Verfahren zur Datenanalyse gemessener Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 4

zum Übungsblatt

Aufgabe 1:

$$X_T(f) \sim \frac{1}{i}\left(\frac{\sin(\pi(f-3Hz)5s)}{f-3Hz} - \frac{\sin(\pi(f+3Hz)5s)}{f+3Hz}\right)$$

Nullstellen:

T=5s: f=3Hz+2/5s, 3Hz+4/5s, 3Hz+6/5s,…. = 3.4Hz, 3.8Hz, 4.2Hz, ….

T=1s: f=3Hz+2/s, 3Hz+4s, 3Hz+6/s,…. = 5Hz, 7Hz, 9Hz, ….

T=0.33 s: f=3Hz+6/s, 3Hz+12s, 3Hz+18/s,…. = 9Hz, 15Hz, 21Hz, ….

Aufgabe 1:

$$X_T(f) \sim \frac{1}{i}\left(\frac{\sin(\pi(f-3Hz)5s)}{f-3Hz} - \frac{\sin(\pi(f+3Hz)5s)}{f+3Hz}\right)$$

Nullstellen:

T=5s: f=3Hz+2/5s, 3Hz+4/5s, 3Hz+6/5s,…. = 3.4Hz, 3.8Hz, 4.2Hz, ….

T=1s: f=3Hz+2/s, 3Hz+4s, 3Hz+6/s,…. = 5Hz, 7Hz, 9Hz, ….

T=0.33 s: f=3Hz+6/s, 3Hz+12s, 3Hz+18/s,…. = 9Hz, 15Hz, 21Hz, ….

Vorsicht: 1/T=Δf

Aufgabe 2:

Signal: $T=100s$, $\Delta f=0.01$

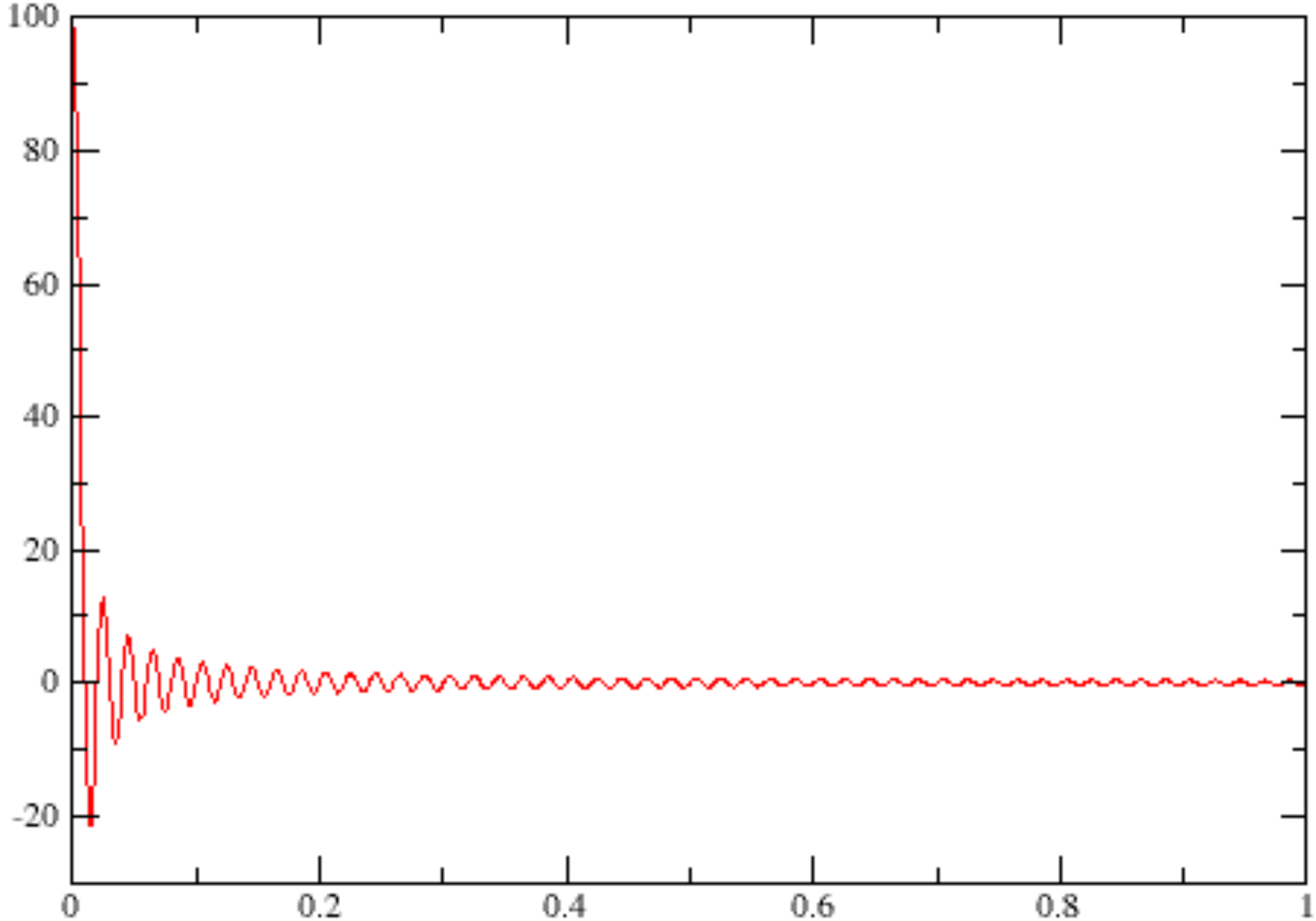
spectral leakage - Effekt:

1) z.Bsp. charakterisiert durch Nullstellen

bei Frequenzen $2 \cdot n/100s = n \cdot 0.02Hz$

also 0.02Hz, 0.04Hz, ….

2) z.Bsp. charakterisiert durch Abfall der Amplitude mit $1/f$



100
80
60
40
20
0
-20
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Aufgabe 3:

$$S(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} d\tau$$

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) e^{i2\pi\nu\tau} d\nu$$

$$C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) d\nu$$

$$= E[x^2(t)]$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} x^2(t) dt$$

Vorlesung 4

was ist Stationarität ?

Exkurs in **Stochastischen Prozesse**

Exkurs in **Stochastischen Prozesse**

a) Zufallszahlen

b) Wahrscheinlichkeit

c) stochastische Prozesse

d) Wahrscheinlichkeitsverteilungen

e) Ergodizität und Stationarität

Exkurs in **Stochastischen Prozesse**

a) Zufallszahlen

b) Wahrscheinlichkeit

c) Wahrscheinlichkeitsverteilungen

d) stochastische Prozesse

e) Ergodizität und Stationarität

Beispiel:

man wirft einen idealen Würfel n-mal und erhält n Zufallszahlen x_i , i=1,..,n

$\{x_i\}=\{1,2,3,4,5,6\}$

z.Bsp. die Folge 3,4,1,5,6,6,2,….

Beispiel:

man wirft eine ideale Münze n-mal und erhält n Zufallszahlen x_i , i=1,..,n

$\{x_i\}=\{\text{Kopf},\text{Zahl}\}$ oder $\{x_i\}=\{0,1\}$

z.Bsp. die Folge 0,1,1,1,0,1,0,0,….

Exkurs in **Stochastischen Prozesse**

a) Zufallszahlen

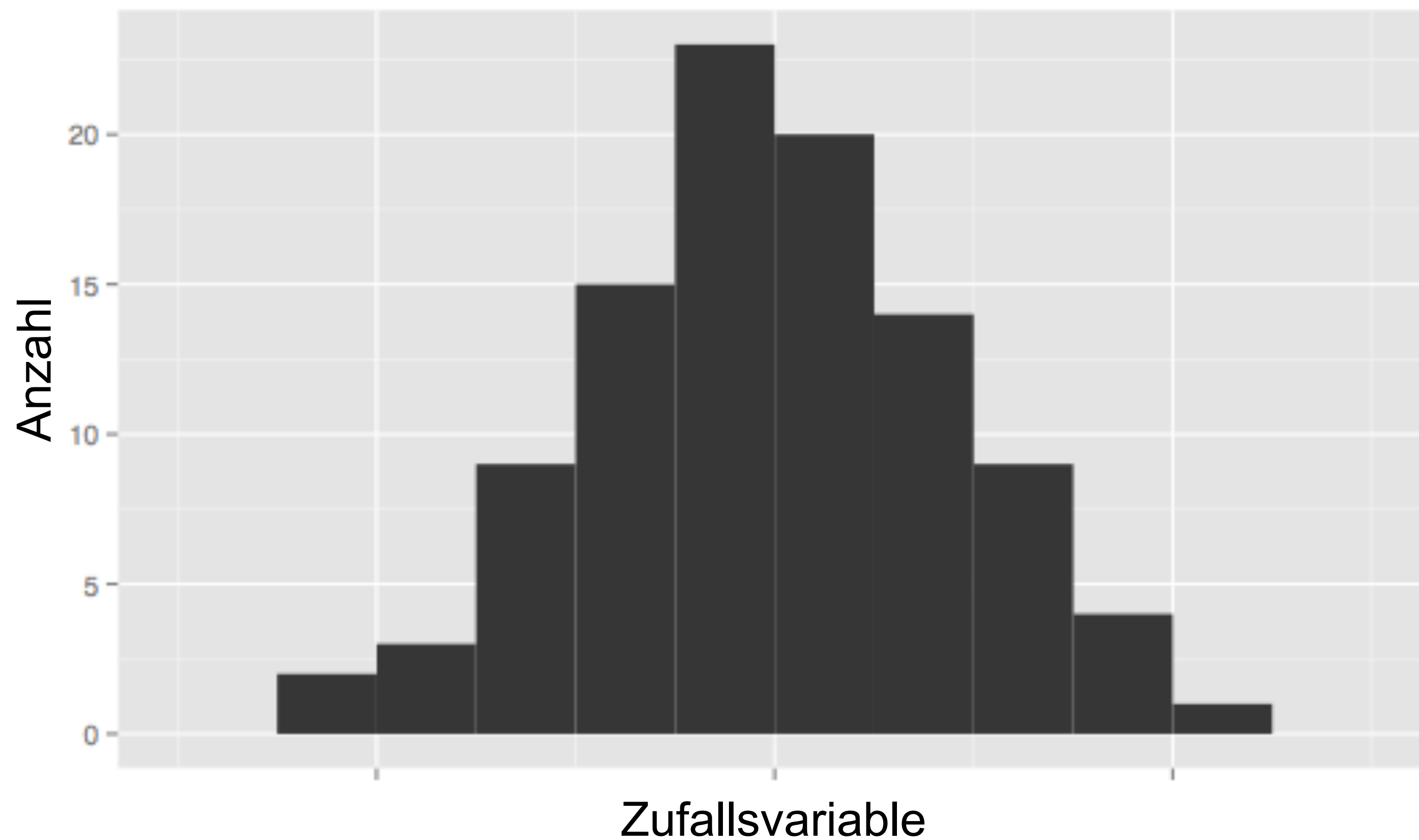
b) Wahrscheinlichkeit

c) Wahrscheinlichkeitsverteilungen

d) stochastische Prozesse

e) Ergodizität und Stationarität

Frage: wie oft tritt welche Zufallszahl auf ?



Histogramm:

$$H(x_i) = \{\#X_i \mid X_i,\ x_i - \Delta x/2 \leq X_i < x_i + \Delta x/2\}$$

Δx: Intervall

Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses:

$$P(x_i) = \frac{H(x_i)}{n}$$

Beispiel:

idealer Würfel hat 6 mögliche Augen, die gleich wahrscheinlich sind

$$P(x_i) = \frac{1}{6}$$

Wahrscheinlichkeit einer geraden Augenzahl y_i ,i=1,2,3:

$$P(y_i) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Exkurs in **Stochastischen Prozesse**

a) Zufallszahlen

b) Wahrscheinlichkeit

c) Wahrscheinlichkeitsdichte

d) stochastische Prozesse

e) Ergodizität und Stationarität

wichtige Eigenschaft:

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$$

$p(x_i)$: Wahrscheinlichkeitsdichte

falls Zufallsvariable kontinuierlich ist, z.Bsp. $x \in \mathcal{R}$

$$\int_{\mathcal{D}} p(x)x = 1$$

p(x): Wahrscheinlichkeitsdichte

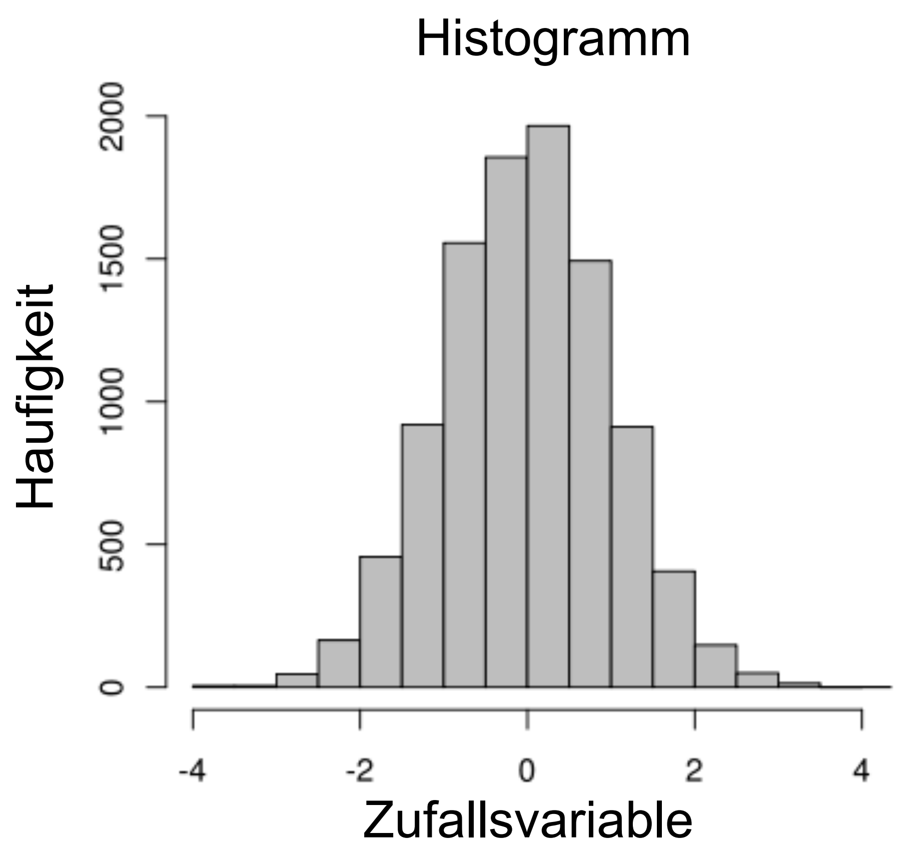
$$P(y) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$

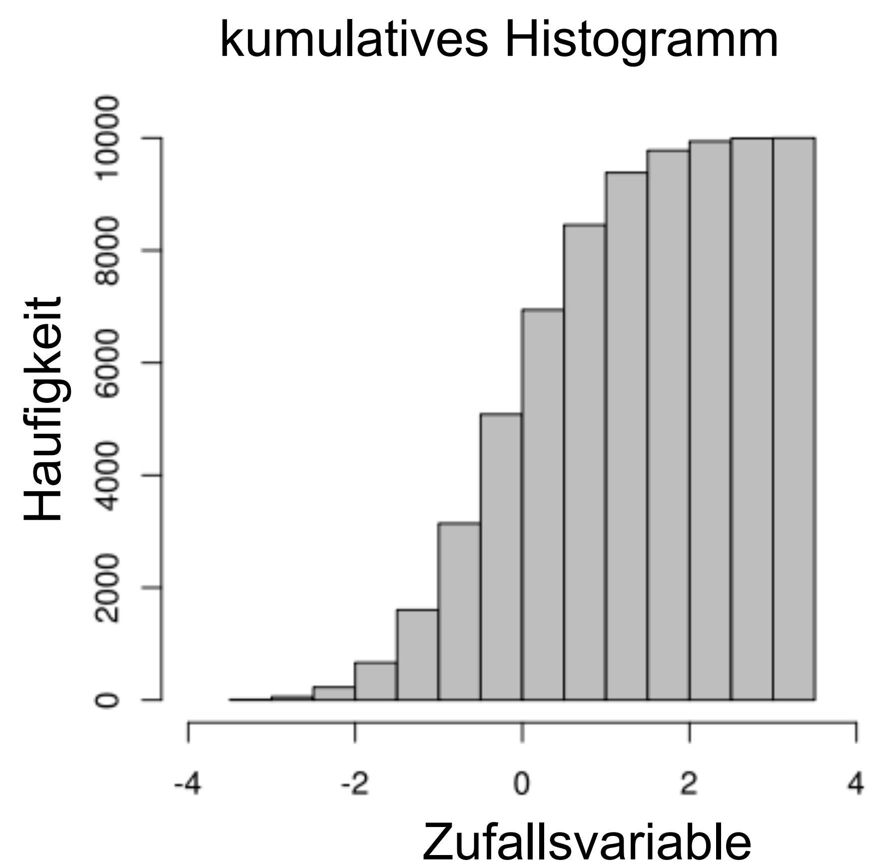
Wahrscheinlichkeit, einen Wert y zu finden mit

$$x_1 \leq y < x_2$$

Frage:

wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,
eine Zufallszahl kleiner als y zu erhalten ?

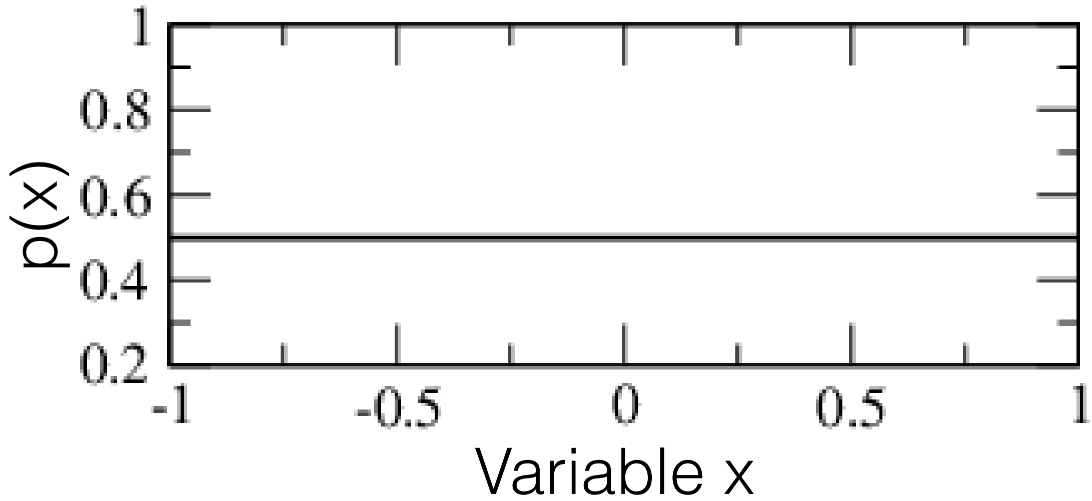




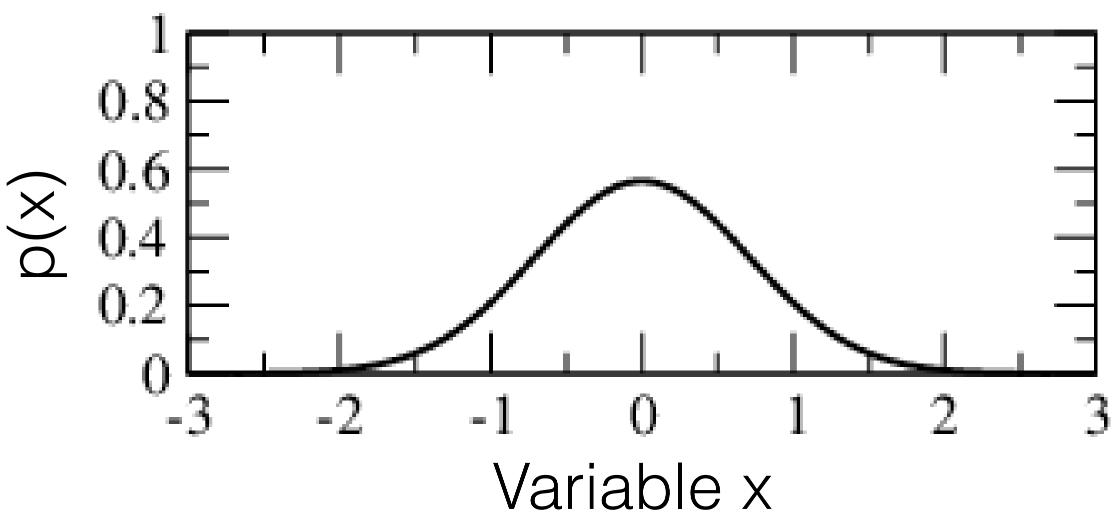
kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(X \leq x) = \sum_{i\ ,\ x_i \leq x} \frac{H(x_i)}{n}$$

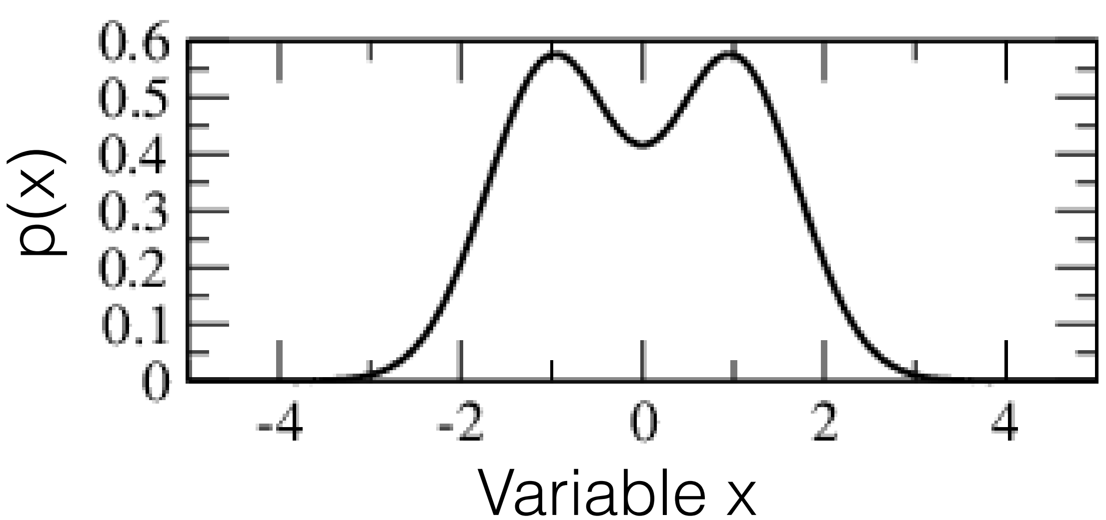
Beispiele von Wahrscheinlichkeitsdichten:



Gleichverteilung



Normalverteilung
(Gaussverteilung)



bimodale Verteilung

Statistische Eigenschaften von Verteilungen:

Erwartungswert $$E\left[f(x)\right] = \int_{\mathcal{D}} f(x)p(x)dx$$

erstes Moment
(erster Kumulant)
$$E\left[x\right] = \int_{\mathcal{D}} xp(x)dx = \bar{x}$$ (**Mittelwert**)

zweites Moment $$E\left[x^2\right] = \int_{\mathcal{D}} x^2 p(x)dx$$

zweiter Kumulant

$$E\left[(x - E[x])^2\right] = \int_{\mathcal{D}} (x - E[x])^2 p(x)dx = \sigma^2$$

(**Varianz**)

Mehrere Zufallsvariablen:

$$p(x_1; x_2; \ldots; x_N)$$

multivariate Wahscheinlichkeitsdichte mit N Variablen (*joint probability density*)

$$p(\underbrace{x_k, \ldots, x_{k+l}}_{M \text{ Variablen}}) = \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \cdots \int_{\mathcal{D}} p(x_1; \ldots; x_N) \underbrace{dx_1 \cdots dx_{k-1} \cdots dx_{k+l+1} \cdots dx_N}_{N-M \text{ Terme}}$$

multivariate Wahscheinlichkeitsdichte
mit N-M Variablen:
Marginalverteilung *(Randverteilung)*

$$p(x_k | x_l)$$

bedingte Wahscheinlichkeitsdichte
(*conditional probability distribution*)

$$p(x_1, x_2) = p(x_1|x_2)p(x_2)$$

$$= p(x_2|x_1)p(x_1)$$

$$\boxed{p(x_2|x_1) = \frac{p(x_1|x_2)}{p(x_1)}p(x_2)}$$

Bayes-Regel

Beispiel:

$$p(Modell|Beobachtung) = \frac{p(Beobachtung|Modell)}{p(Beobachtung)}p(Modell)$$

Exkurs in **Stochastischen Prozesse**

a) Zufallszahlen

b) Wahrscheinlichkeit

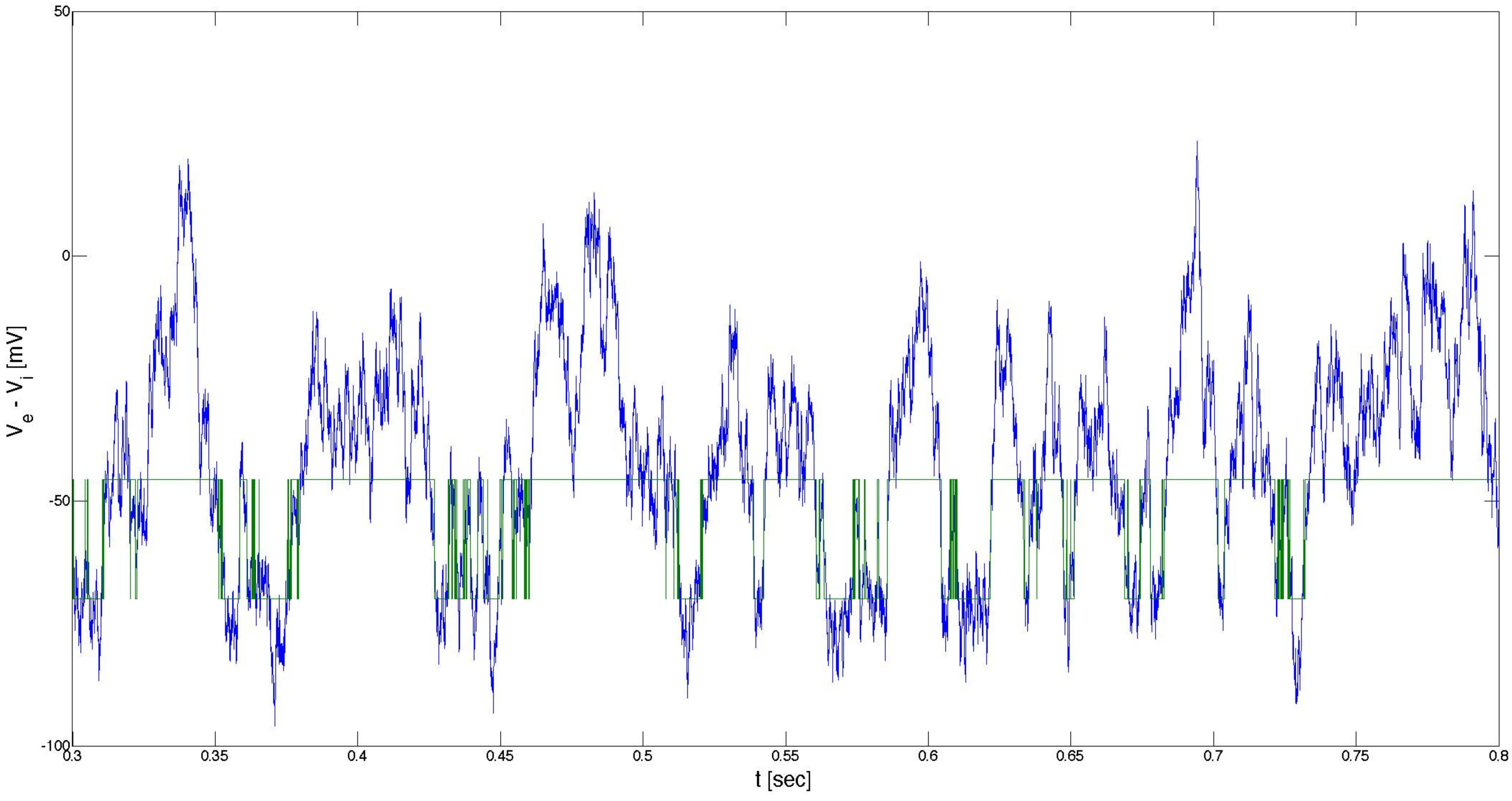
c) Wahrscheinlichkeitsdichte

d) stochastische Prozesse

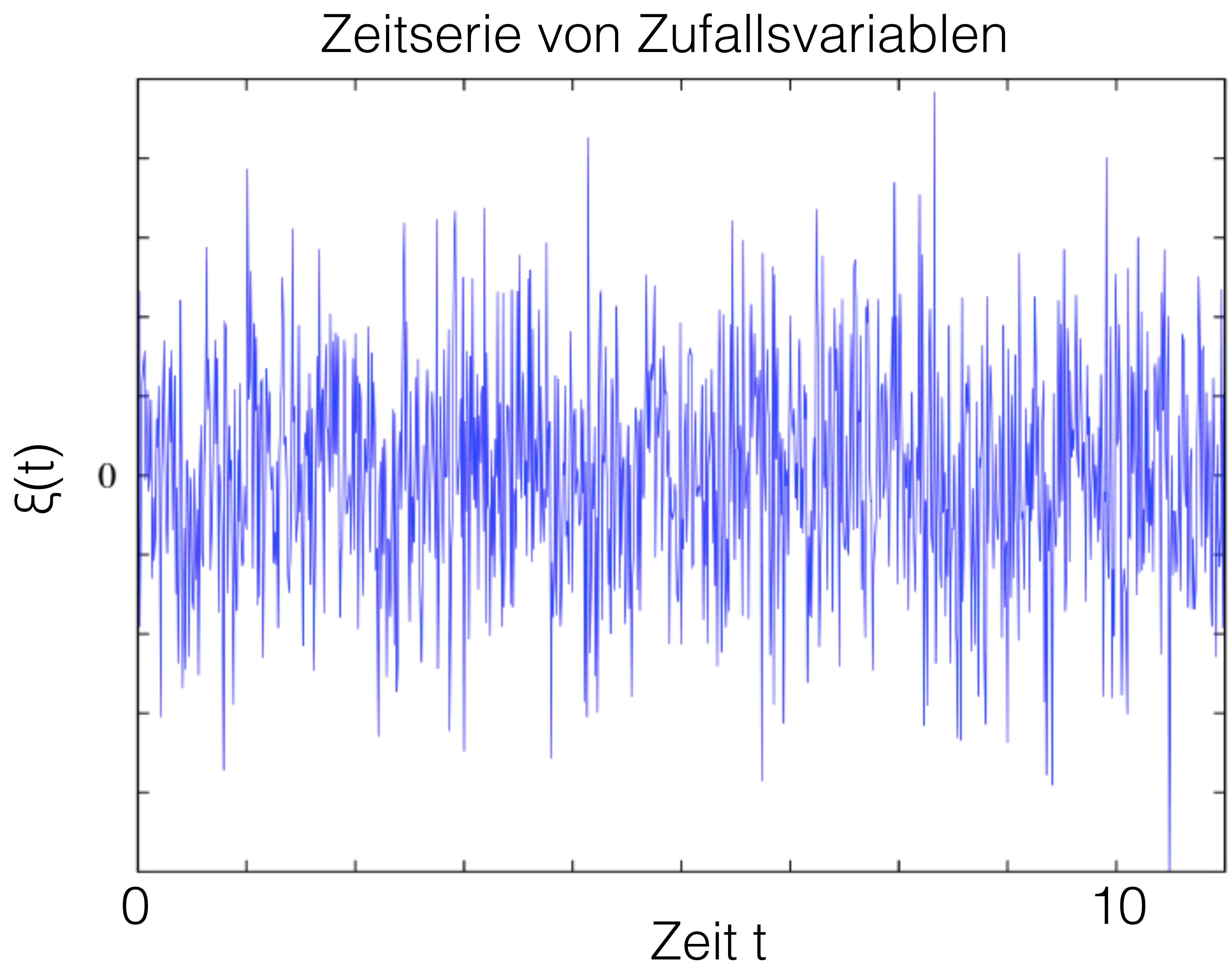
e) Ergodizität und Stationarität

<u>stochastischer Prozess:</u>

Folge von Zufallsvariablen, die eine
zeitliche Evolution eines Systems beschreibt



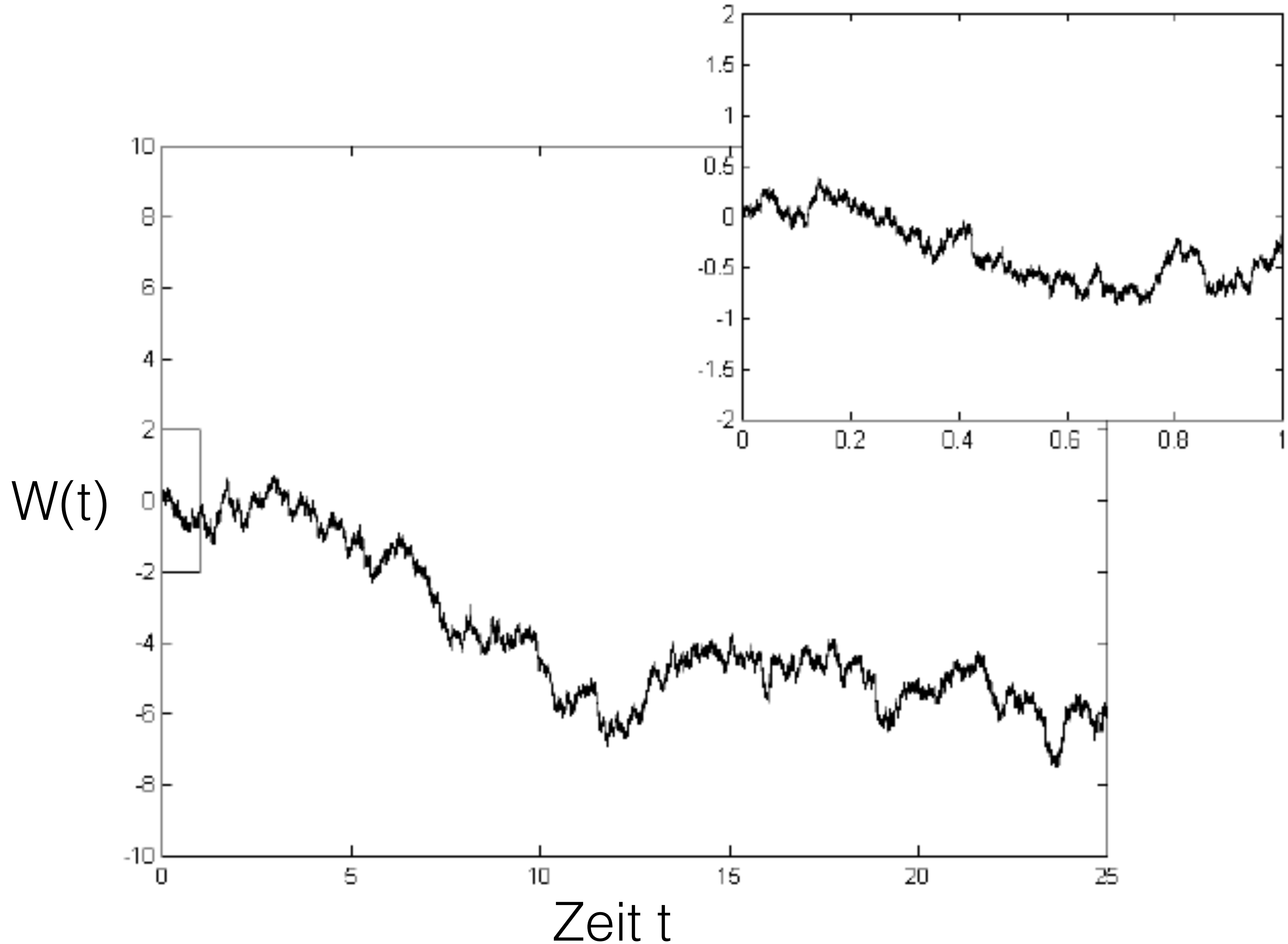
Beispiel: Wiener-Prozess



Zufallsvariablen sind **unabhängig** (*weisses Rauschen*),
ihre Wahrscheinlichkeitsdichte ist eine **Gauss-Verteilung**

Wiener-Prozess: $W_{k+1} = W_k + \xi_k \qquad k \in \mathcal{N}_0$

ξ_k : *weisses Gauss'sches Rauschen*



weisses Rauschen:

$$\langle \xi_k \xi_l \rangle = D\delta_{kl}$$

unkorrelierte Zufallszahlen

$$\langle \xi(t)\xi(t-\tau) \rangle = D\delta(\tau)$$

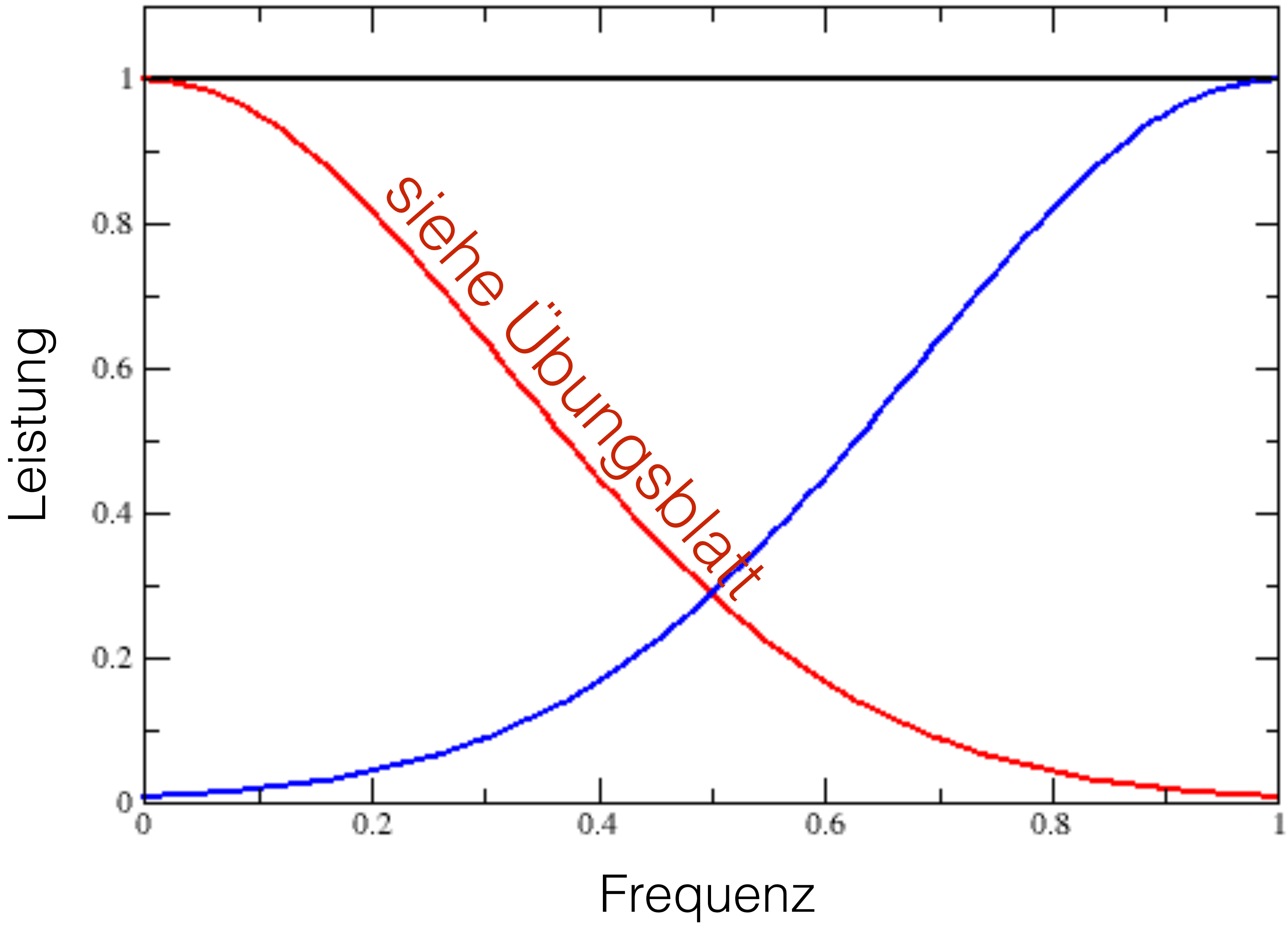
<u>Wiener-Khinchin Theorem:</u>

$$\mathcal{F}[\langle \xi(t)\xi(t-\tau) \rangle](f) = P(f)$$

$$\longrightarrow \qquad P(f) = const$$

alle Frequenzen mit gleichem Beitrag

Spektren von Rauschprozessen



Beispiel einer allgemeineren Formulierung

$x(t)$: stochastischer Prozess

$x(t)$ kann von $x(t-\tau)$, $0 \leq \tau < \infty$ abhängen, also

$$x(t_{k+1}) = f(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots)$$

System mit Gedächtnis

Spezialfall:

$$x(t_{k+1}) = f(x_k)$$

System *ohne* Gedächtnis

dieser stochastische Prozess heißt **Markov-Prozess**

Formulierung eines allgemeinen Markov-Prozesses

$x(t)$: stochastischer Markov-Prozess

Zeit kontinuierlich

$$\boxed{dx(t) = f(x(t))dt + \kappa dW(t)}$$

dW: Rauschprozess
κ: Rauschstärke

Zeit diskret

$$\boxed{\Delta x(t_k) = f(x(t_k))\Delta t + \kappa \Delta W(t_k)}$$

$$\Delta W(t_k) = W(t_{k+1}) - W(t_k)$$

$$\Delta x(t_k) = x(t_{k+1}) - x(t_k)$$

Formulierung als **Langevin-Gleichung**:

Zeit kontinuierlich

$$\boxed{\dot{x}(t) = f(x(t)) + \kappa\xi(t)}$$

ξ: Rauschprozess

ohne Rauschen:

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

Exkurs in **Stochastischen Prozesse**

a) Zufallszahlen

b) Wahrscheinlichkeit

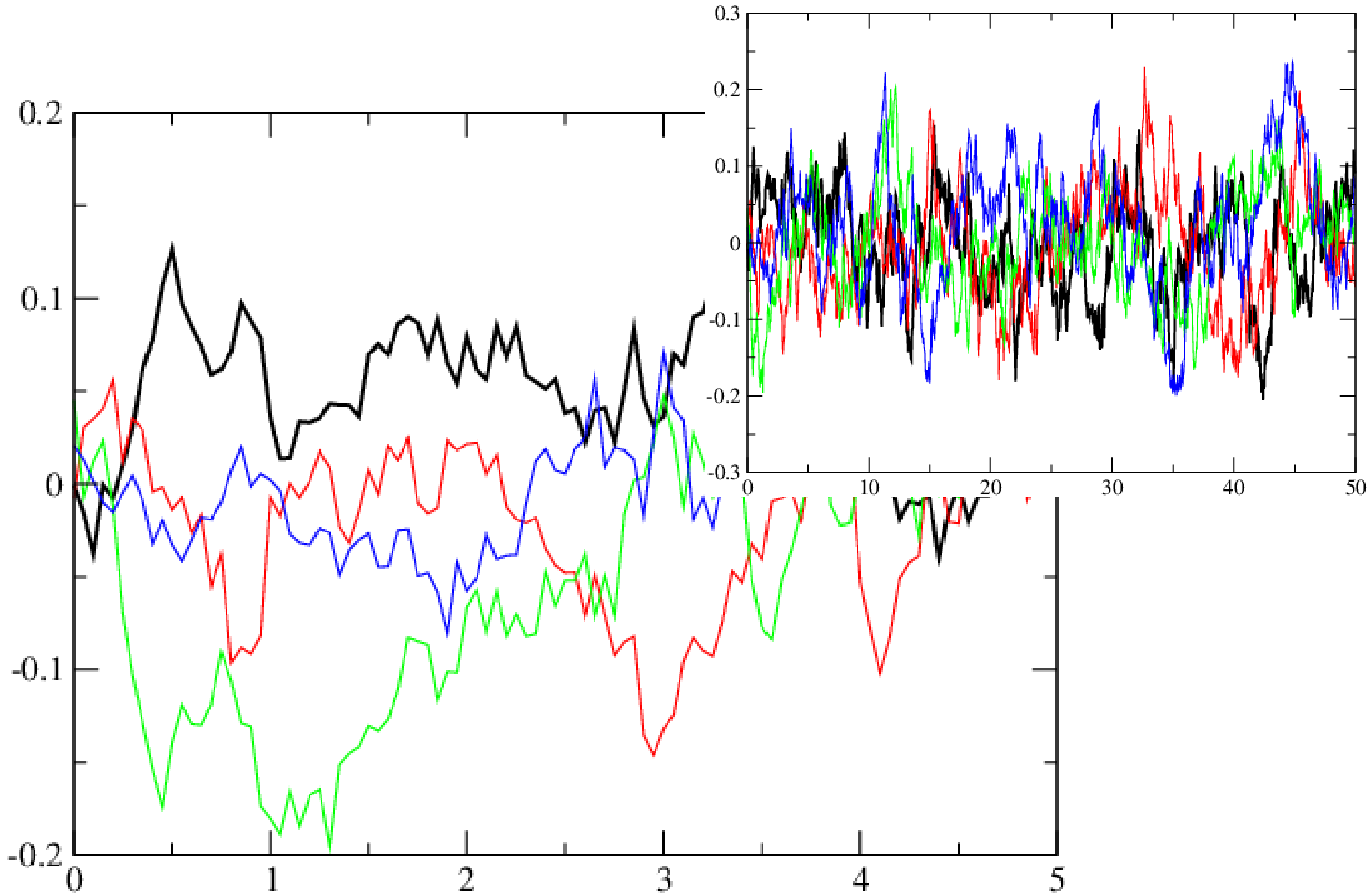
c) Wahrscheinlichkeitsdichte

d) stochastische Prozesse

e) Ergodizität und Stationarität

Wie wird Wahrscheinlichkeitsdichte p berechnet ?

<u>Beispiel:</u>



verschiedene Lösungen von

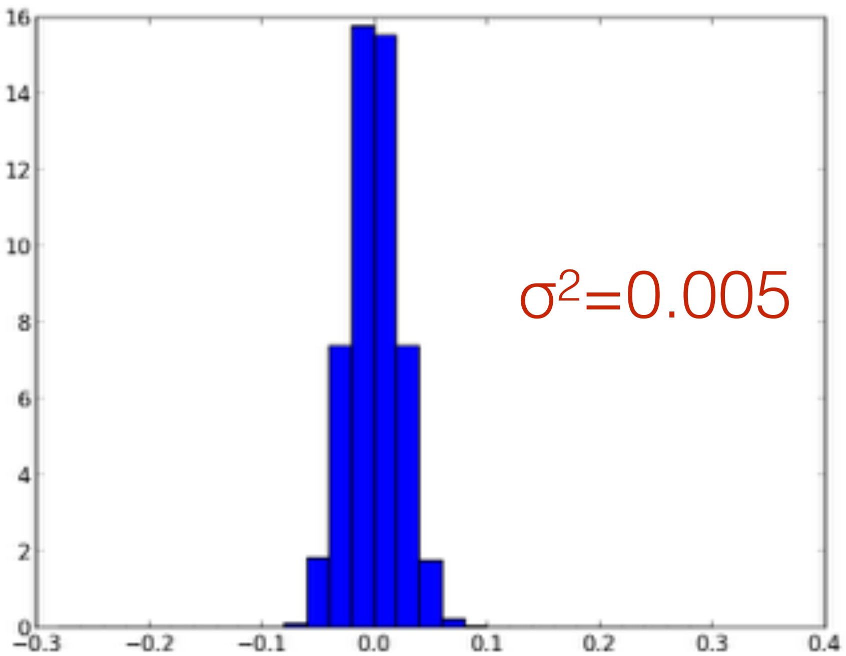
$$\dot{x}(t) = -x(t) + 0.1\xi(t)$$

mit *identischen Anfangsbedingungen x(0)*

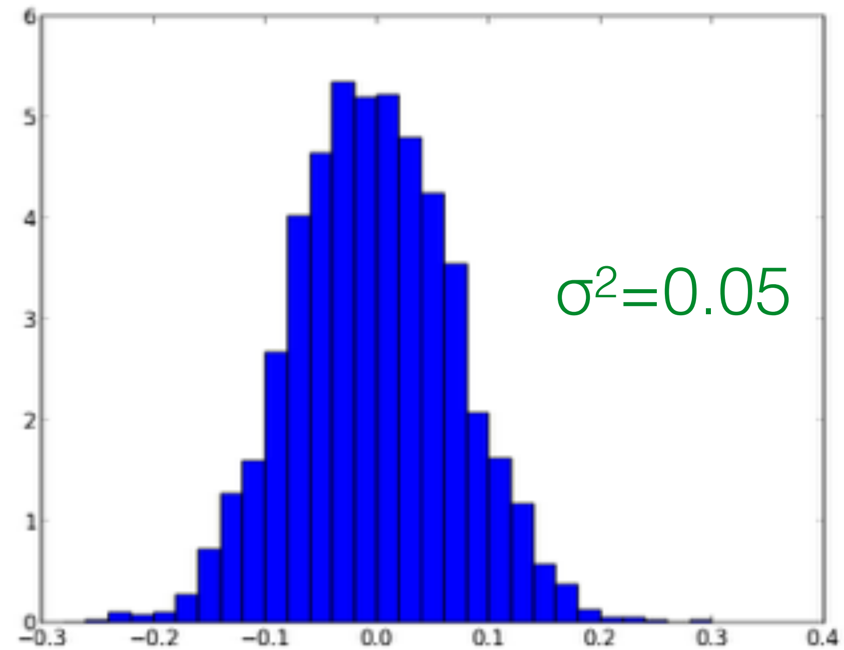
$\xi(t)$: normalverteilte Zufallszahlen mit Mittelwert=0, Varianz=1

$p_1(x,t)$: Bestimmung über die **Schar von Lösungen** zu einem bestimmten Zeitpunkt t

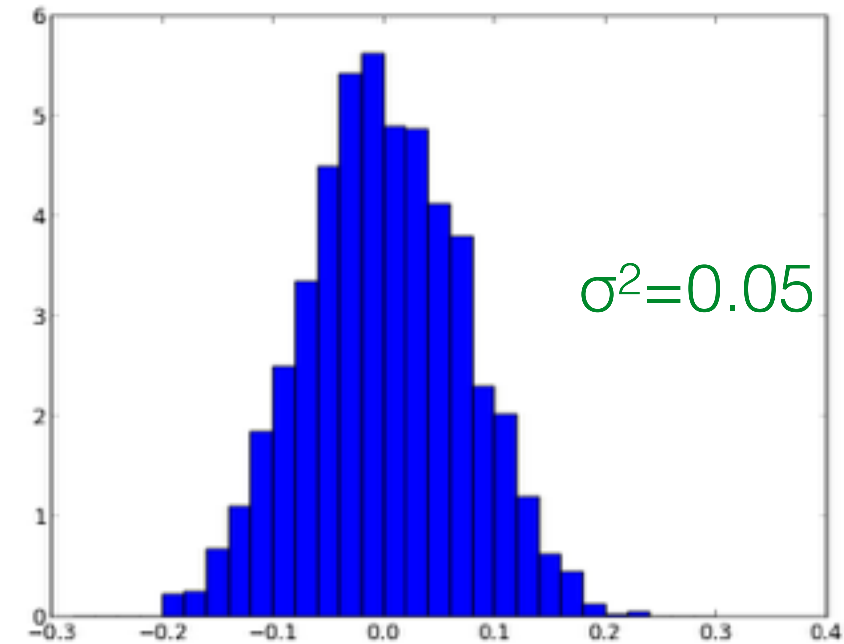
t=0.05



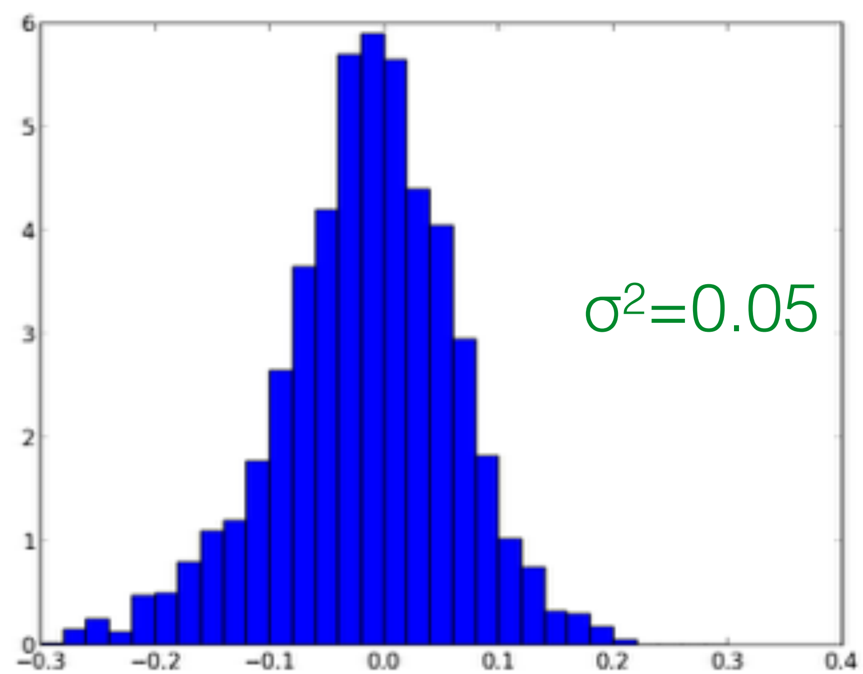
t=10



t=47.5



$p_2(x)$: Erwartungswert über die **Zeit** in einer Lösung



Erkenntnis:

- Wahrscheinlichkeitsdichte $p_1(x,t)$ variiert über die Zeit

- Wahrscheinlichkeitsdichte $p_2(x)$ zeitunabhängig

- Wahrscheinlichkeitsdichten gleich *für grosse Zeiten*

$$p_1(x,t) \approx p_2(x)$$

- Wahrscheinlichkeitsdichten verschieden *für kleine Zeiten*

$$p_1(x,t) \neq p_2(x)$$

Definition: *starke Stationarität*:

$$\boxed{p(x_1(t_k);\ldots;x_N(t_k)) = p(x_1(t_k+\tau);\ldots;x_N(t_k+\tau)) \qquad \tau \in \mathcal{R}}$$

Definition: *Stationarität im weiteren Sinn:*

$$E\left[x(t)\right] = \mu \; \forall t \in \mathcal{R}$$

$$E\left[(x(t) - E[x])^2\right] = \sigma^2(t) < \infty$$

$$Cov(x(t_1), y(t_2)) = Cov(x(t_1+\tau), y(t_2+\tau)) \qquad \tau \in \mathcal{R}$$

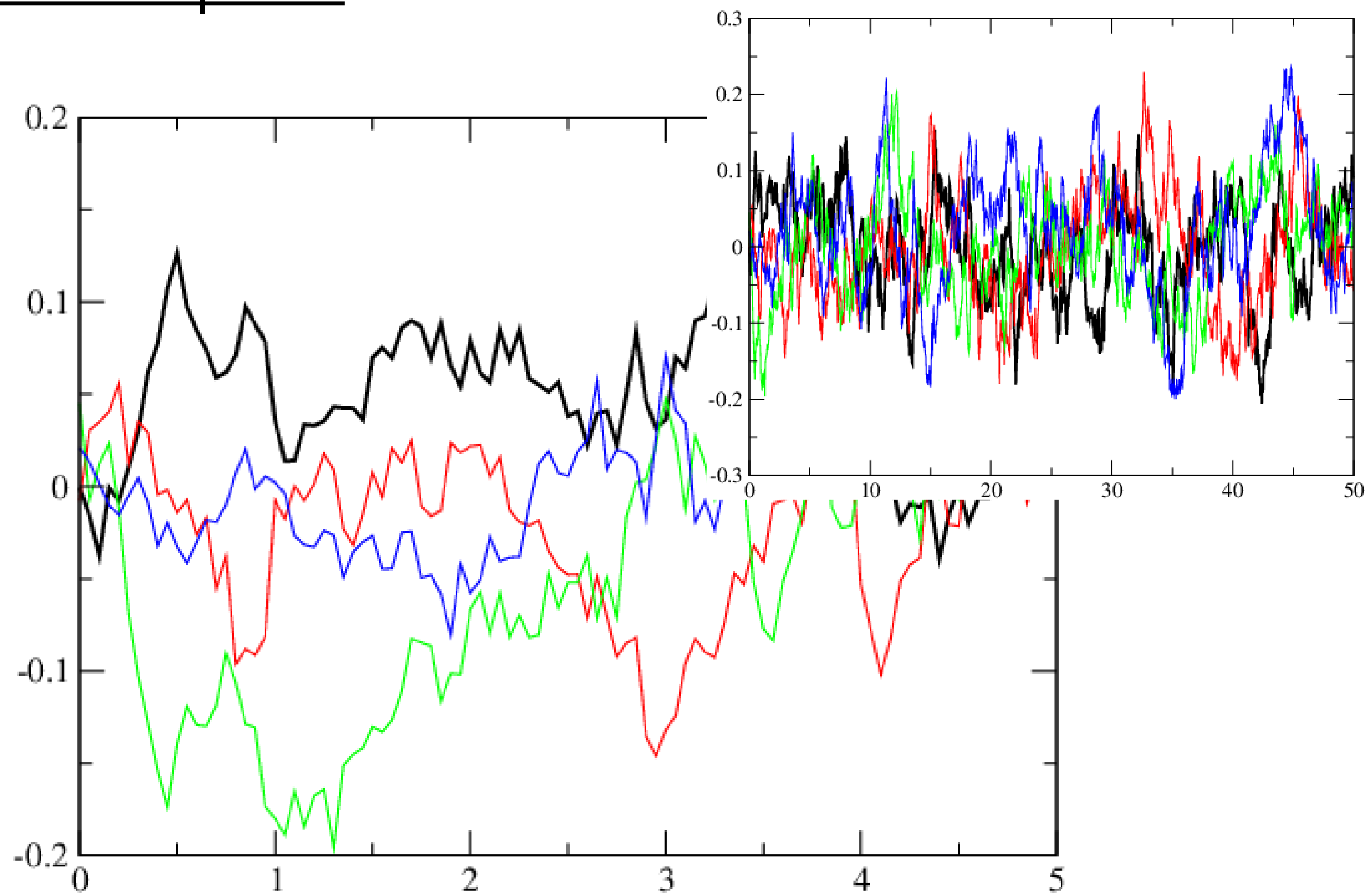
$$Cov(x(t_1), y(t_2)) = E\left[(x(t_1) - \bar{x})(y(t_2) - \bar{y})\right]$$

falls ein Signal stationär ist und falls

Scharmittel = Zeitmittel

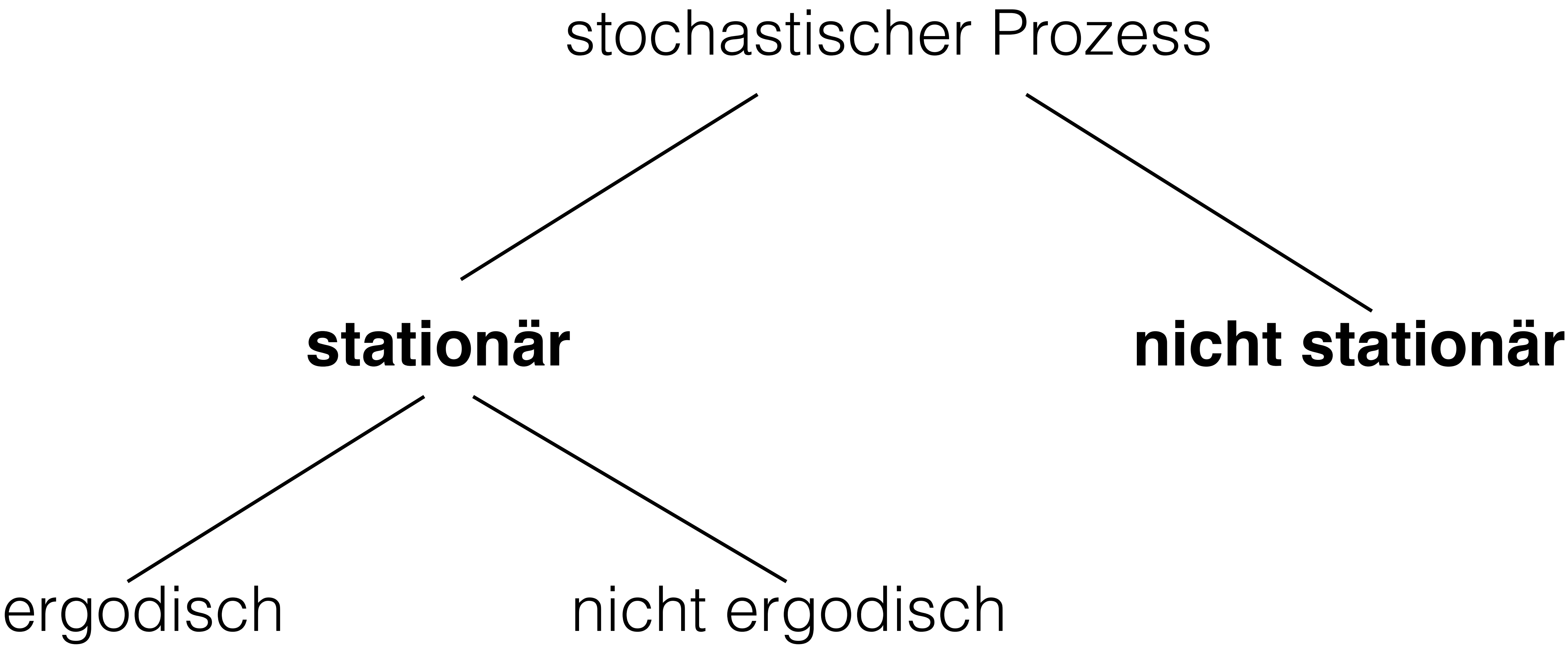
→ System ist **ergodisch**

zurück zum Beispiel:



- stochastischer Prozess ist stationär für grosse Zeiten

- stochastischer Prozess ist ergodisch für grosse Zeiten


stochastischer Prozess
stationär
nicht stationär
ergodisch
nicht ergodisch

wo gibt es denn Zufallsprozesse in biologischen Systemen ?

- in Neuronen:
  Öffnungsrate der gates in Ionenkanälen

- in Tierpopulationen:
  Geburt oder Tod von Tieren nicht vorhersagbar

- allgemein:
  Zufall kann auch Prozesse beschreiben,
  deren Ursache und Dynamik unbekannt ist