

Verfahren zur Datenanalyse gemessener Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 3

zum Übungsblatt

Aufgabe 1)

Abtastrate 10Hz (Nyquist -Frequenz 5Hz):

$x_1(t)$: 3Hz

$x_2(t)$: 2Hz und 0.5Hz

Abtastrate 6Hz (Nyquist -Frequenz 3Hz):

$x_1(t)$:

Situation nicht klar, da Ergebnis von
Startpunkt des Abtastens abhängt

$x_2(t)$:

kein Effekt

Abtastrate $f_s < 6\text{Hz}$ (Nyquist -Frequenz $< 3\text{Hz}$):

$x_1(t)$:
aliasing,
i.e. neue Frequenz $f_s/2 - 3\text{Hz}$ erwartet

$x_2(t)$:
aliasing, falls $f_s/2 < 2\text{Hz}$ oder $f_s/2 < 0.5\text{Hz}$

Aufgabe 2)

ähnlich der Bilder in letzter Vorlesung

Aufgabe 3)

$$g(\nu) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} \mathcal{F}[x](\nu + n f_s)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} X(\nu + n f_s)$$

periodisch in f_s

$$\longrightarrow = \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} c_k e^{-i2\pi k \nu / f_s}$$

$$c_k = \frac{1}{f_s} \int_0^{f_s} \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} X(\nu + n f_s) e^{i2\pi k \nu / f_s} d\nu$$

$$= \frac{1}{f_s} \int_0^{f_s} \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} X(\nu + n f_s) e^{i2\pi k \nu / f_s + i2\pi k n f_s / f_s} d\nu$$

$$= \frac{1}{f_s} \sum_{n \in \mathbb{Z}_0} \int_{nf_s}^{(n+1)f_s} X(f) e^{i2\pi kf/f_s} df$$

$$= \frac{1}{f_s} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi kf/f_s} df$$

$$= \frac{1}{f_s} x(k/f_s)$$

$$g(\nu) = \frac{1}{f_s} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} s(k/f_s) e^{-i2\pi k\nu/f_s}$$

$$= \Delta t \sum_{k \in \mathbb{Z}_0} s(k\Delta t) e^{-i2\pi \nu k \Delta t} \quad \text{q.e.d}$$

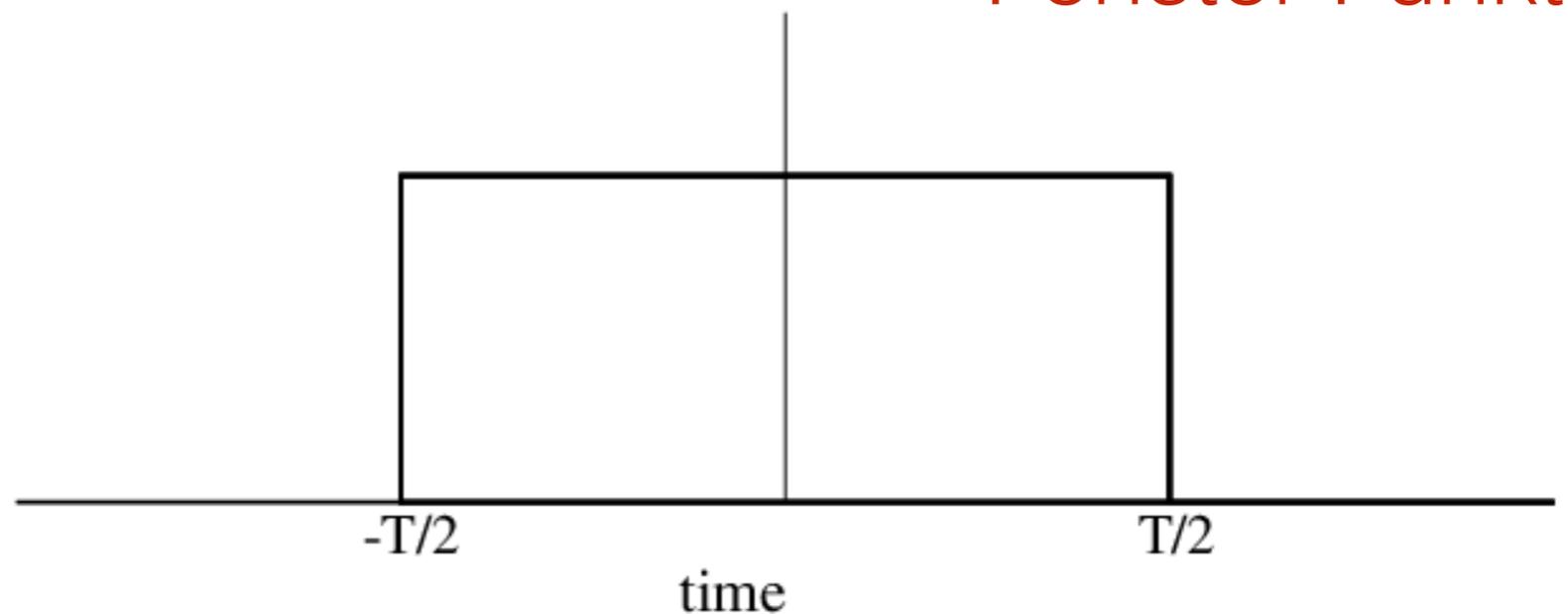
Vorlesung 3

allgemeiner Fall, wenn Signal nicht periodisch:

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

$$w(t) = \Theta\left(t + \frac{T}{2}\right) \Theta\left(-t + \frac{T}{2}\right)$$

Fenster-Funktion



$$\begin{aligned} X_T(f) &= \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t) e^{-i2\pi ft} dt \end{aligned}$$

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f') \tilde{w}(f - f') df'$$

Faltung

$$\tilde{x}(f) = \mathcal{F}[x](f) = X(f)$$

$$\tilde{w}(f) = \mathcal{F}[w](f)$$

Beweis:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t)e^{-i2\pi ft} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{x}(f')e^{i2\pi f't} \int_{-\infty}^{\infty} df'' \tilde{w}(f'')e^{i2\pi f''t} \right) e^{-i2\pi ft}$$

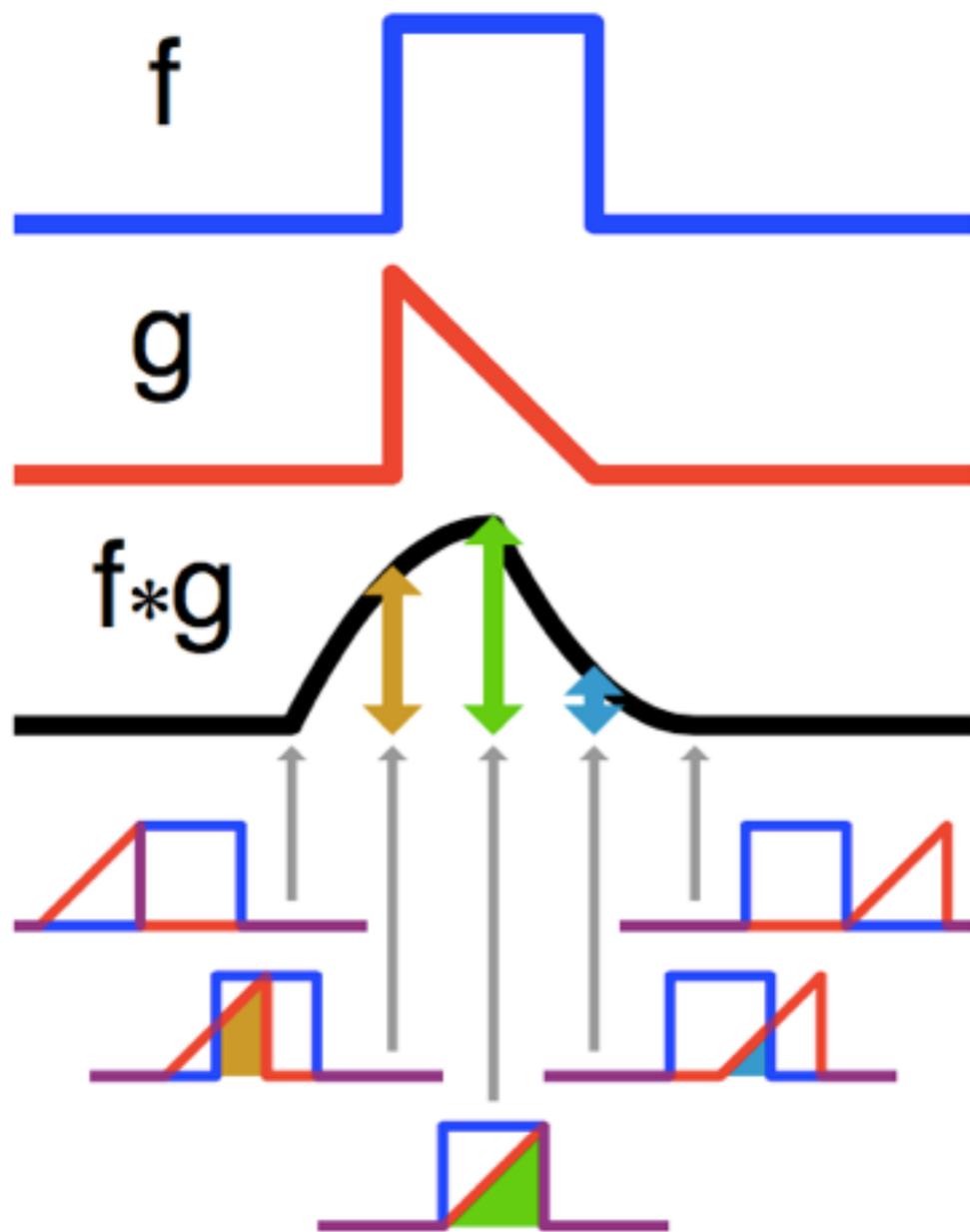
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} df' \int_{-\infty}^{\infty} df'' \tilde{x}(f')\tilde{w}(f'')e^{-i2\pi(f-f'-f'')t}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df' \int_{-\infty}^{\infty} df'' \tilde{x}(f')\tilde{w}(f'') \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi(f-f'-f'')t} dt}_{= \delta(f-f'-f'')}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f')\tilde{w}(f-f')df'$$

$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f') \tilde{w}(f - f') df' = \tilde{x} * \tilde{w}$$

Faltung



$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

$$w(t) = \Theta\left(t + \frac{T}{2}\right) \Theta\left(-t + \frac{T}{2}\right)$$

$$\tilde{w}(f) = \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i2\pi ft} dt$$

$$= \frac{1}{-i2\pi f} \left(e^{-i2\pi fT/2} - e^{i2\pi fT/2} \right)$$

$$= \frac{\sin(\pi fT)}{i\pi f}$$

Eigenschaften von Fensterfunktion

Spektraldarstellung:

$$\tilde{w}(f) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi f T)}{f}$$

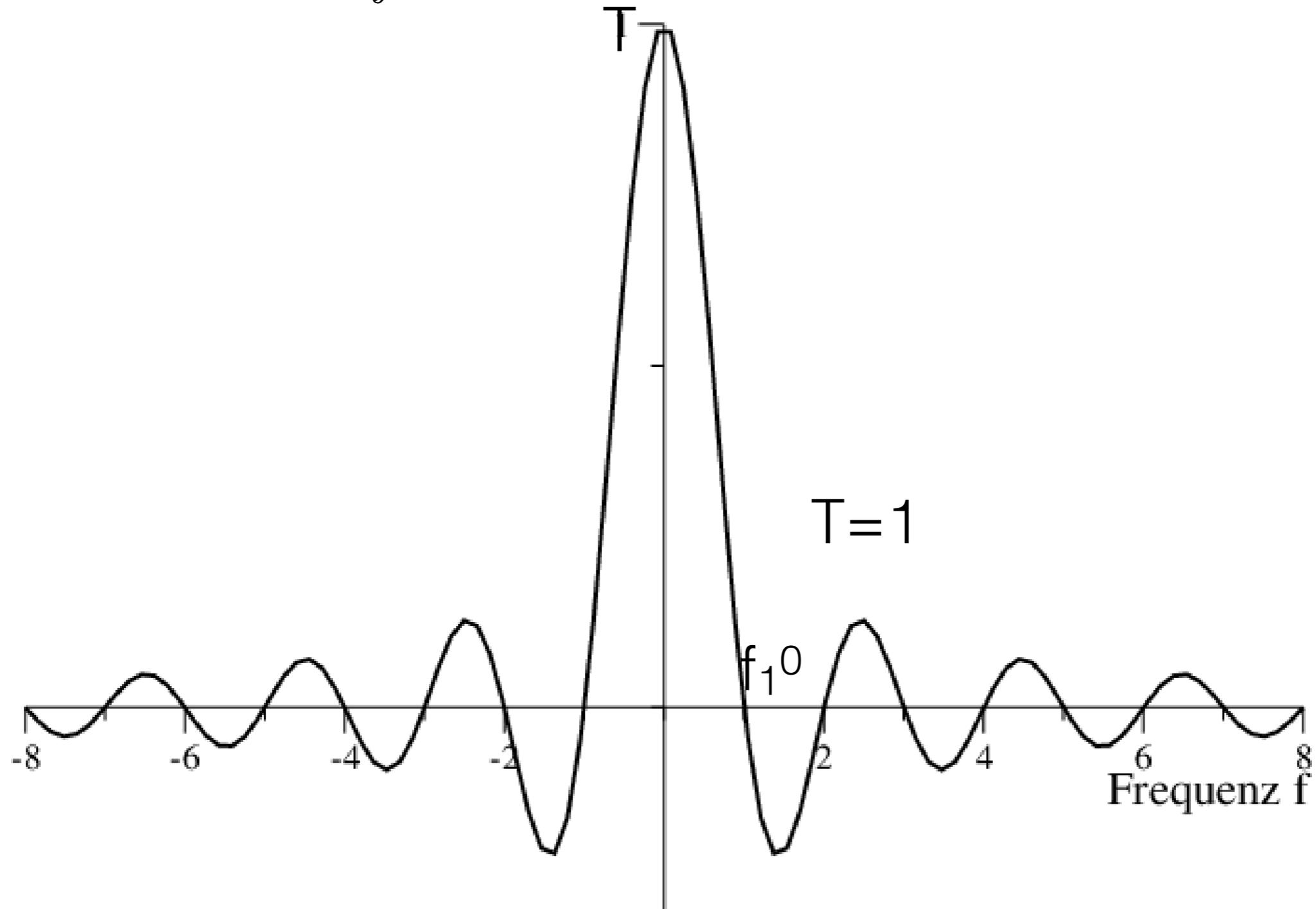
$$\tilde{w}(0) = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\pi T \cos(\pi f T)}{1} = T$$

$$\tilde{w}(f^0) = 0 : \sin(\pi f T) = 0 \rightarrow \pi f_n^0 T = 2\pi n$$

$$f_n^0 = \frac{2}{T} n$$

Eigenschaften von Fensterfunktion

$$\tilde{w}(f) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\pi f T)}{f}$$

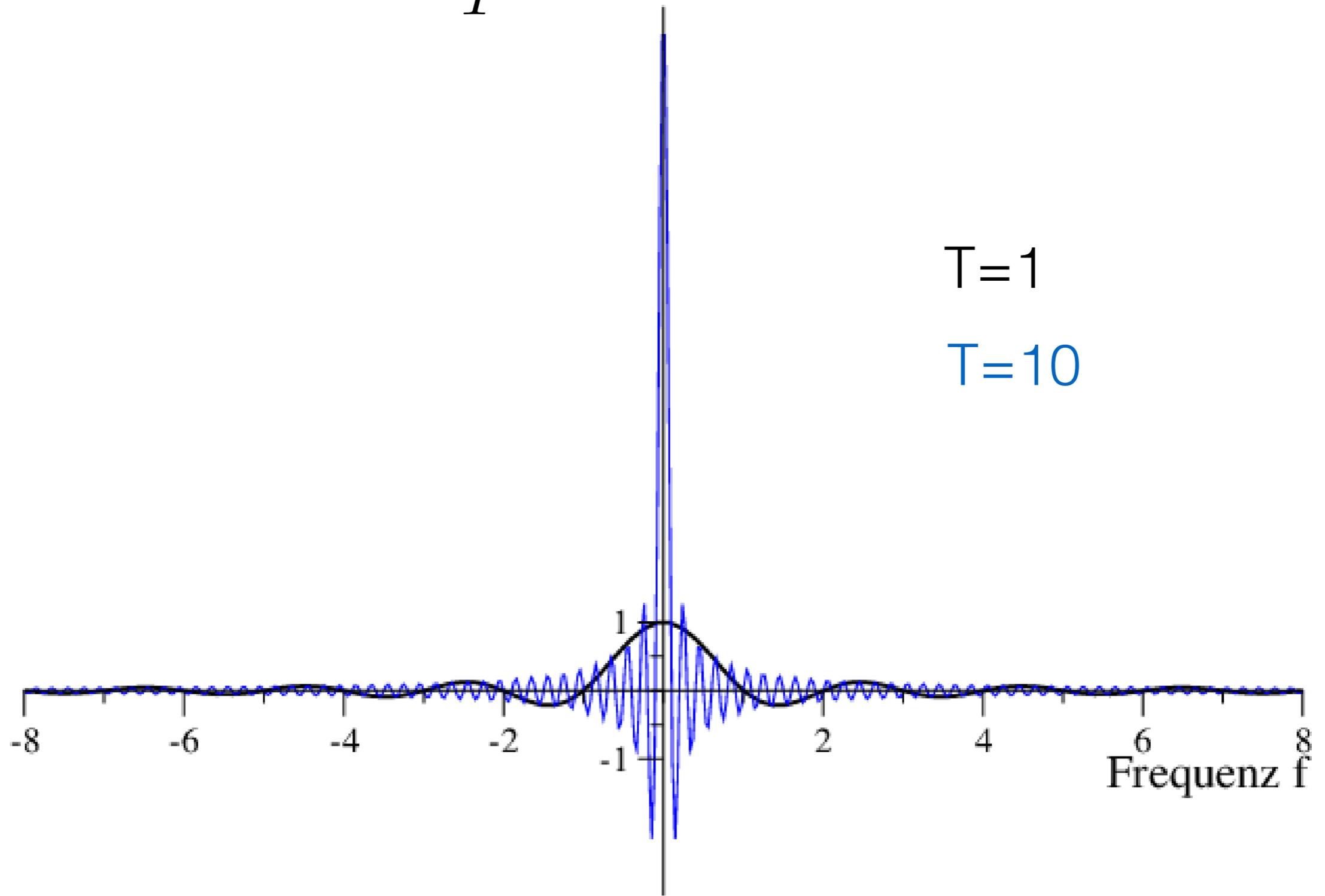


$T \rightarrow \infty :$

$$\tilde{w}(0) = T \rightarrow \infty$$

$$f_n^0 = \frac{2}{T}n \rightarrow 0$$

$$\tilde{w}(f) \rightarrow 2\pi\delta(f)$$



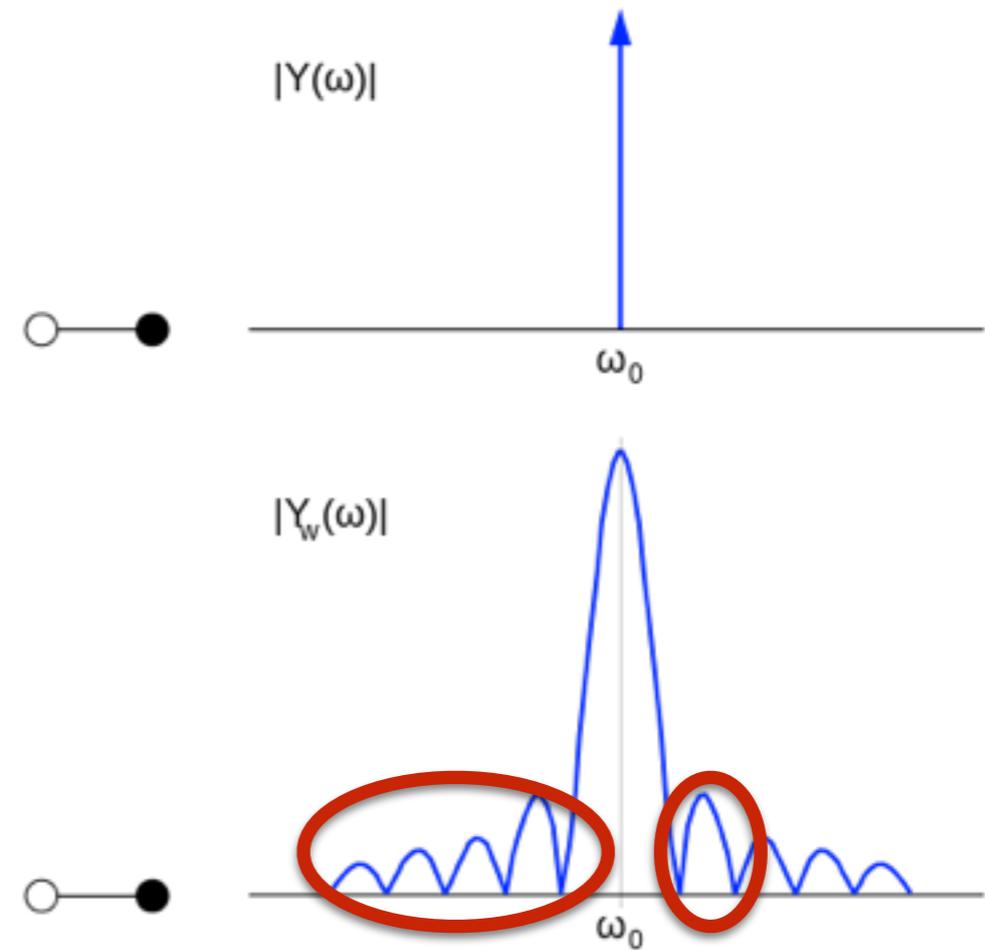
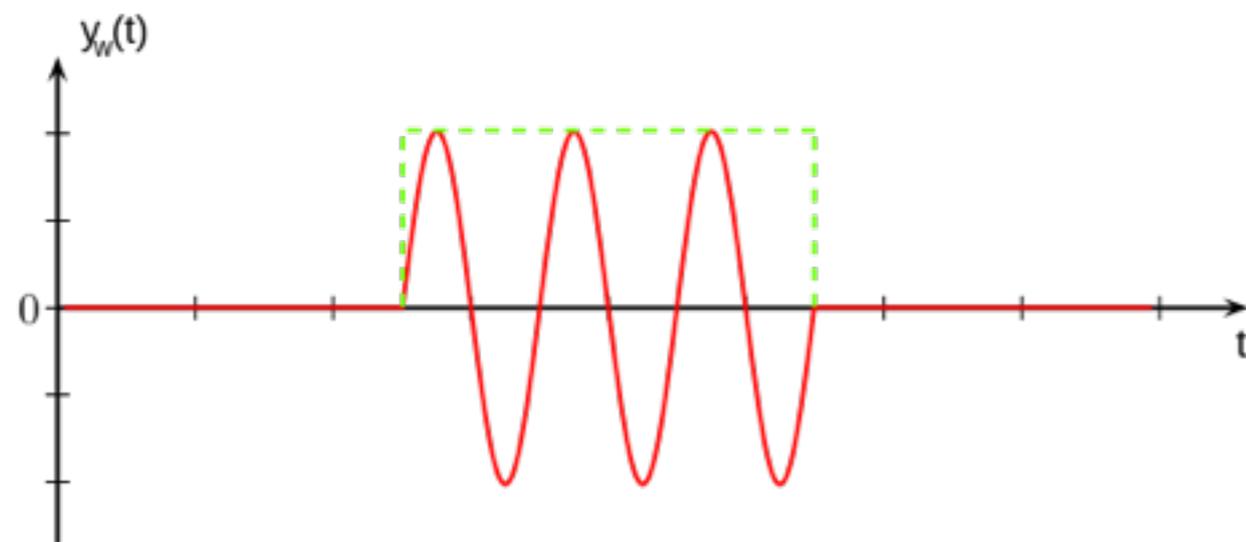
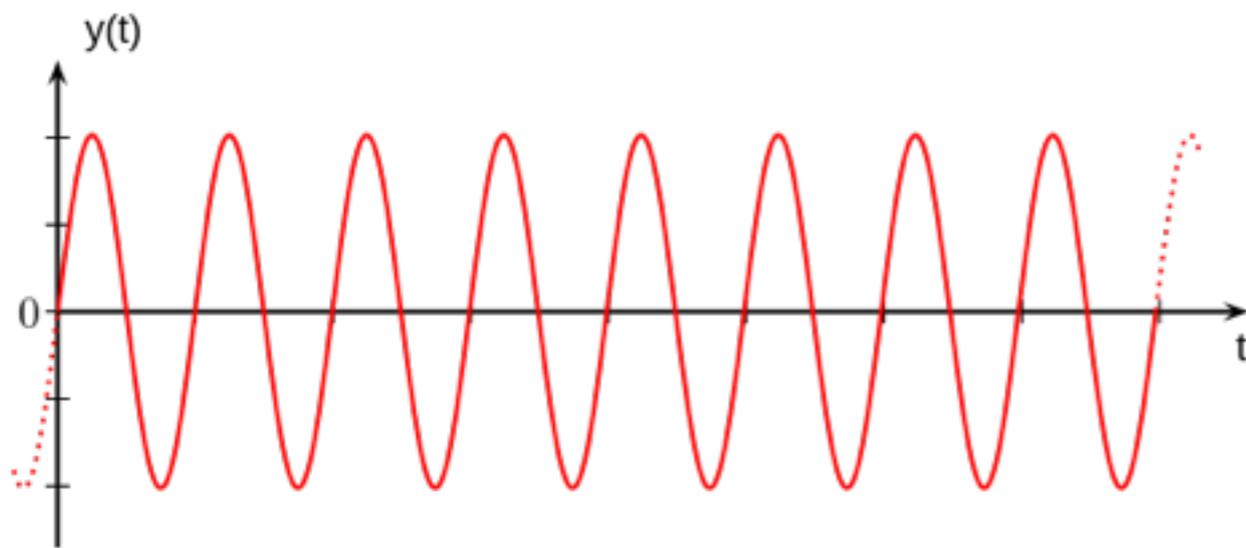
$$X_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f') \tilde{w}(f - f') df'$$

$$T \rightarrow \infty : X_T(f) \rightarrow \tilde{x}$$

***spectral leakage* tritt nur dann auf,
wenn das Signal endlich lang ist.**

$$\tilde{x}(f) = \delta(f - f_0) \quad : \quad X_T(f) = \tilde{w}(f - f_0)$$

Illustration:



Fehler !

allgemeiner Befund:

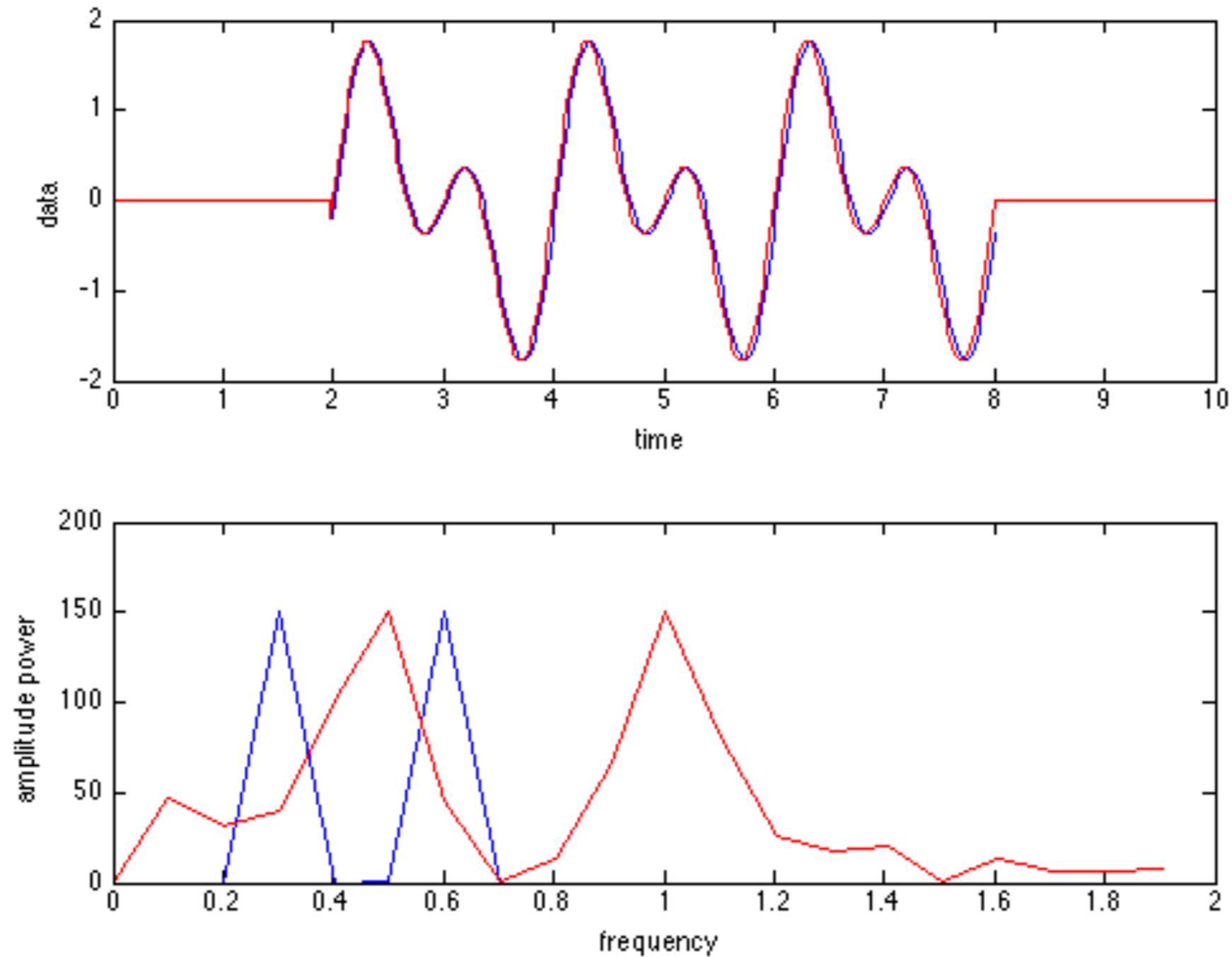
endlich langes Fenster modifiziert Fourier Transformation
und gewichtet Frequenzspektrum



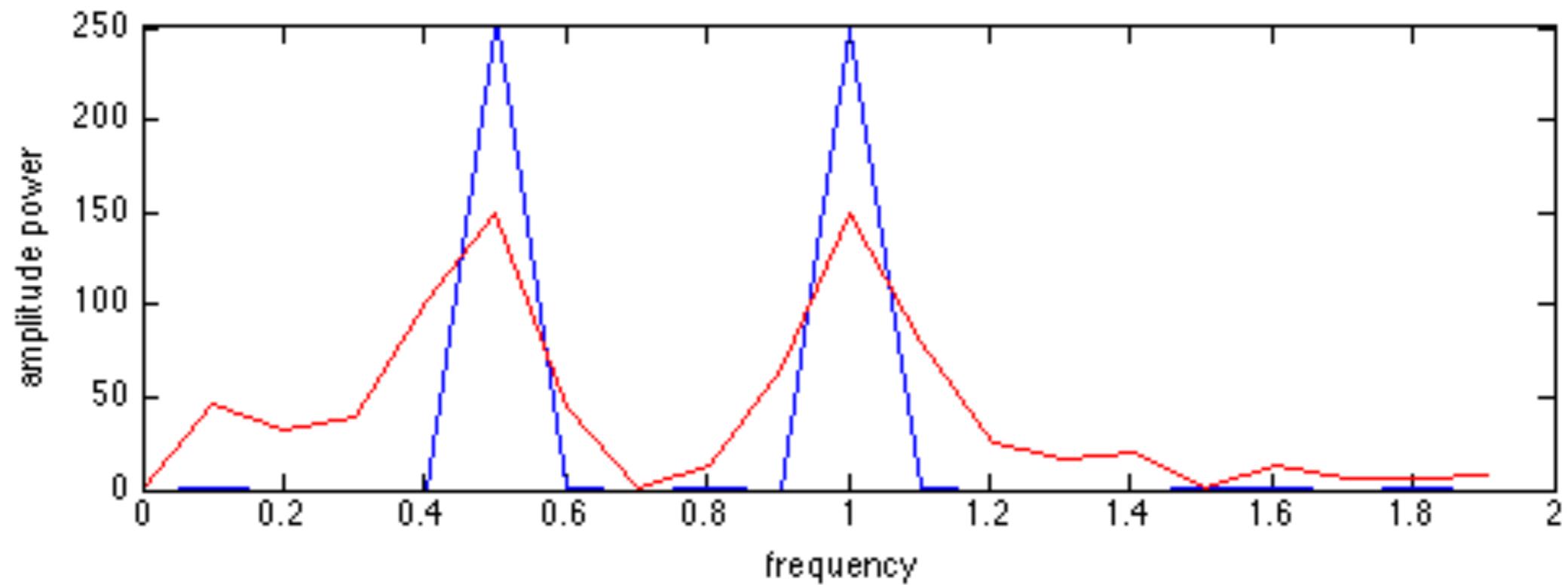
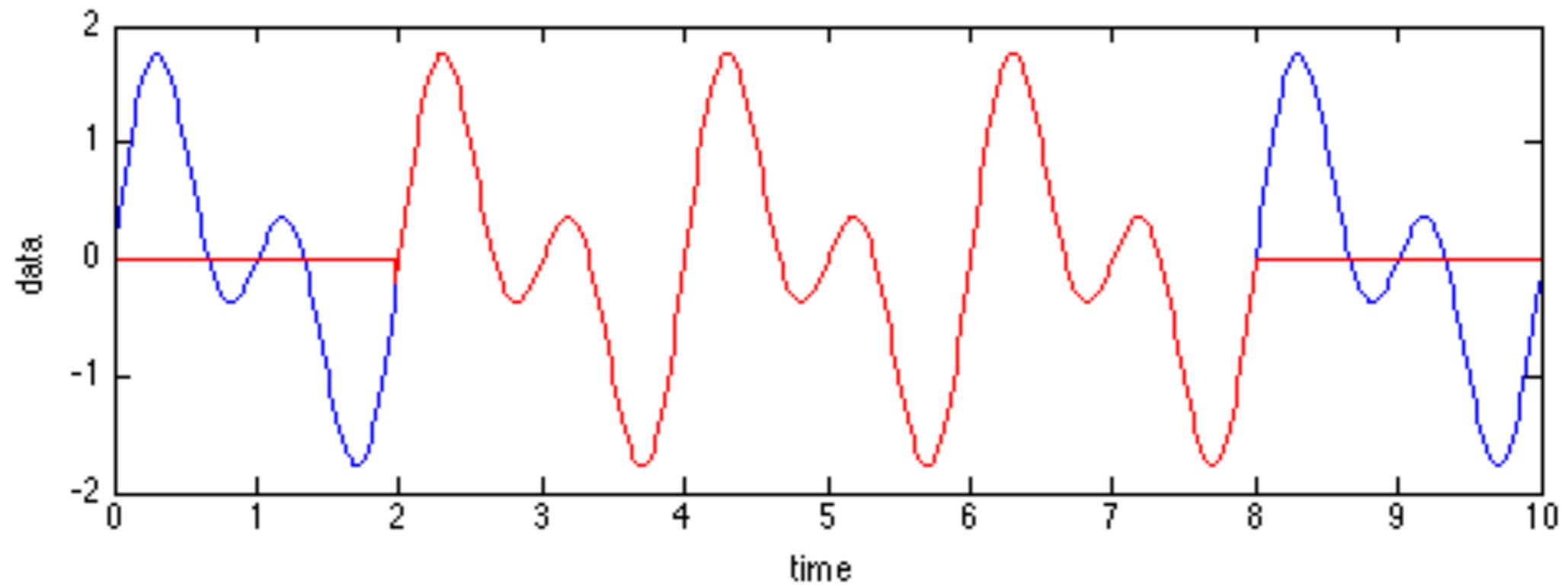
spectral leakage

verschiedene Effekte : **zero padding**

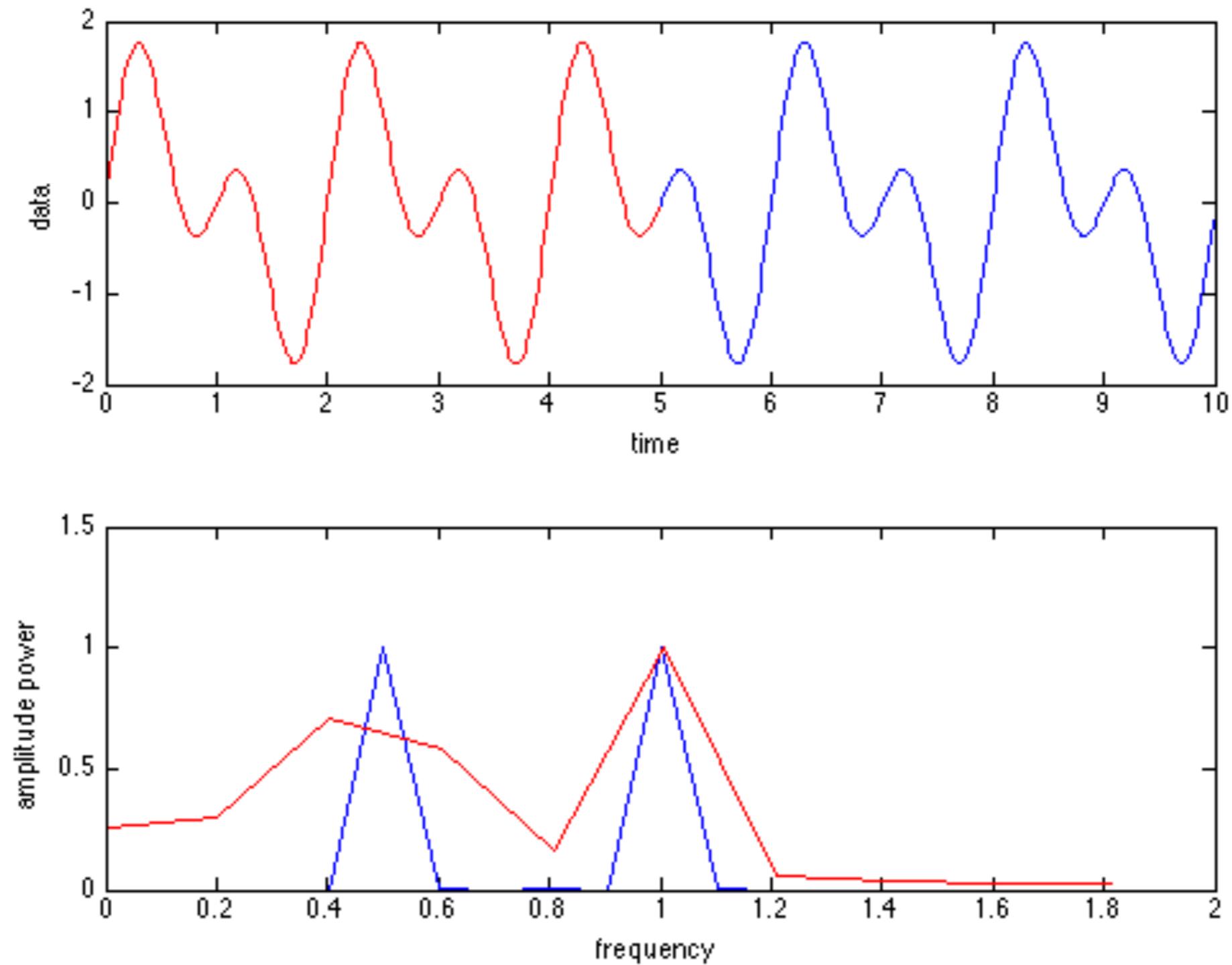
Superposition von Oszillationen mit $f=1\text{Hz}$ und $f=0.5\text{Hz}$



oder mit gleicher Datenlänge:

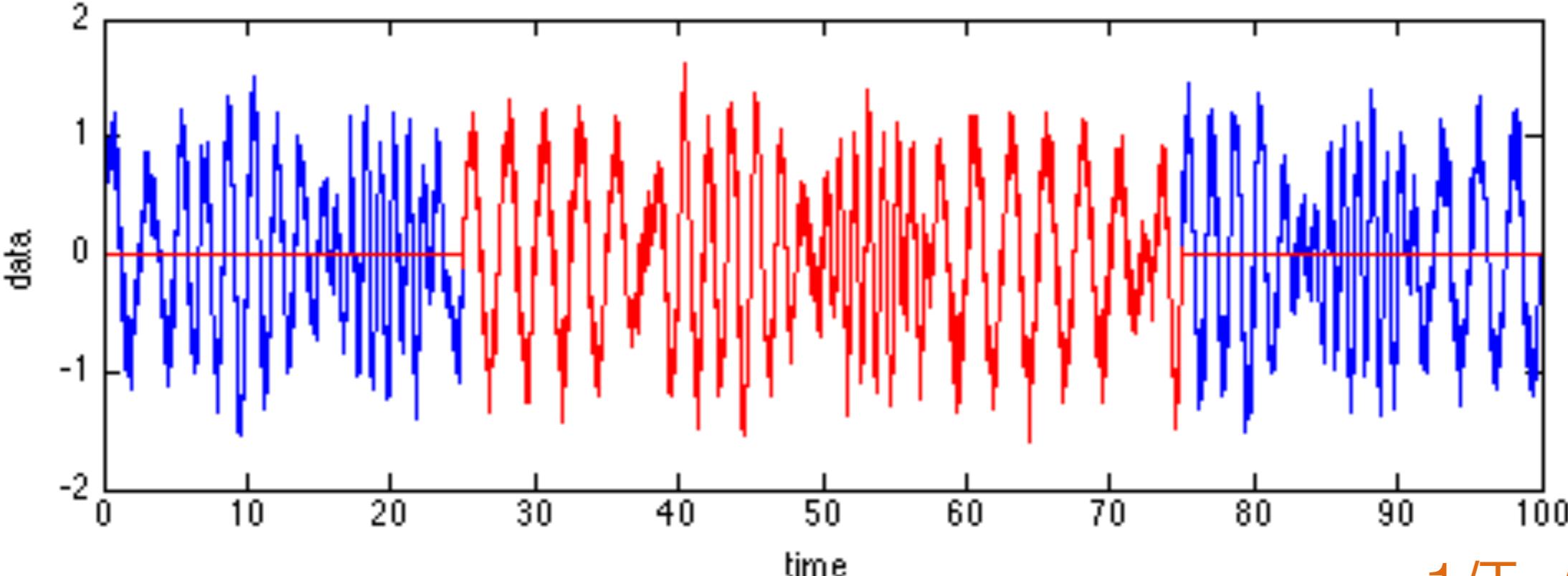


verschiedene Effekte : Fensterlänge

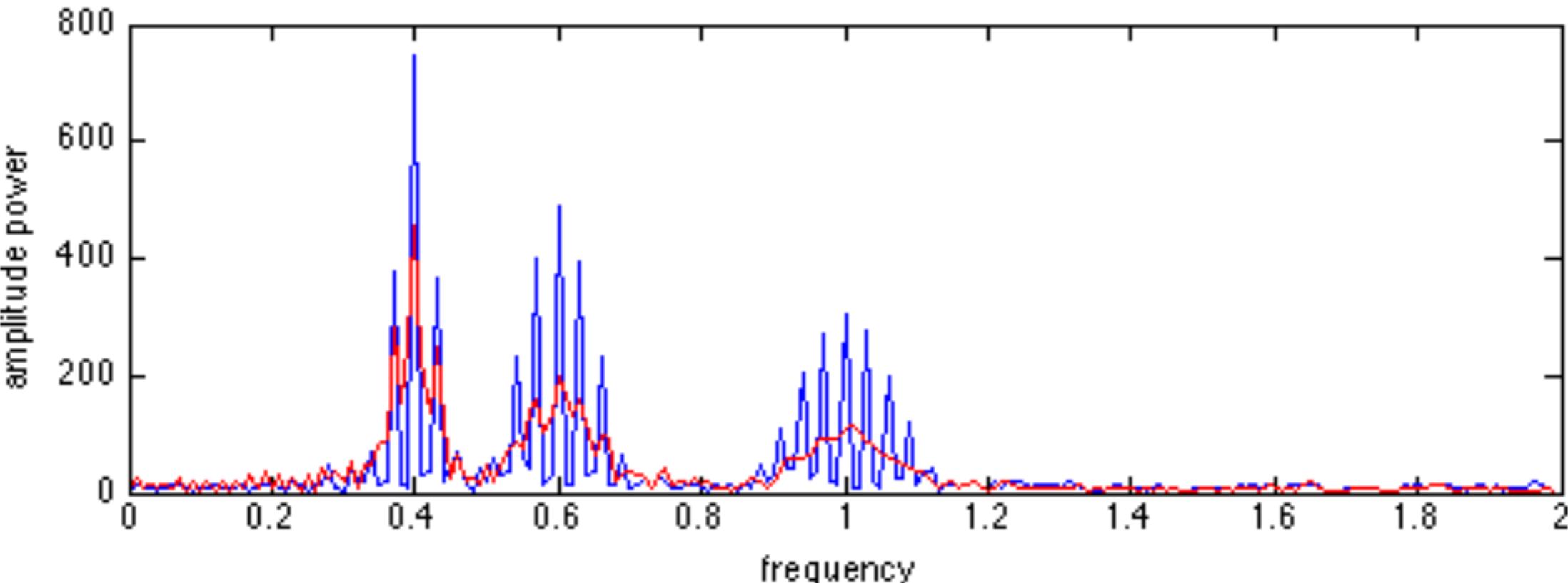


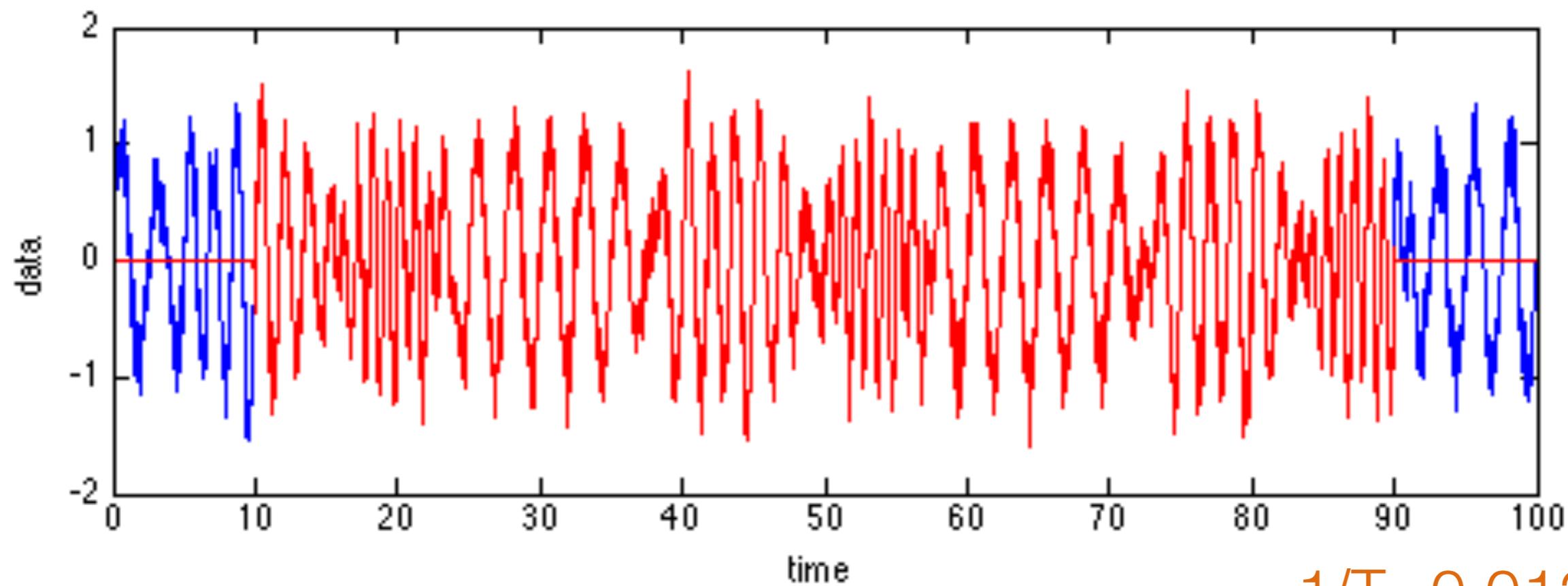
(Fourier_9b.m)

weiteres Beispiel:

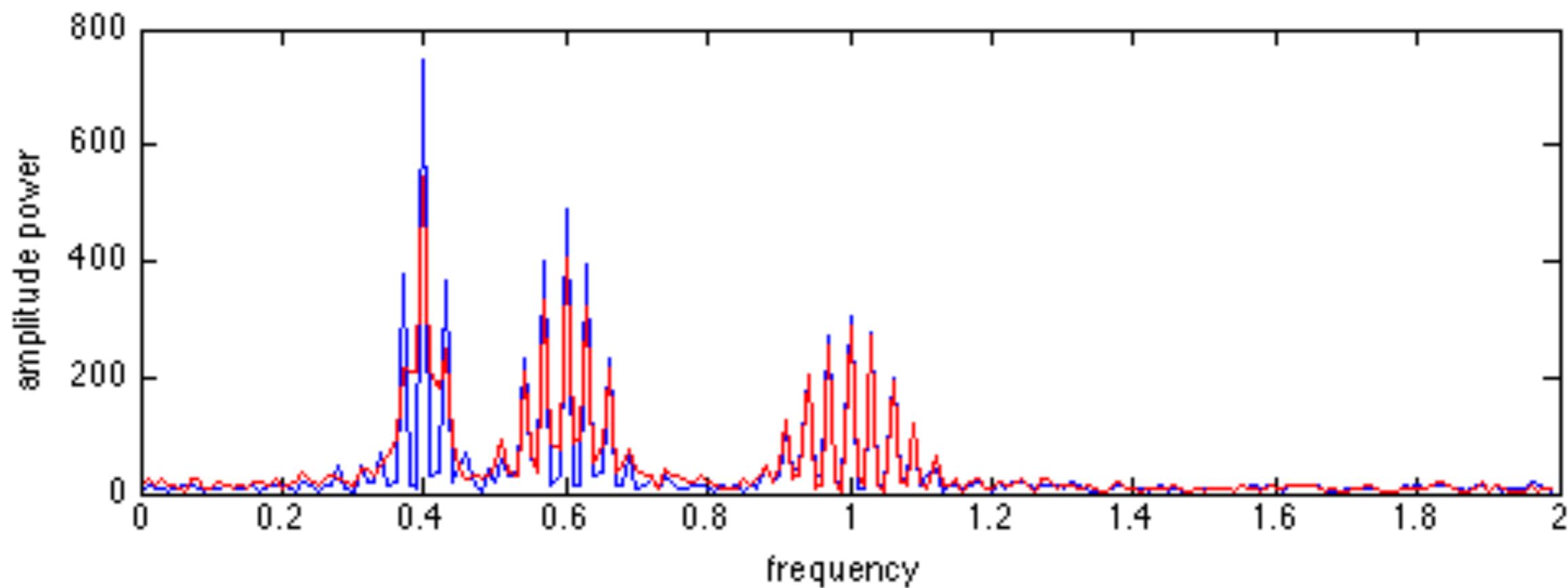


$1/T=0.02\text{Hz}$





$$1/T=0.0125\text{Hz}$$

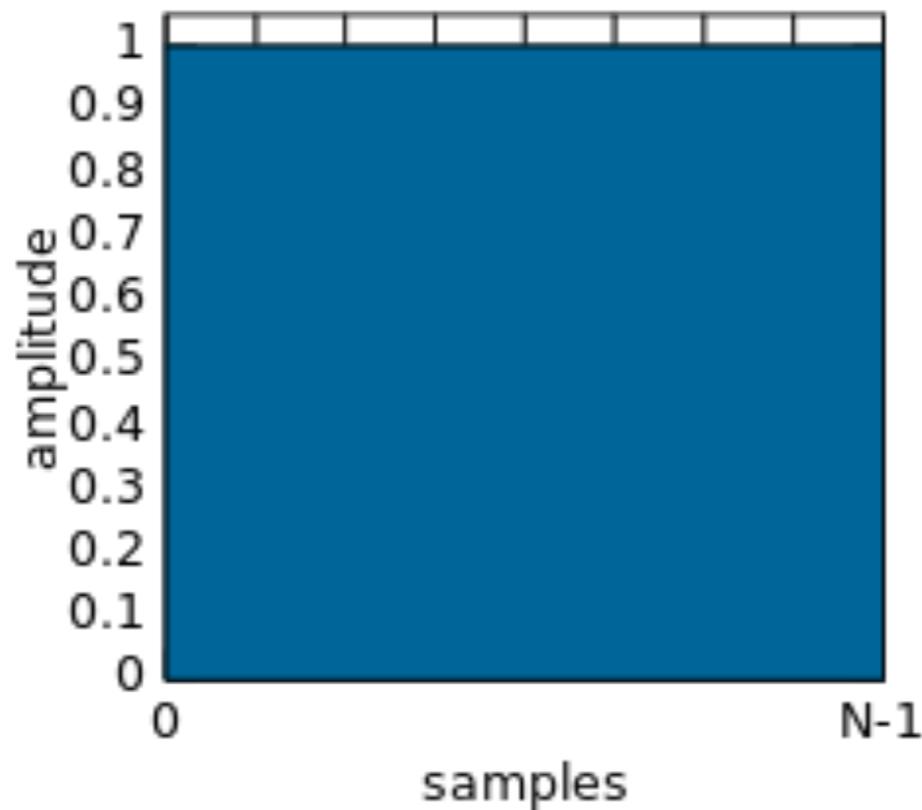


(Fourier_9.m)

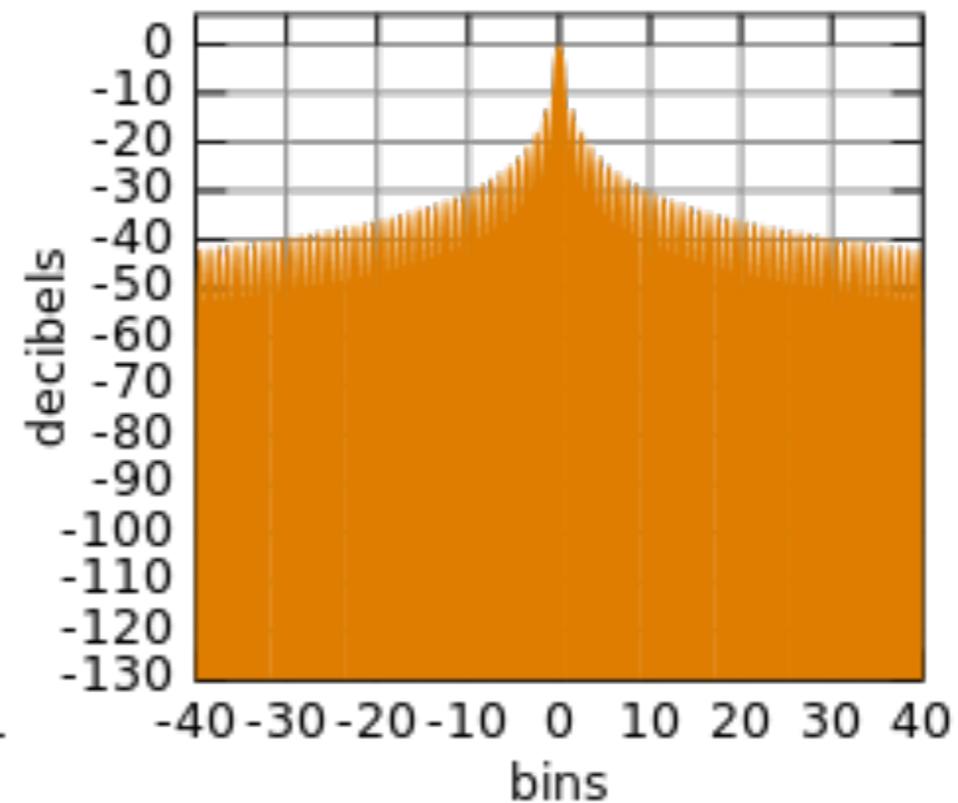
Verschiedene Fensterformen

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

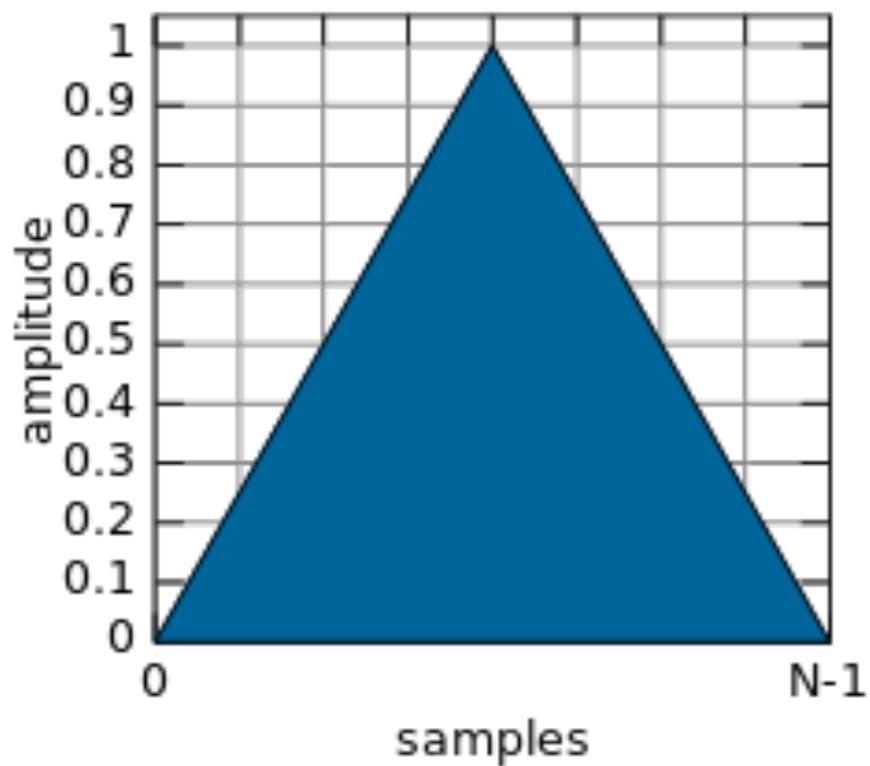
Rectangular window



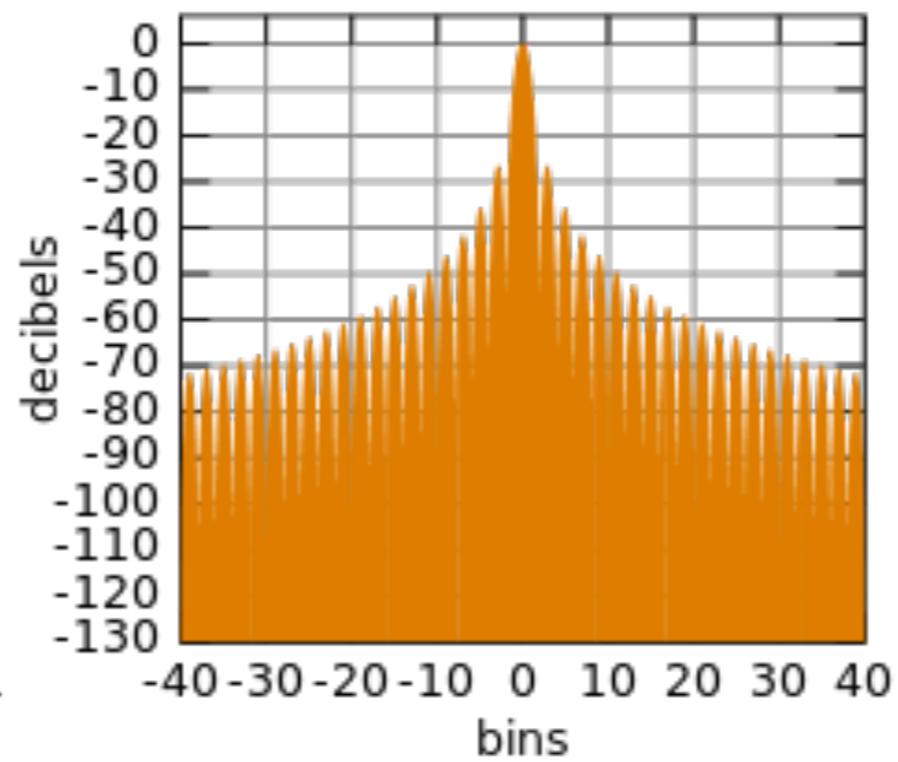
Fourier transform



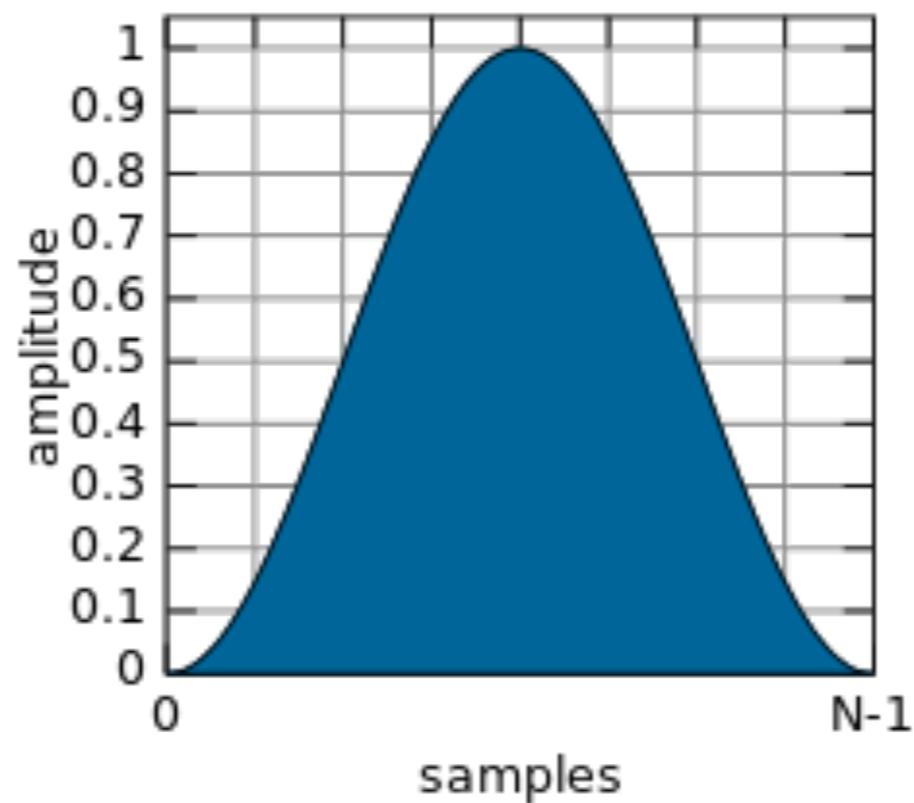
Triangular window



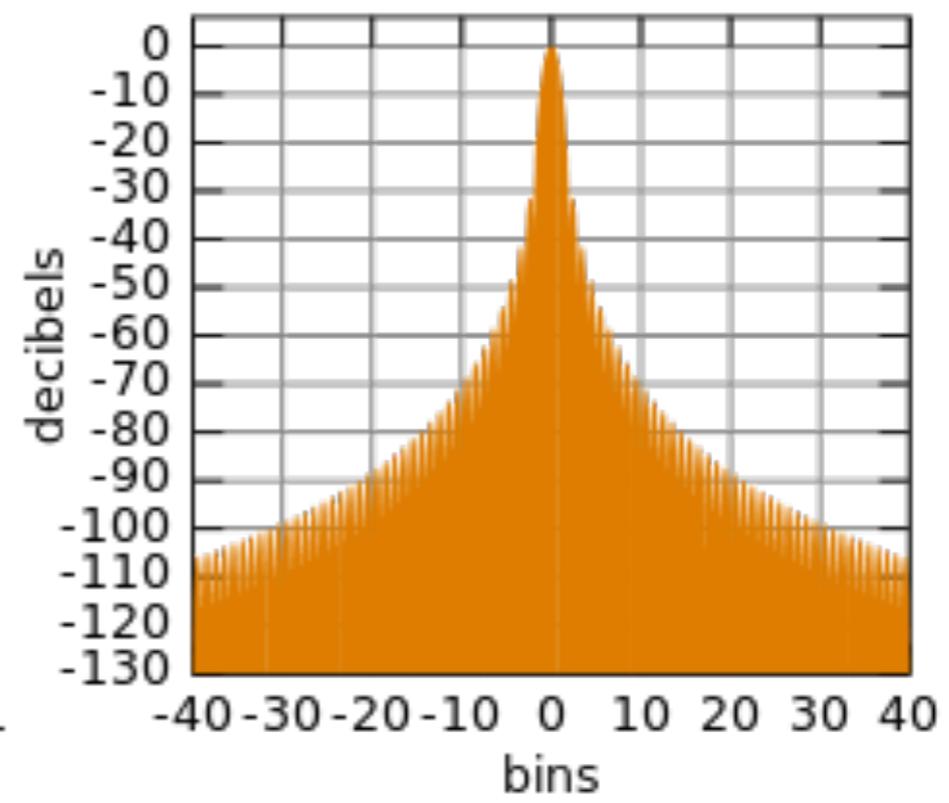
Fourier transform



Hann window



Fourier transform



aus der Praxis:

je länger das stationäre Signal,

- desto ausgeprägter die spektralen Hauptkomponenten.
- desto kleiner der spektrale Leck-Effekt

- wichtig in Analyse: Bestimmung der **tatsächlich** vorhandenen Frequenzbeiträge
- Abtastrate muss der Dynamik des Signals angepasst sein.
- neuronale Aktivität nicht stationär:
Zeitfenster sollte nicht zu groß sein
- Dynamik enthält aber verschiedene Zeitskalen

Welche sind das ?

Woher kommen sie ?

Woher kommt Nichtstationarität ?

Ausflug in die Physiologie

Frage: woher kommen verschiedene Zeitskalen ?

Ausflug in die Physiologie

Frage: woher kommen verschiedene Zeitskalen ?

Wahrscheinlichkeit, dass ein Ion Energie E hat:

$$p(x) \sim e^{-E(x)/kT}$$

Ausflug in die Physiologie

Frage: woher kommen verschiedene Zeitskalen ?

Wahrscheinlichkeit, dass ein Ion Energie E hat:

$$p(x) \sim e^{-E(x)/kT}$$

befindet sich Ion in einem elektrischen Feld:

$$E(x) = qU(x)$$

$U(x)$: Spannung am Ort x

q : Ladung des Ions

bei großer Anzahl von Ionen:

$$p(x) \sim n(x)$$

$$\longrightarrow n(x) \sim e^{-qU(x)/kT}$$

bei großer Anzahl von Ionen:

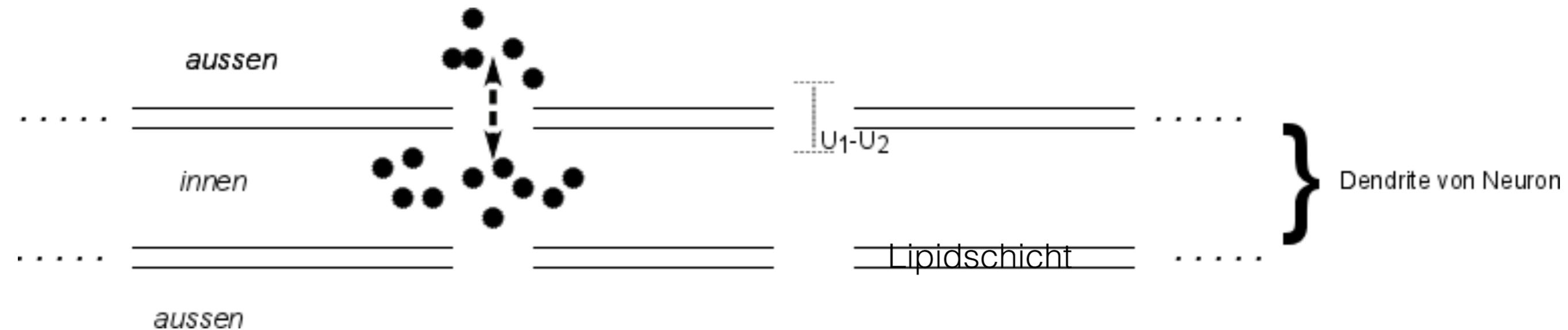
$$p(x) \sim n(x)$$

$$\longrightarrow n(x) \sim e^{-qU(x)/kT}$$

zwei Ionenwolken an unterschiedlichen Orten:

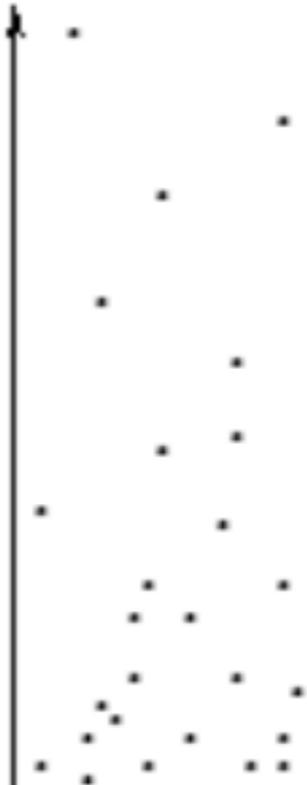
$$\begin{aligned} \frac{n(x_1)}{n(x_2)} &= e^{-q \frac{U(x_1) - U(x_2)}{kT}} \\ &= e^{-q \frac{\Delta U}{kT}} \end{aligned}$$

Zellmembran in Neuron:



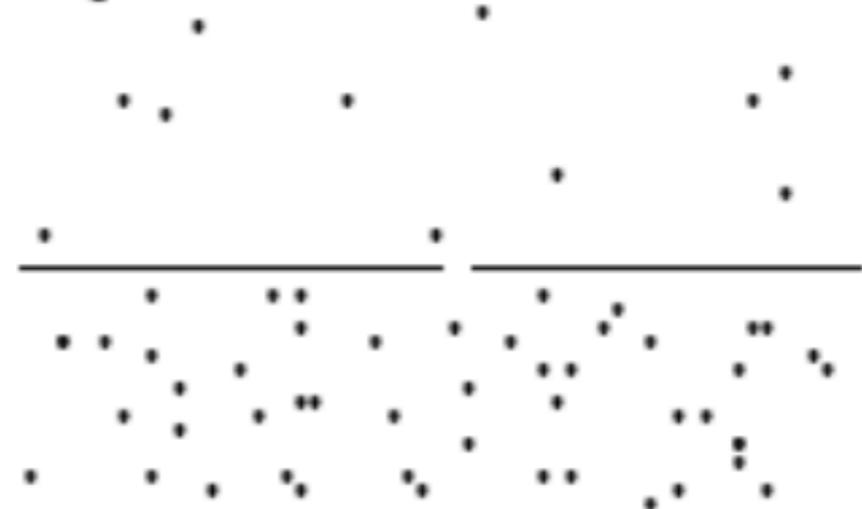
A

$$E = qu$$



B

n_1 (inside)



n_2 (outside)

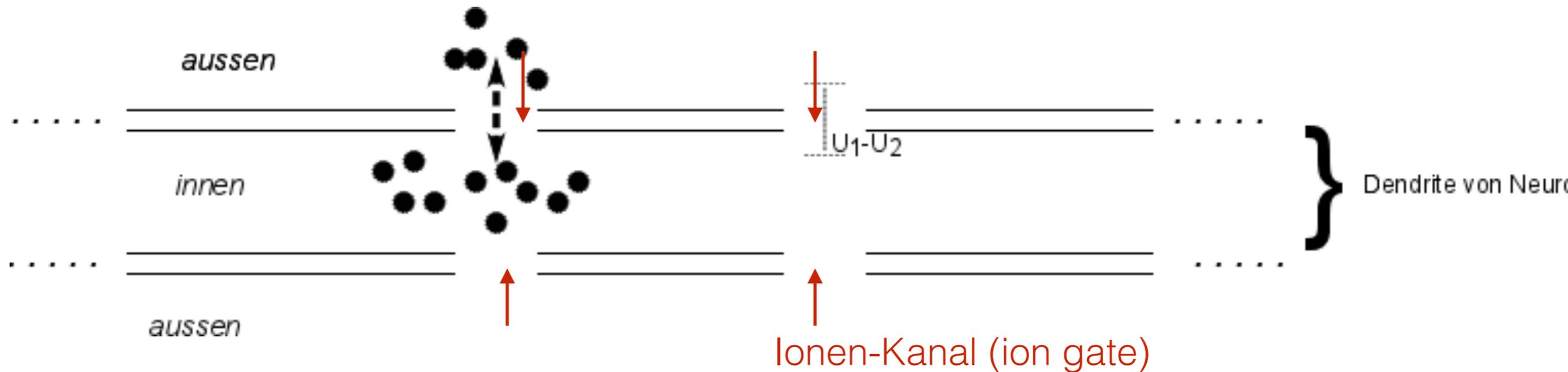
- Zellmembran trennt Ionenwolken mit unterschiedlicher Dichte

- Zellmembran trennt Ionenwolken mit unterschiedlicher Dichte
- es entsteht eine elektrische Spannung zwischen dem Inneren der Zelle und dem Äußeren der Zelle

- Zellmembran trennt Ionenwolken mit unterschiedlicher Dichte
- es entsteht eine elektrische Spannung zwischen dem Inneren der Zelle und dem Äußeren der Zelle
- im Konzentrationsgleichgewicht ist Spannung stabil

- Zellmembran trennt Ionenwolken mit unterschiedlicher Dichte
- es entsteht eine elektrische Spannung zwischen dem Inneren der Zelle und dem Äußeren der Zelle
- im Konzentrationsgleichgewicht ist Spannung stabil

ΔU nennt man **Nernst-Potential** oder *reversal potential*



- *ion gate* im Ionenkanal steuert Konzentration und Spannung

Spannung an *ion gate*:

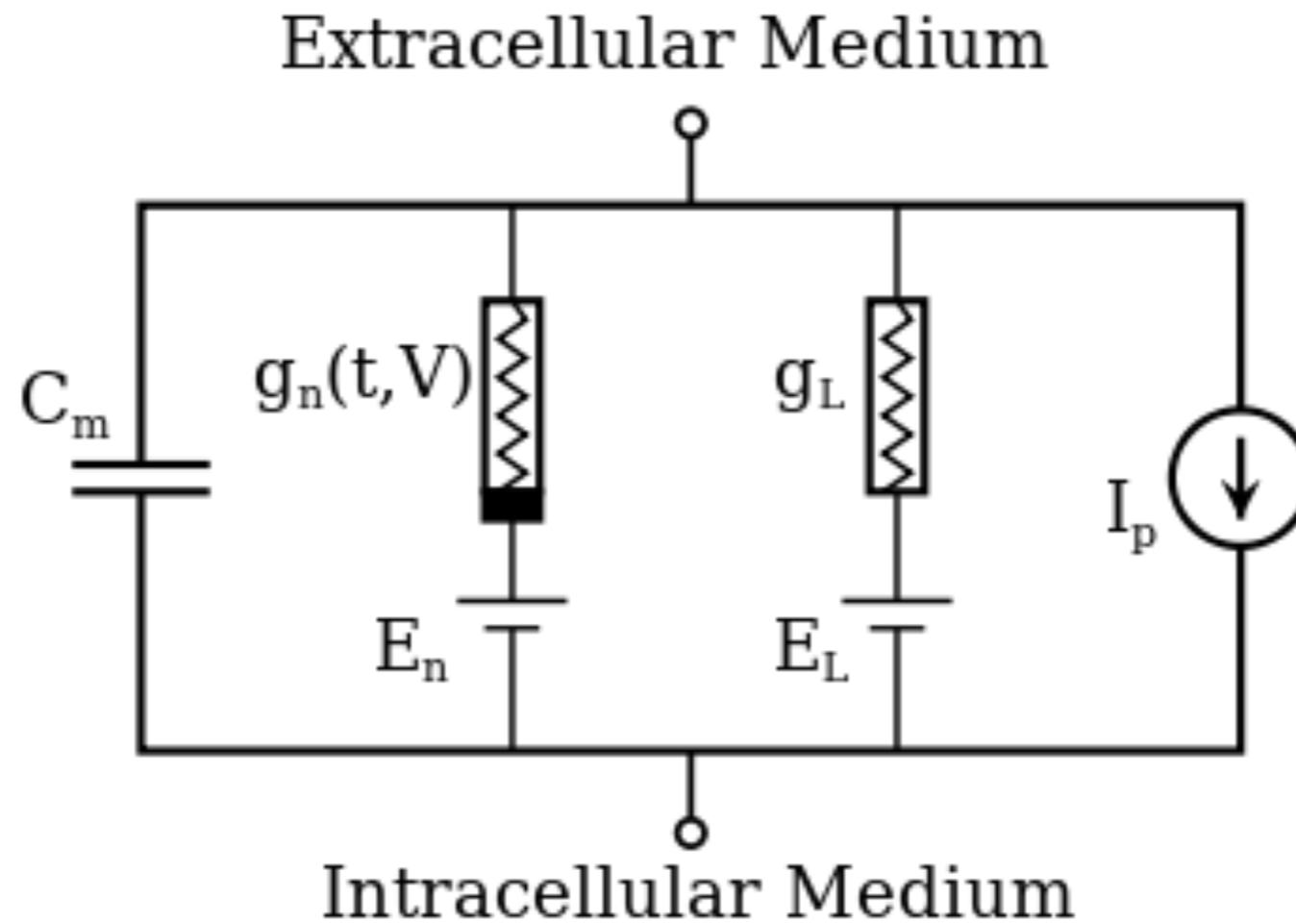
$$\Delta U = IR$$

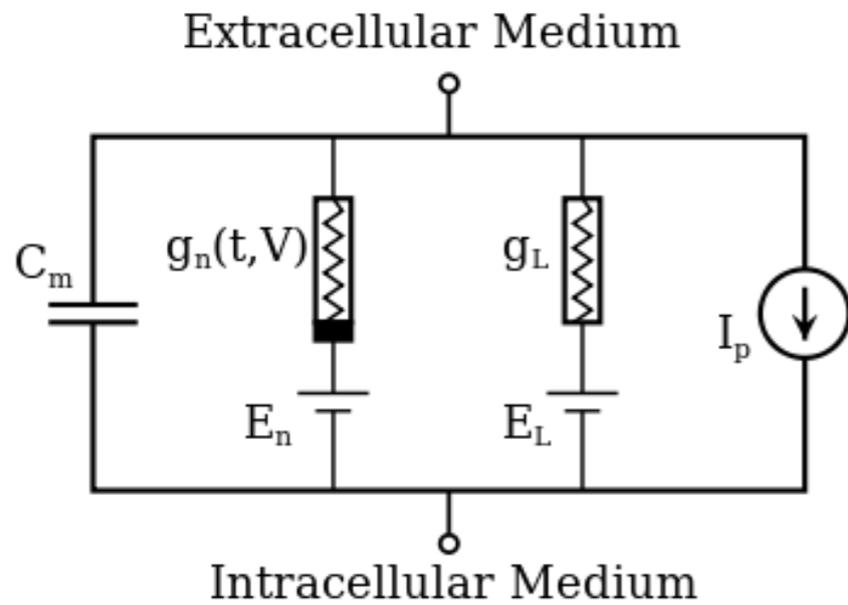
$$I = g(V - E_r)$$

E_r : *reversal potential*
 g : Leifähigkeit

Einzelneuronen

Modell von Hodgkin und Huxley





Kirchhoff:

$$I(t) - \left(C_m \frac{dV}{dt} + I_n(t) + I_L(t) \right) = 0$$

$$I_n(t) = g_n(V(t) - E_n)$$

\uparrow Leitfähigkeit von Ionenkanälen \uparrow reversal potential

$$n = K, Na$$

2 Ionenkanäle: von K^+ -Ionen und Na^+ -Ionen

$$g_K \sim n^4(t)$$

4 K^+ - ion gates

$$g_{Na} \sim m^3(t)h(t)$$

3 Na^+ - ion gates, 1 Na^+ - deaktivierende ion gates

n, m, h : Wahrscheinlichkeiten, dass ein gate offen,
d.h. für Ionen durchlässig ist.

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(1 - x) - \beta x \quad x=n, m, h$$

$$\alpha = \alpha(V) , \beta = \beta(V)$$



g_n sind spannungsabhängige Leitfähigkeiten

$$I = C_m \frac{dV_m}{dt} + \bar{g}_K n^4 (V_m - V_K) + \bar{g}_{Na} m^3 h (V_m - V_{Na}) + \bar{g}_l (V_m - V_l)$$

$$\frac{dn}{dt} = \alpha_n(V_m)(1 - n) - \beta_n(V_m)n$$

$$\frac{dm}{dt} = \alpha_m(V_m)(1 - m) - \beta_m(V_m)m$$

V_m : Membranpotential

$$\frac{dh}{dt} = \alpha_h(V_m)(1 - h) - \beta_h(V_m)h$$

n : Wahrscheinlichkeit, dass K^+ -Ionenkanal offen ist

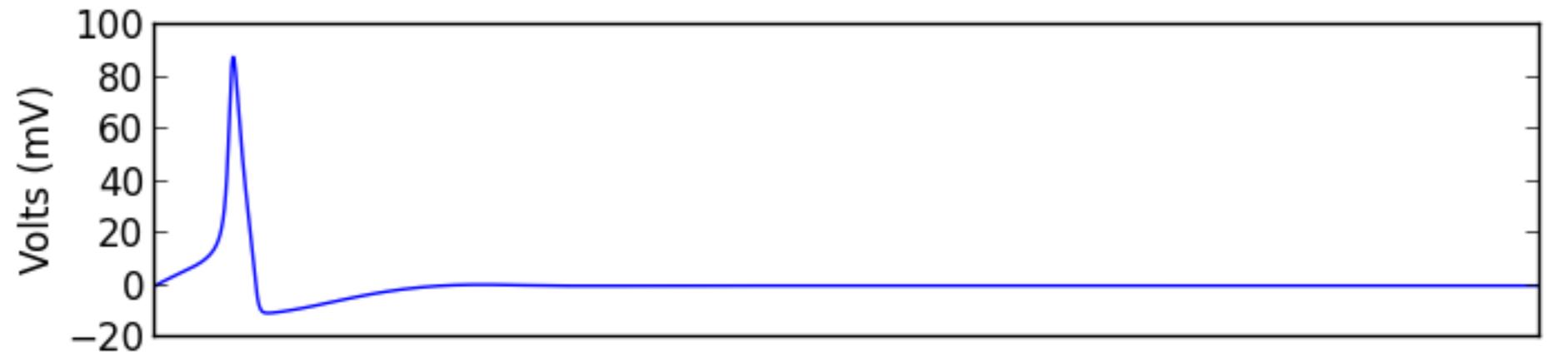
m : Wahrscheinlichkeit, dass Na^+ -Ionenkanal aktiv ist

h : Wahrscheinlichkeit, dass Na^+ -Ionenkanal inaktiv ist

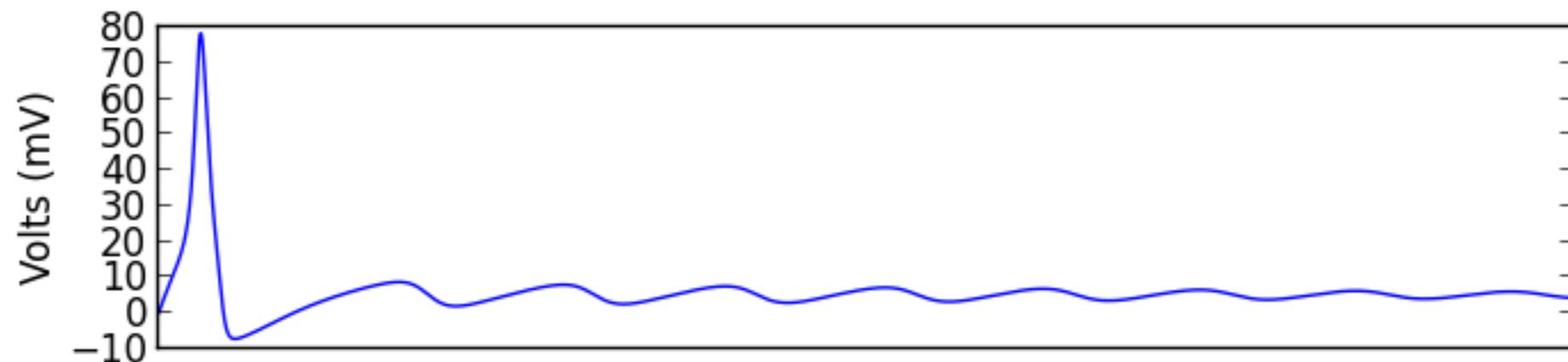
$$\alpha_n(V_m) = \frac{0.01(V_m - 10)}{\exp\left(\frac{V_m - 10}{10}\right) - 1} \quad \alpha_m(V_m) = \frac{0.1(V_m - 25)}{\exp\left(\frac{V_m - 25}{10}\right) - 1} \quad \alpha_h(V_m) = 0.07 \exp\left(\frac{V_m}{20}\right)$$

$$\beta_n(V_m) = 0.125 \exp\left(\frac{V_m}{80}\right) \quad \beta_m(V_m) = 4 \exp\left(\frac{V_m}{18}\right) \quad \beta_h(V_m) = \frac{1}{\exp\left(\frac{V_m - 30}{10}\right) + 1}$$

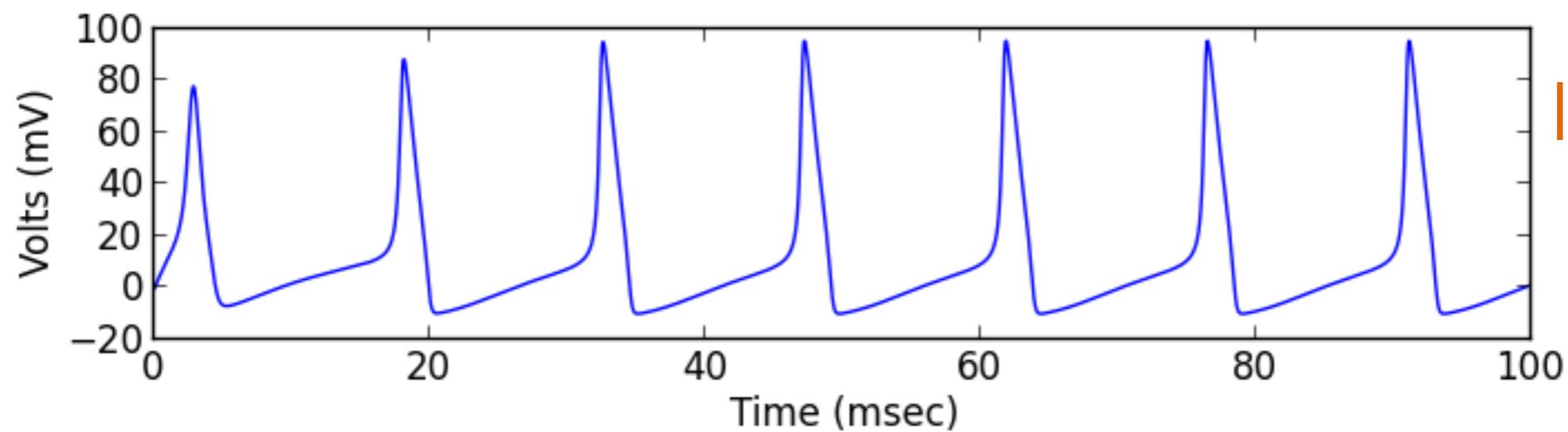
Aktivität eines Neurons:



$I=0$



$I=-8.5$



$I=-10.5$

II. Fourier Analyse

II.1. Grundlagen

a) Koeffizienten

b) Fourier Theorem

II.2. Mögliche Fehler in der Fourier Analyse

Aliasing

Periodizität

Spectral leakage

II.3. Berechnung von Spektren

II.3. Berechnung von Spektren

a) Definitionen

b) Periodogram+ Bartlett-Welch Methode

c) multi-taper Methode

III. Zeit-Frequenz Analyse

Definitionen

Annahme: **unendlich lange** zeitkontinuierliches Signal $x(t)$:

mittlere Energie

Parseval's theorem:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$$

↑
Fourier transform

Annahme: **unendlich langes** abgetastetes Signal $x(t_n)$:

Energie-Spektraldichte

$$S(f_n) = \Delta t^2 |DFT(f_n)|^2$$

Δt : sampling time

Annahme: **endliches** zeitkontinuierliches Signal $x(t)$
der Länge T :

average power:

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x|^2(t) dt$$

power spectral density:

$$S_{xx}(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} |X_T(f)|^2$$

$$X_T(f) = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T x(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Annahme: **endliches** abgetastetes Signal $x(t_n)$ der Länge T :

power spectral density (PSD): $S_{xx}(f_n) = \frac{\Delta t^2}{T} |DFT(f_n)|^2$

statistische Schätzung der (PSD):

$$S_{xx}(f_n) = \frac{\Delta t^2}{T} \langle |DFT(f_n)|^2 \rangle$$

$\langle \cdot \rangle$: Scharmittel

falls $x(t)$ ein stationäres Signal ist:

falls $x(t)$ ein stationäres Signal ist:

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}[A(t)](f)$$

Wiener-Khinchin theorem

$$A(t) = \langle x(\tau)x(\tau + t) \rangle$$

Autokorrelation-Funktion

cross-spectral density:

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F}[C_{xy}(t)](f)$$

$$C_{xy}(t) = \langle x(\tau)y(\tau + t) \rangle$$

Kreuzkorrelation-Funktion