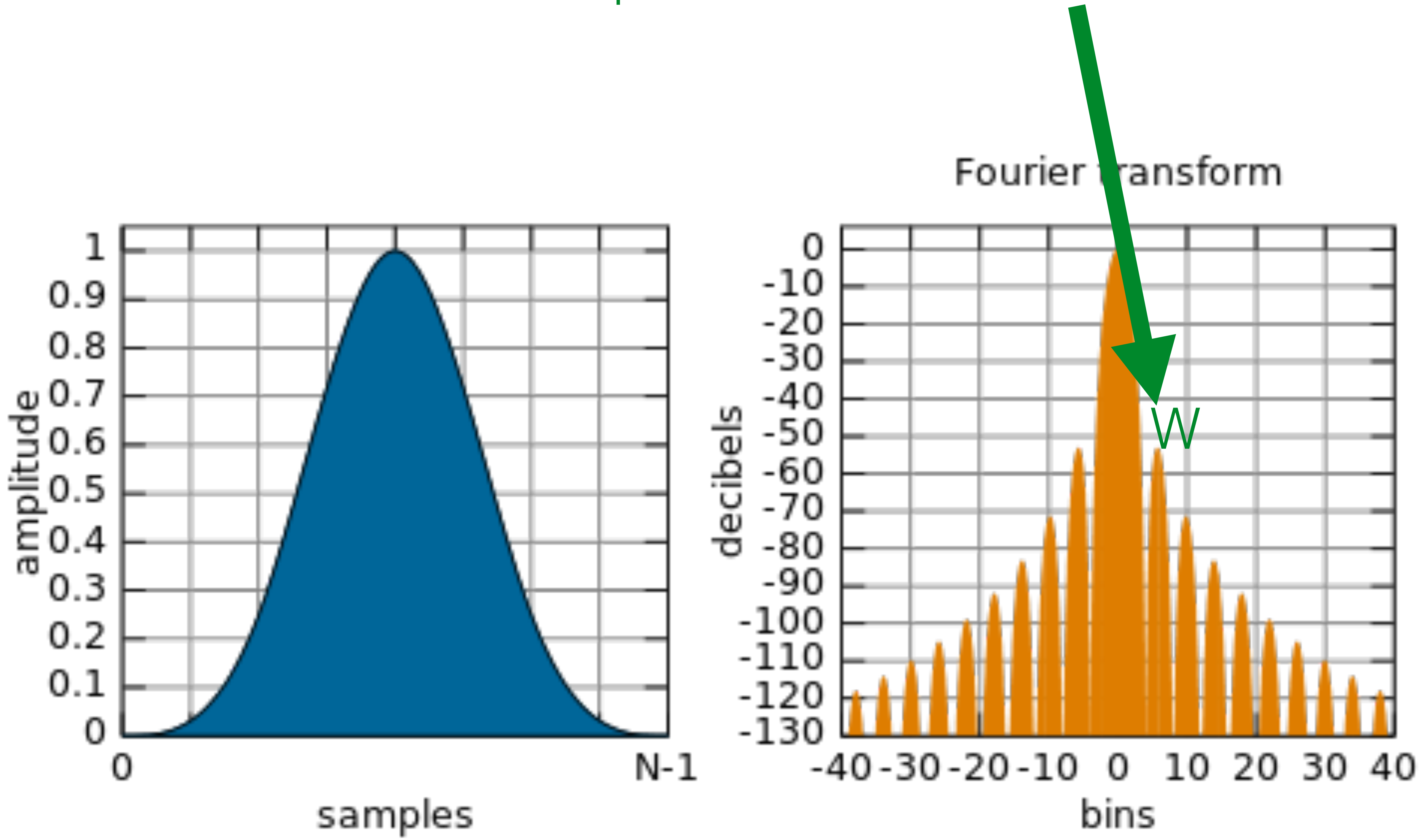




Optimierung der Fensterfunktionen

= Minimierung der spektralen Seitenbänder

# Spektrale Konzentration - Problem

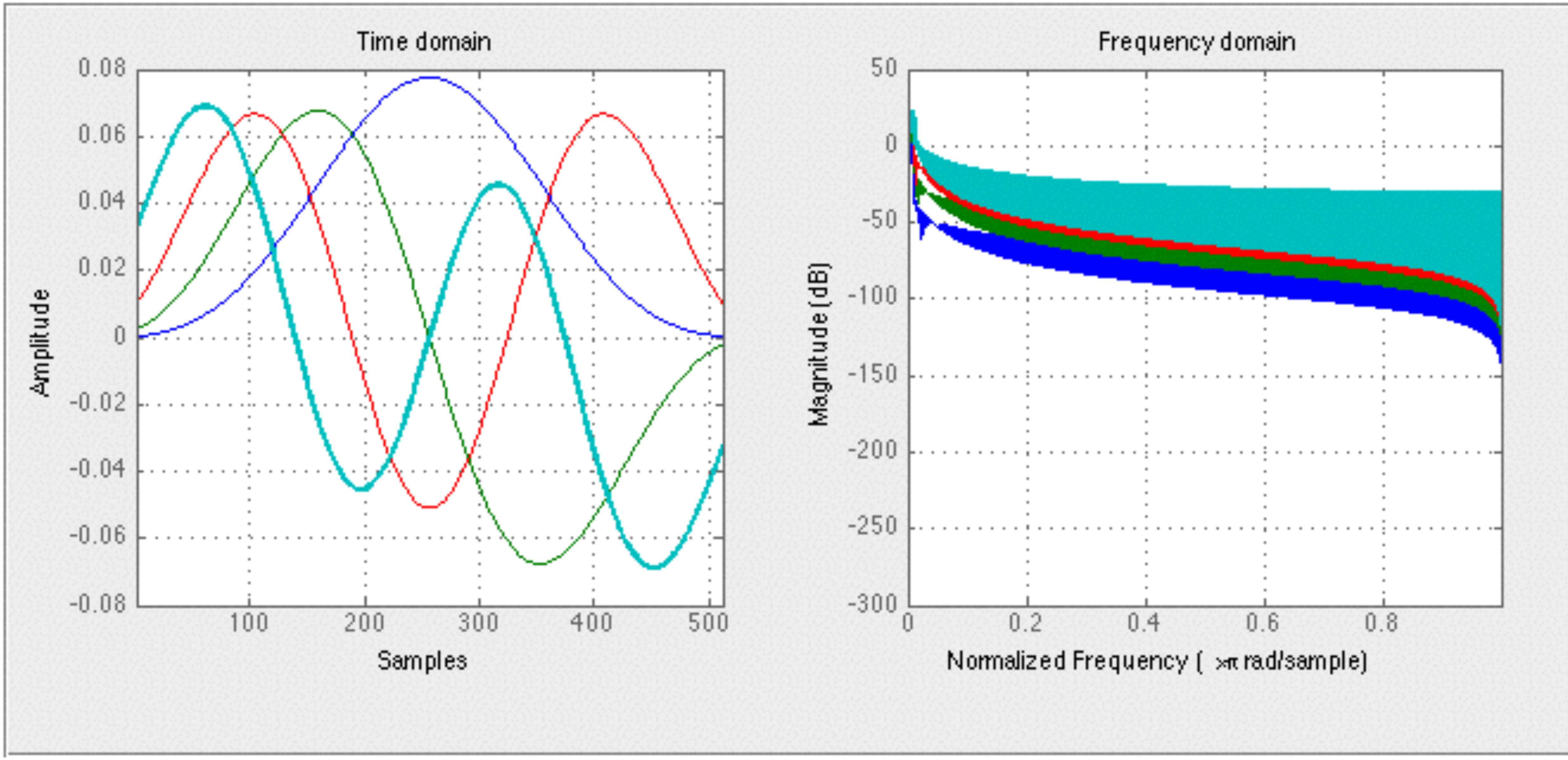
spektrales Seitenband



Lösung:

- gegeben: Grenzfrequenz W and T Datenpunkte
- es gibt *n=2WT* orthogonale optimale Fensterfunktionen
- diese *data tapers* sind *n Slepian sequences*
- Mittel von *data taper*-gewichteten Periodogramen über n *data taper*

# zur Illustration: 4 Slepian sequences



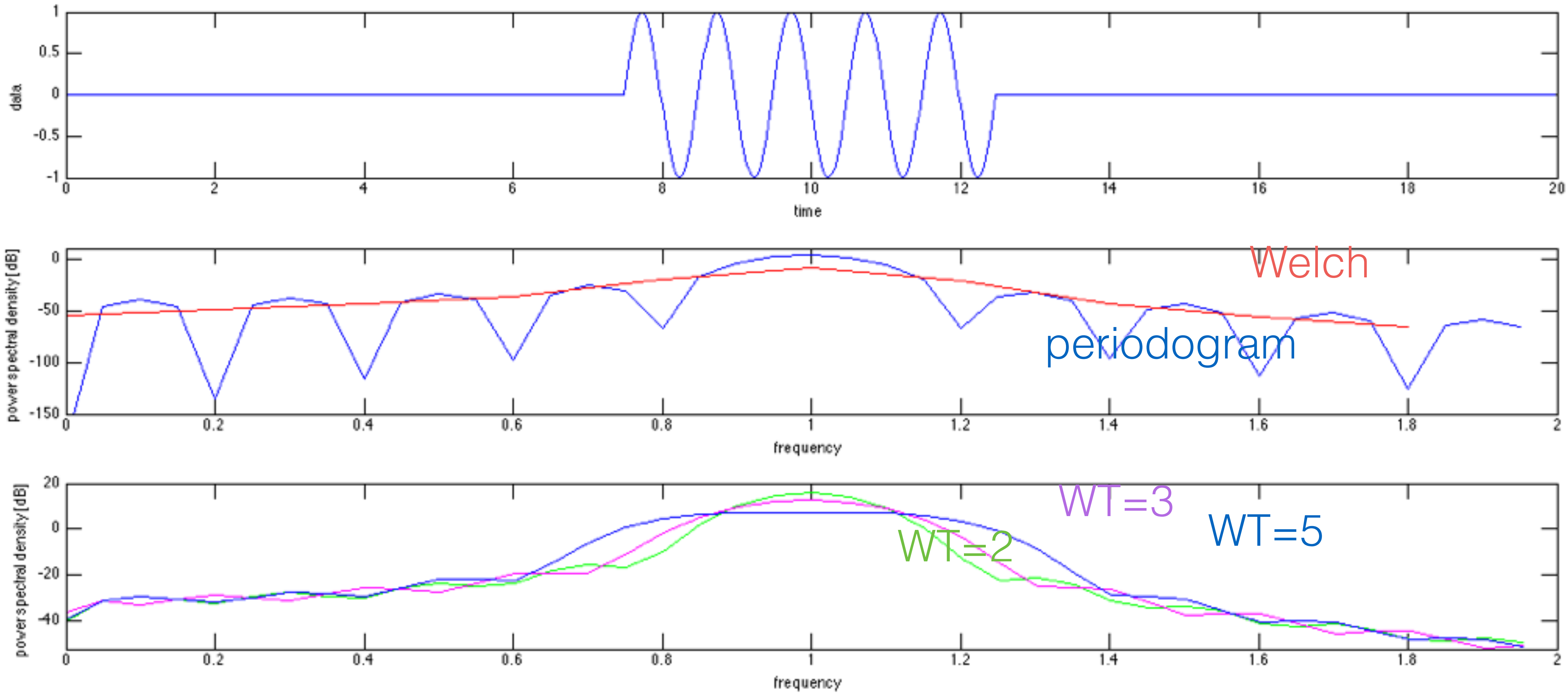
$$W = w\Delta f = \frac{w}{T}$$

w: Vielfaches der
unteren Grenzfrequenz

$$n = 2\frac{w}{T}T = 2w$$

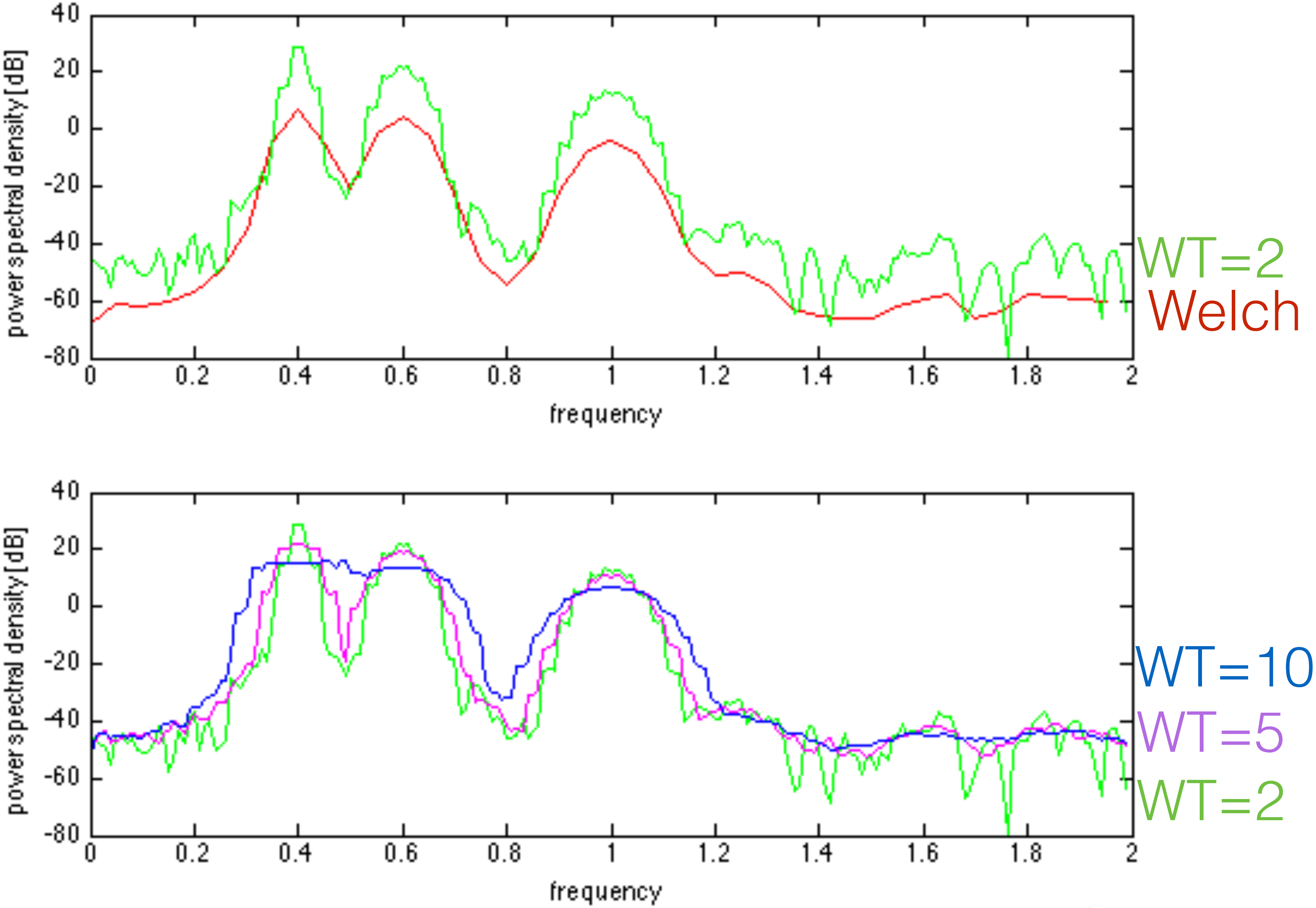
optimale Anzahl von *data taper*

# Reduzierung von *spectral leakage*




(Fourier_13.m)

# Beispieldaten: transiente Oszillationen




(Fourier_12.m)

aus Praxis: optimale Anzahl von *taper* ?

wähle spektrale Grenzfrequenz W

dann ist die optimale Anzahl

$n = 2\,W\,T.$

# effiziente Berechnung der DFT:

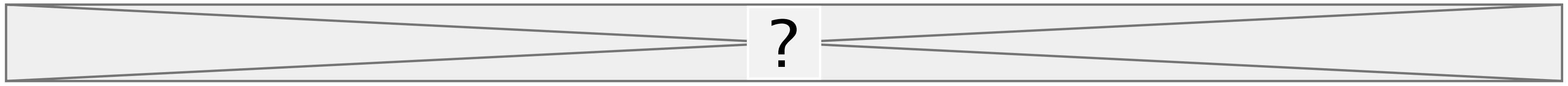
## Fast Fourier Transform (FFT)

# effiziente Berechnung der DFT:

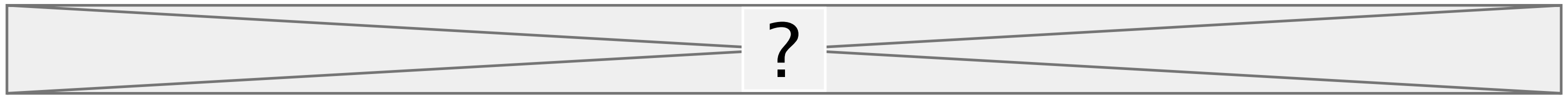
## Fast Fourier Transform (FFT)

- effiziente Implementierung der DFT

- Radix-2 Algorithmus (Cooley und Tukey, 1965) für



- Radix-4 Algorithmus (schneller als Radix-2) für



- Methoden sind anwendbar auf
- Bedingungen an Analyse mittels Fourierreihe
- Sampling und endliche Zeitfenster führen zu Fehlern in Fourieranalyse
- Lineare Antwort-Theorie
- konkrete Methoden zur Berechnung des PSD
- **lineare Filter**

# Lineare Filter

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} H(t-\tau) I(\tau) d\tau$$

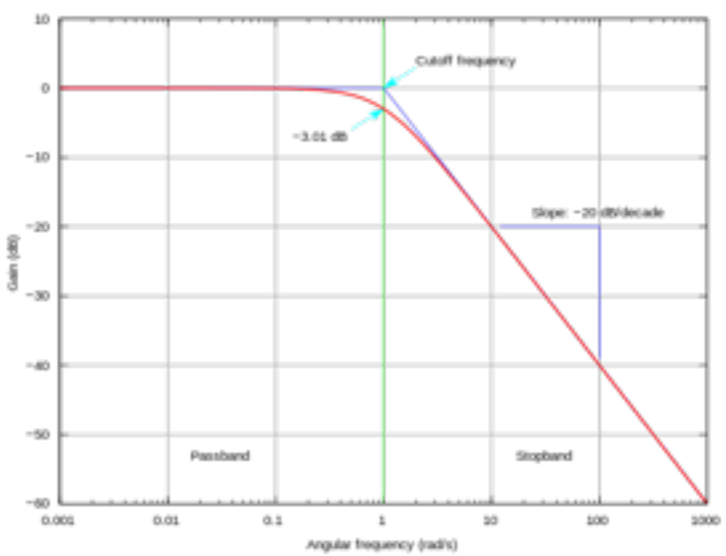
H: Filterfunktion

$$\tilde{s}(f) = \tilde{H}(f)\tilde{I}(f)$$ spektraler Filter

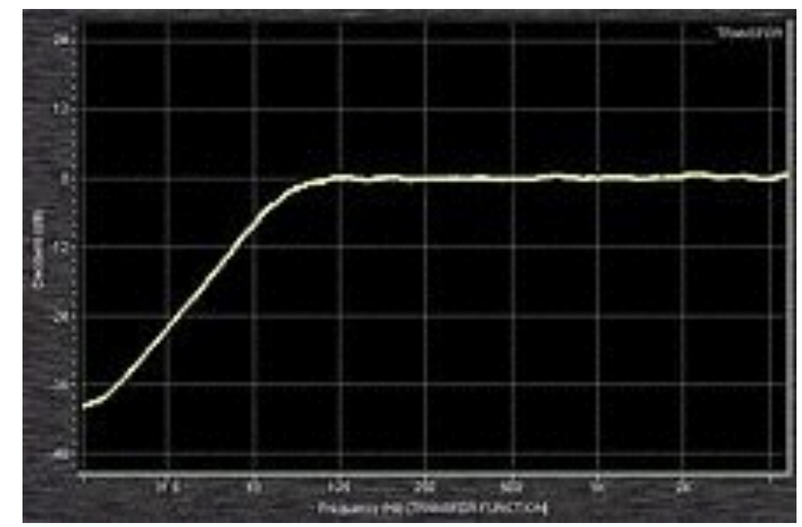
PSD ~ $|\tilde{H}(f)|^2 |\tilde{I}(f)|^2$

# Die Impulsantwort-Funktion H(t) definiert den Filtertyp, e.g.

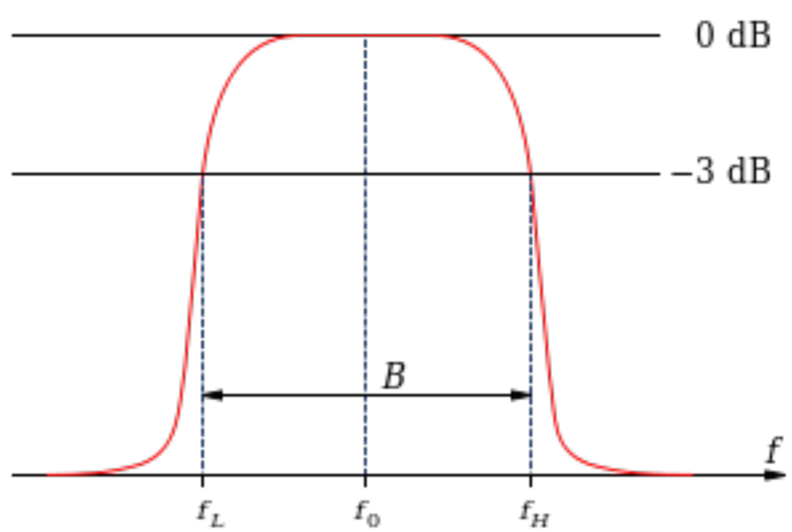
## Tiefpassfilter




## Hochpassfilter



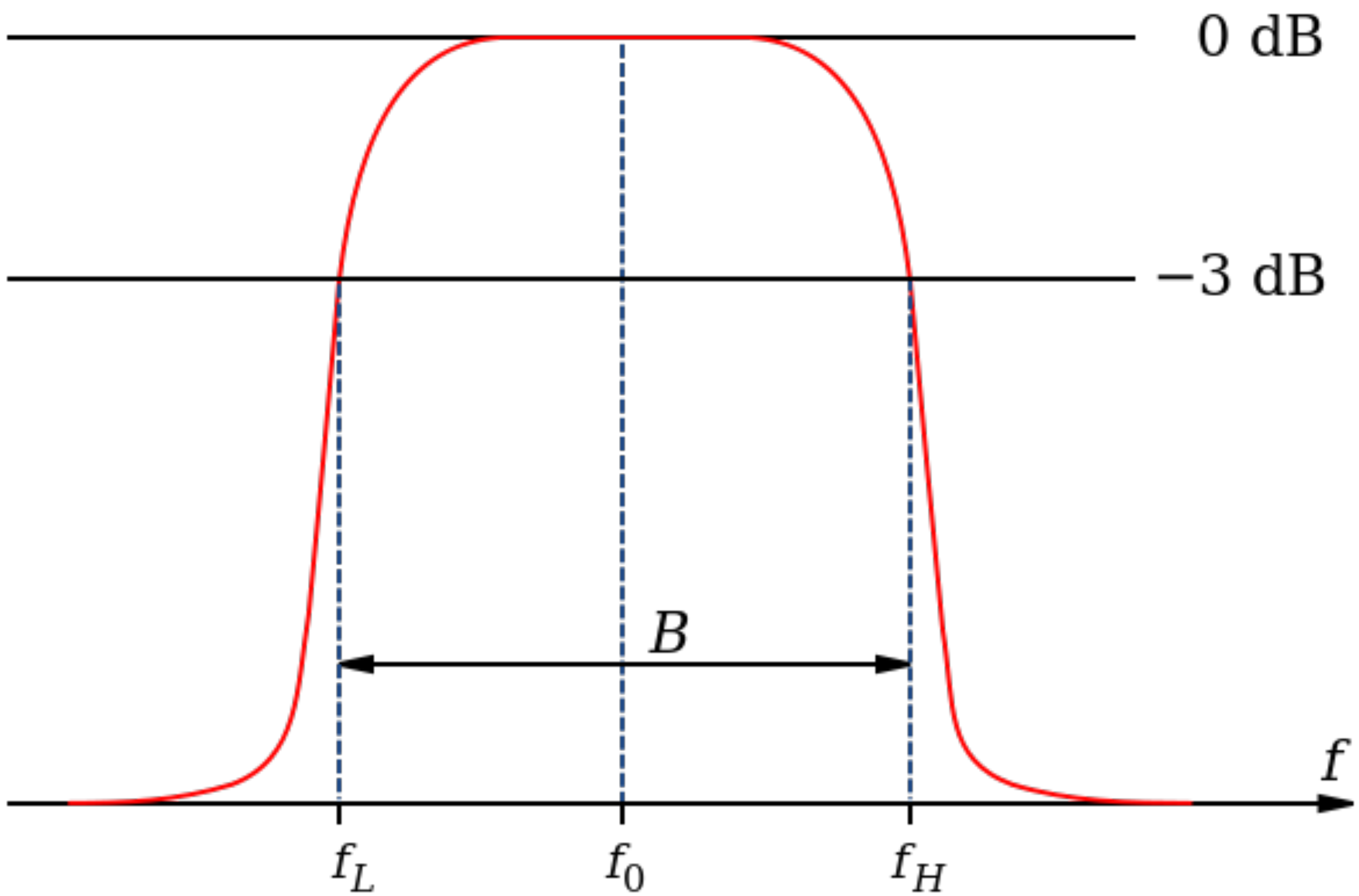
## Bandpassfilter



- die Impulsantwort-Funktion hat *unendliche* Dauer: Filter heiβt **Infinite Impulse Response (IIR)** - Filter

$$s(t) = \int_0^\infty H(\tau) I(t-\tau) d\tau$$

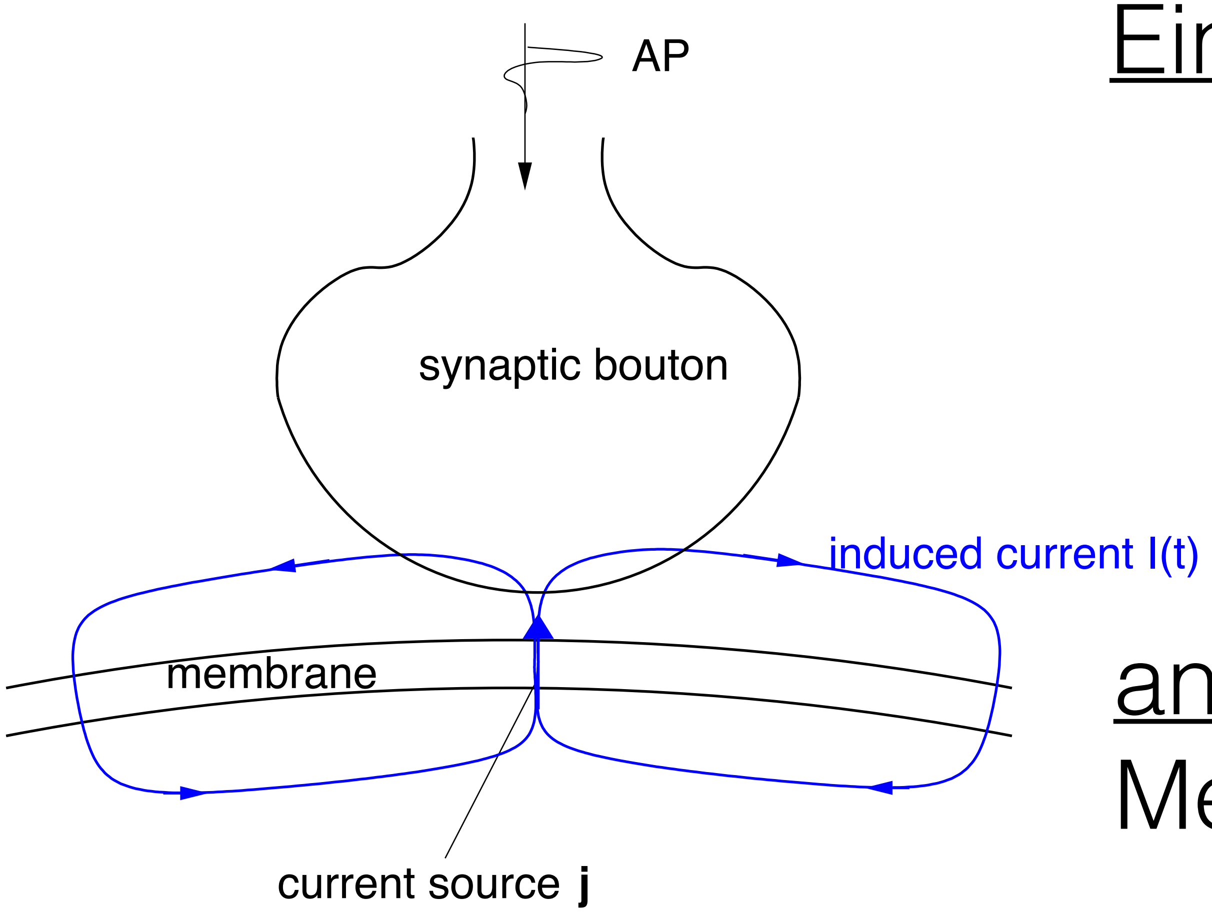
weitere Begriffe




Stopband Passband Stopband

# Beispiel: Tiefpass-Filter

einzelne Synapse




induzierter Strom

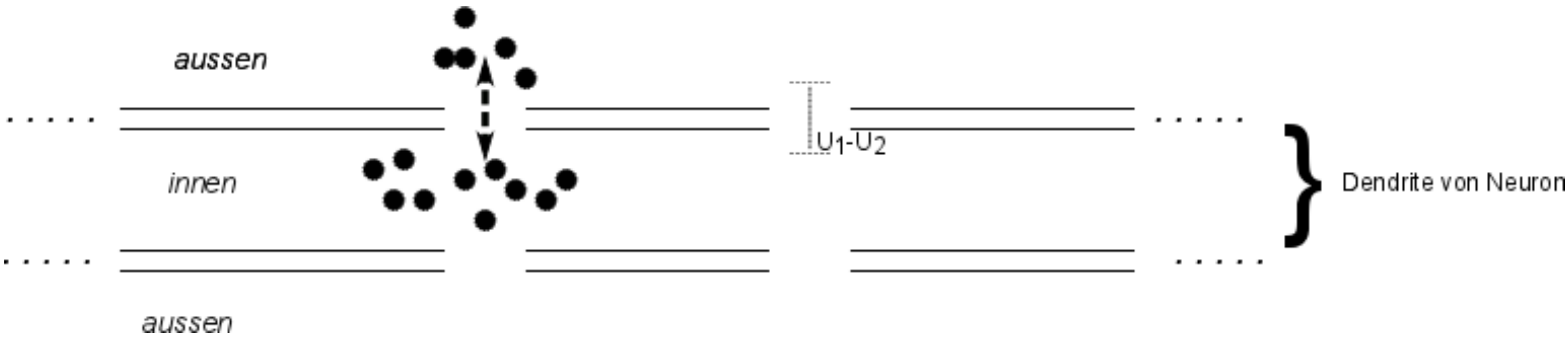
Eingang: Folge von spikes

$$I(t) = \sum_i I_0 \delta(t - t_i) \ , \ t_{i+1} > t_i$$

antwortendes System:
Membran mit Ionenkanal

Ausgang: Membranspannung

$$V = V(t) \ ?$$




Membran als Kondensator:

$$CV(t) = Q(t) \;\rightarrow\; C\frac{dV}{dt} = I_C(t)$$

Strom durch Membran

Kirchhoff-Gesetz:

$$C\frac{dV}{dt} + g(t)(V - E_s) + g_L(V - E_L) = 0$$

Strom durch Synapse

Leckstrom durch andere Ionenkanäle

Leitfähigkeit $$\frac{dg(t)}{dt} = -\alpha g(t) + \alpha I(t)$$

$$C\frac{dV}{dt} = -g_L(V - E_L) - g(t)(V - E_s)$$

ohne Eingangssignal:

$$C\frac{dV}{dt} = -g_L(V - E_L)$$

Ruhezustand:

$$\frac{dV}{dt} = 0 \;\; : \quad V_r = E_L$$

Näherung:

$$g(t)(V - E_s) \approx g(t)(V_r - E_s)$$

$$C\frac{dV}{dt} = -g_L(V - E_L) - Kg(t)$$

$$K = V_r - E_s$$

$$u(t) = V(t) - V_r$$

$$\left(\frac{C}{g_L}\right)\frac{du}{dt} = -u(t) - \frac{K}{g_L}g(t)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = -\alpha g(t) + \alpha I(t)$$

$$t \to \infty : u(t) = \frac{K}{g_l}\int_{-\infty}^{t} H(T - \tau)g(\tau)d\tau$$

$$g(t) = \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} \sum_i \delta(\tau - t_i) d\tau$$

$$= \alpha \sum_i e^{-\alpha(t-t_i)}$$

Annahme: spikes treten regelmäßig auf mit Rate F, $\alpha \to \infty$

$$E\left[\sum_{i,j} \delta(t-t_i)\delta(t'-t_j)\right] = F\delta(t-t')$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{S_u(f) = \frac{I_0 \gamma^2 F}{1 + 4\pi^2 \beta^2 f^2}}$$ (Übungen)

Synapse ist Tiefpassfilter