Verfahren zur Datenanalyse gemessener Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 2 - WS 2017/18

zum Übungsblatt

Aufgabe 1:

$$s(t) = \sin(16\pi t) + \cos(2\pi t)$$

Linearkombination von Oszillationen mit 8Hz und 1Hz

$\longrightarrow$ Maximalfrequenz ist 8Hz

$\longrightarrow$ Abtasten mit f_s >16Hz

Aufgabe 2:

$$T = 10s \rightarrow \Delta f = 0.1Hz$$

$$x(t) = 2\sin(6\pi t) = 2\sin(2\pi \cdot 3 \cdot t)$$

$$\rightarrow 3Hz = 30\Delta f$$

$$\rightarrow c_n = \frac{2}{2i}(\delta_{n,30} - \delta_{n,-30})$$

$$x(t) = 2\sin(4\pi t) + 8\cos(\pi t) = 2\sin(2\pi \cdot 2 \cdot t) + 8\cos(2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot t)$$

$$\rightarrow c_n = \frac{2}{2i}(\delta_{n,20} - \delta_{n,-20}) + \frac{8}{2}(\delta_{n,5} + \delta_{n,5})$$

Vorlesung 2

letztes Beispiel:

$$s(t) = a\sin(2\pi\nu t) \qquad t\in[0,T]$$

$$\nu = m\Delta f$$

$$\longrightarrow \quad c_n = \frac{1}{2i}\left(\delta_{n,m} - \delta_{n,-m}\right)$$

<u>nun</u>: Signal wird <u>abgetastet</u> mit Frequenz f_s

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s}$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad\qquad t \to t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \to s(t_n) = s_n$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad\qquad t \to t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \to s(t_n) = s_n$$

$$T = N\Delta t$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad t \to t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \to s(t_n) = s_n$$

$$T = N\Delta t \qquad \Delta f = \frac{1}{T}$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad t \to t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \to s(t_n) = s_n$$

$$T = N\Delta t \qquad \Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t}$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad\qquad t \to t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \to s(t_n) = s_n$$

$$T = N\Delta t \qquad\qquad \Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{f_s}{N}$$

nun: Signal wird abgetastet mit Frequenz f_s

$$\Delta t = \frac{1}{f_s} \qquad t \to t_n = n\Delta t \quad , \quad n = 0, \ldots, N$$

$$s(t) \to s(t_n) = s_n$$

$$T = N\Delta t \qquad \Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta t} = \frac{f_s}{N}$$

Anzahl der Frequenzen = Anzahl der Datenpunkte falls nun Signal s(t) abgetastet wird mit Frequenz f_s:

$$s(t) = s(t_k)\ ,\ t_k = k\Delta t \qquad \Delta t = \frac{1}{f_s}$$

wie werden dann die Fourierkoeffizienten berechnet ?

falls nun Signal s(t) abgetastet wird mit Frequenz f_s:

$$s(t) = s(t_k) \ , \ t_k = k\Delta t \qquad \Delta t = \frac{1}{f_s}$$

wie werden dann die Fourierkoeffizienten berechnet ?

erst einmal gilt allgemein:

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{k=1}^{M} f(t_k)\Delta t \ , \ t_1 = a \ , \ t_N = b - \Delta t$$

dann berechnen sich die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t')e^{-i\,\frac{2\pi n}{T}\,t'}\;dt' \qquad \text{zu}$$

dann berechnen sich die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t`)e^{-i\,\frac{2\pi n}{T}\,t`}\;dt` \qquad \text{zu}$$

$$c_n = \frac{\Delta t}{M\Delta t}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i\,\frac{2\pi n k \Delta t}{M\Delta t}}\;,\;\; n = 1,\ldots,N$$

dann berechnen sich die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} s(t') e^{-i \frac{2\pi n}{T} t'} \, dt' \qquad \text{zu}$$

$$c_n = \frac{\Delta t}{M \Delta t} \sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{-i \frac{2\pi n k \Delta t}{M \Delta t}} \ , \ n = 1, \ldots, N$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{-i 2\pi f_n k} \ , \ f_n = n/M$$

dann berechnen sich die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t') e^{-i\frac{2\pi n}{T}t'}\, dt' \qquad \text{zu}$$

$$c_n = \frac{\Delta t}{M\Delta t}\sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{-i\frac{2\pi n k \Delta t}{M\Delta t}} \;,\; n = 1, \ldots, N$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{-i2\pi f_n k} \;,\; f_n = n/M$$

diskrete Frequenz

dann berechnen sich die Koeffizienten

$$c_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t`)e^{-i\frac{2\pi n}{T}t`}\,dt` \qquad \text{zu}$$

$$c_n = \frac{\Delta t}{M\Delta t}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i\frac{2\pi n k\Delta t}{M\Delta t}} \ , \ n = 1,\ldots,N$$

$$= \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i2\pi f_n k} \ , \ f_n = n/M$$

diskrete Frequenz

Discrete Fourier Transformation (DFT)

Annahme: N Zeitpunkte

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi f_n t}$$

Fourierreihe

Annahme: N Zeitpunkte

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi f_n t}$$

Fourierreihe

$$s(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi (n\Delta f)(k\Delta t)}$$

Annahme: N Zeitpunkte

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi f_n t}$$

Fourierreihe

$$s(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi (n\Delta f)(k\Delta t)}$$

$$= \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi nk(\Delta t/T)}$$

Annahme: N Zeitpunkte

$$s(t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi f_n t}$$ Fourierreihe

$$s(t_k) = \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi (n\Delta f)(k\Delta t)}$$

$$= \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi nk(\Delta t/T)}$$

$$\boxed{= \sum_{n=-N/2}^{N/2} c_n e^{i2\pi nk/N}}$$ DFT

Eigenschaften der Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{-i\frac{2\pi n k}{M}} \qquad n = 1, \ldots, N$$

Eigenschaften der Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{-i\frac{2\pi nk}{M}} \qquad n = 1, \ldots, N$$

da $$c_{-n} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{+i\frac{2\pi nk}{M}} = c_n^* \qquad (s(t_k) = s^*(t_k))$$

Eigenschaften der Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{-i\frac{2\pi n k}{M}} \qquad n = 1, \ldots, N$$

da $$c_{-n} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} s(t_k) e^{+i\frac{2\pi n k}{M}} = c_n^* \qquad (s(t_k) = s^*(t_k))$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{|c_{-n}| = \sqrt{c_{-n} c_{-n}^*} = \sqrt{c_n^* c_n} = |c_n|}$$

Eigenschaften der Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i\frac{2\pi nk}{M}} \qquad n = 1,\ldots,N$$

da $$c_{-n} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{+i\frac{2\pi nk}{M}} = c_n^* \qquad (s(t_k) = s^*(t_k))$$

$$\longrightarrow \boxed{|c_{-n}| = \sqrt{c_{-n}c_{-n}^*} = \sqrt{c_n^* c_n} = |c_n|}$$

da $$c_n = a_n + ib_n \;\rightarrow \boxed{a_{-n} = a_n \;,\; b_{-n} = -ib_n}$$

Eigenschaften der Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{-i\frac{2\pi nk}{M}} \qquad n = 1, \ldots, N$$

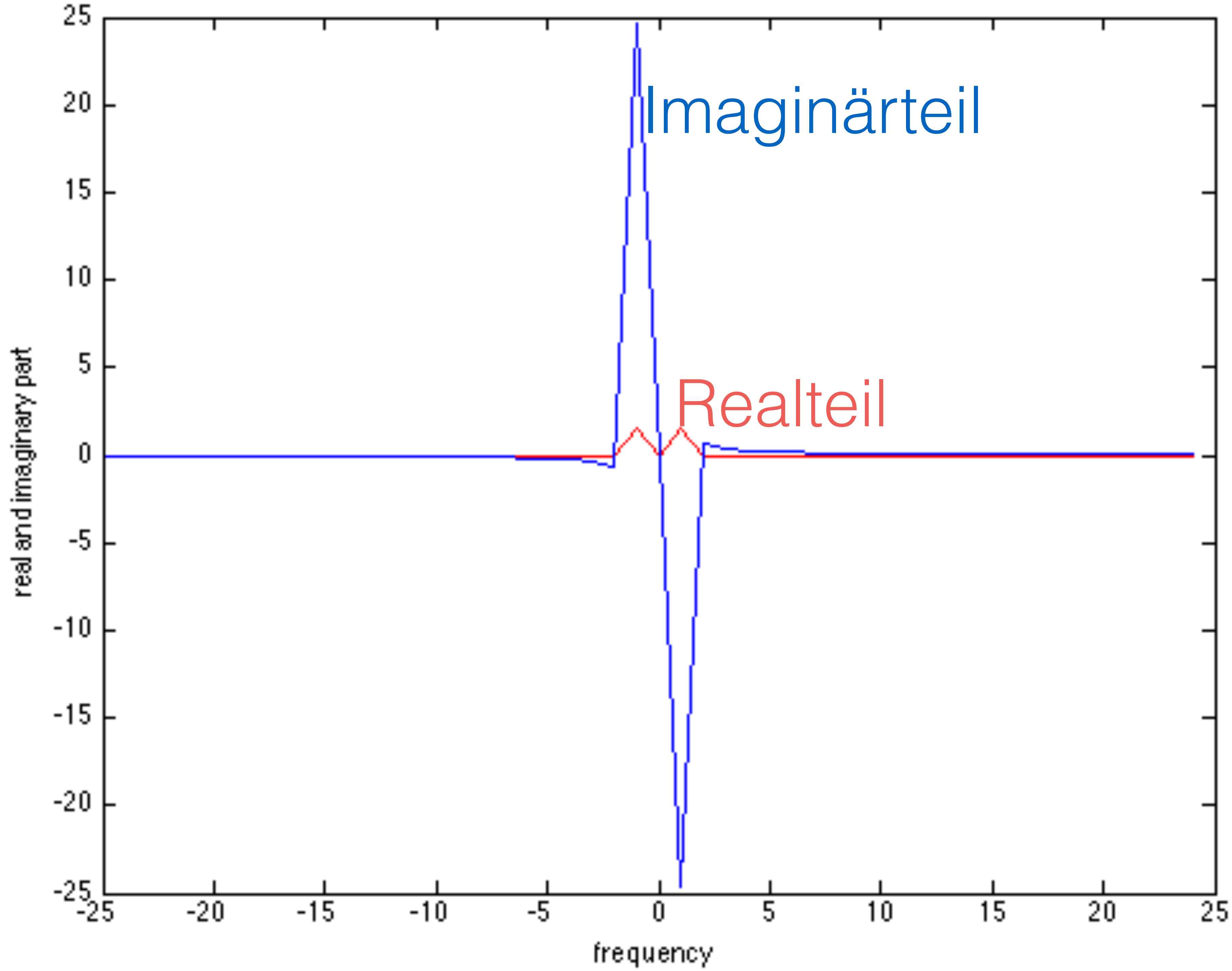
da $$c_{-n} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M} s(t_k)e^{+i\frac{2\pi nk}{M}} = c_n^* \qquad (s(t_k) = s^*(t_k))$$

$$\longrightarrow \boxed{|c_{-n}| = \sqrt{c_{-n}c_{-n}^*} = \sqrt{c_n^* c_n} = |c_n|}$$

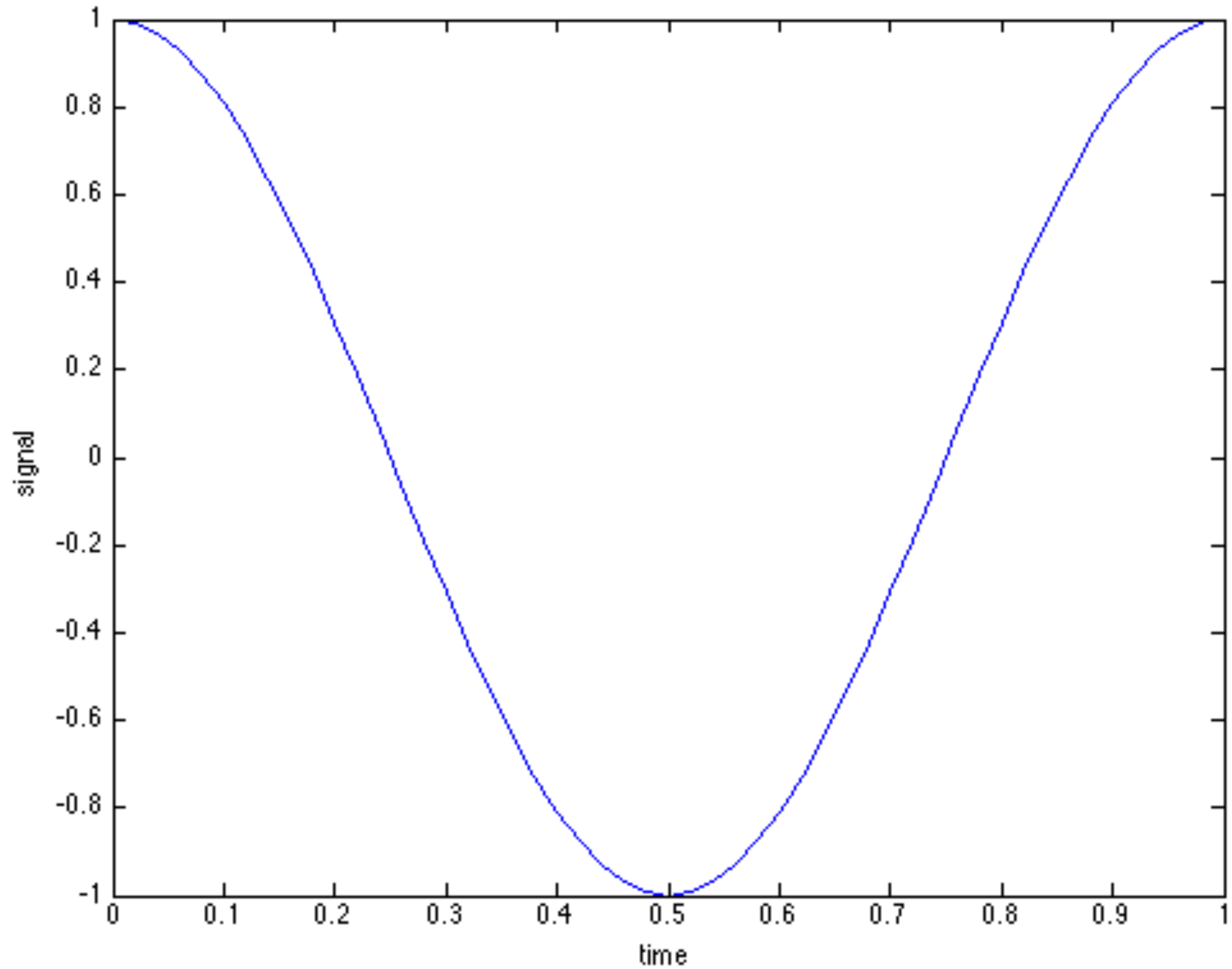
da $$c_n = a_n + ib_n \rightarrow \boxed{a_{-n} = a_n \ , \ b_{-n} = -ib_n}$$

$$\tan(\phi_n) = \frac{b_n}{a_n} \rightarrow \boxed{\phi_{-n} = -\phi_n}$$

$\mathrm{Real}(\mathrm{DFT}_n) = \mathrm{Real}(\mathrm{DFT}_{-n})$ $\mathrm{Imag}(\mathrm{DFT}_n) = -\mathrm{Imag}(\mathrm{DFT}_{-n})$



Beispiel



$$s(t) = 1.0 \cdot \cos(2\pi \cdot 1Hz \cdot t)$$

$$\longrightarrow \quad a_1 = 1.0, a_{n\neq 1} = 0$$

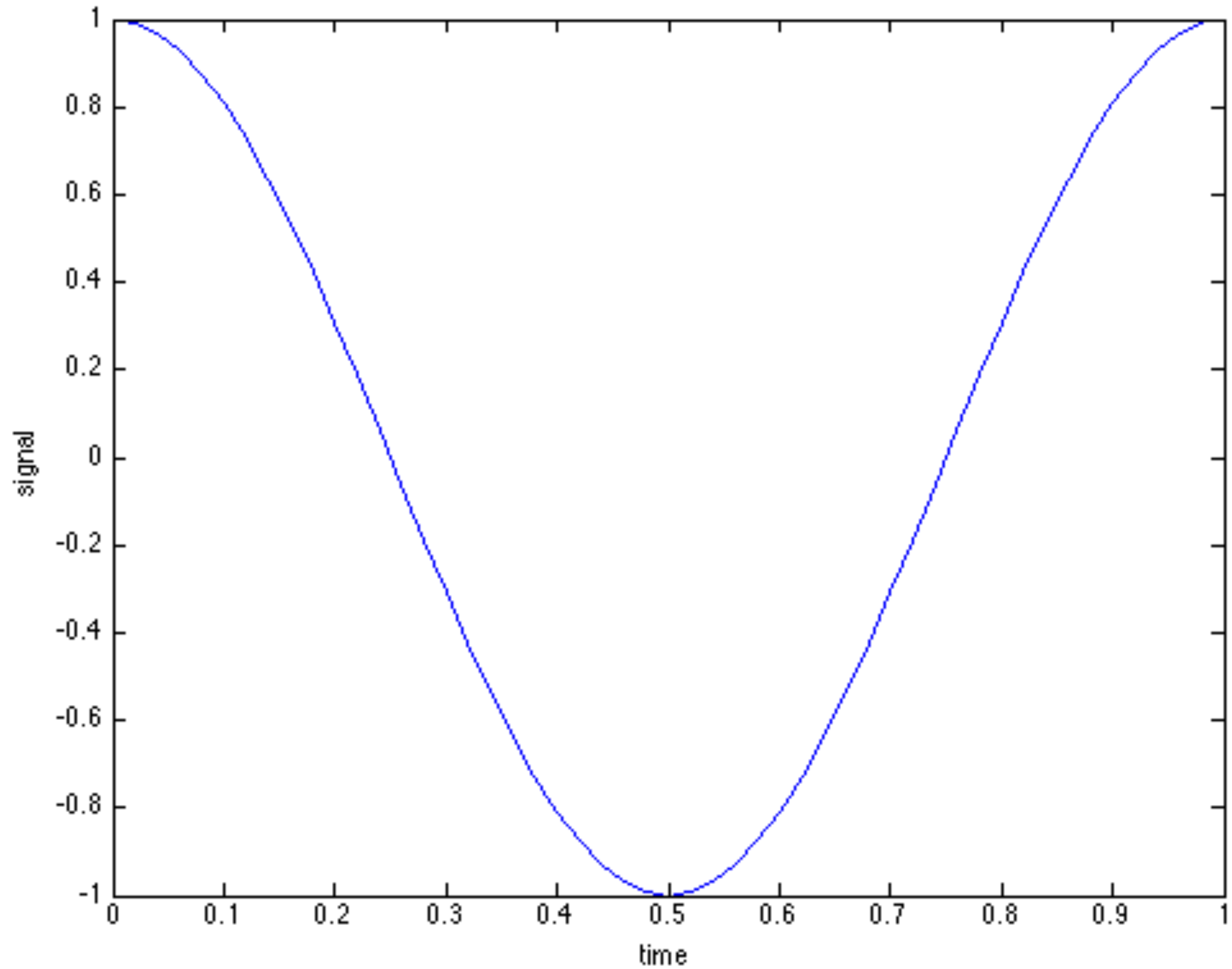
T=1s, N=50, Δt=0.02s

$\longrightarrow$ sample rate: **?????**

$\longrightarrow$ Nyquist rate: **?????**

(Fourier_0.m)

Beispiel



$$s(t) = 1.0 \cdot \cos(2\pi \cdot 1Hz \cdot t)$$

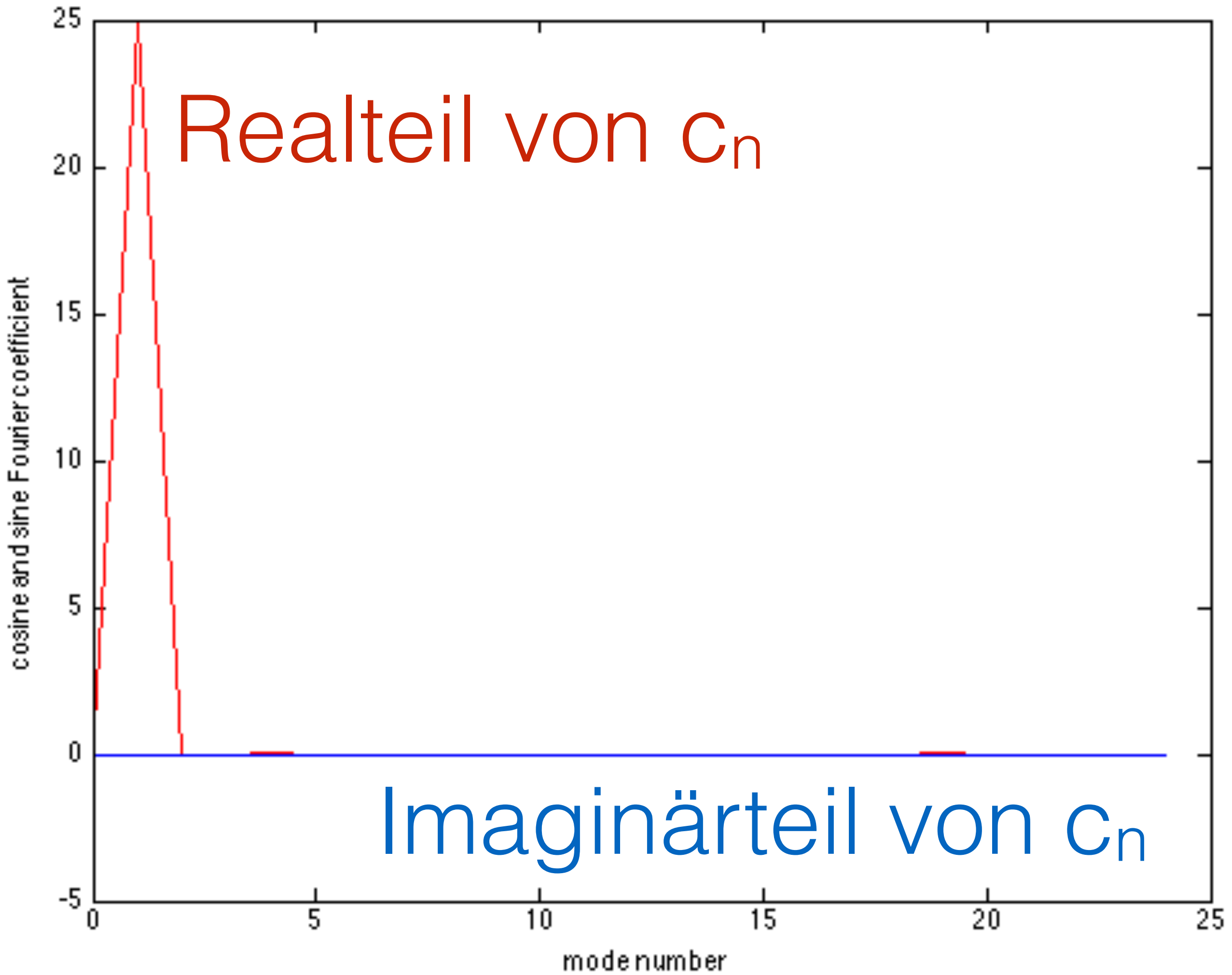
$\longrightarrow \quad a_1 = 1.0, a_{n \neq 1} = 0$

T=1s, N=50, Δt=0.02s

$\longrightarrow$ sample rate: 50Hz

$\longrightarrow$ Nyquist rate: 25Hz

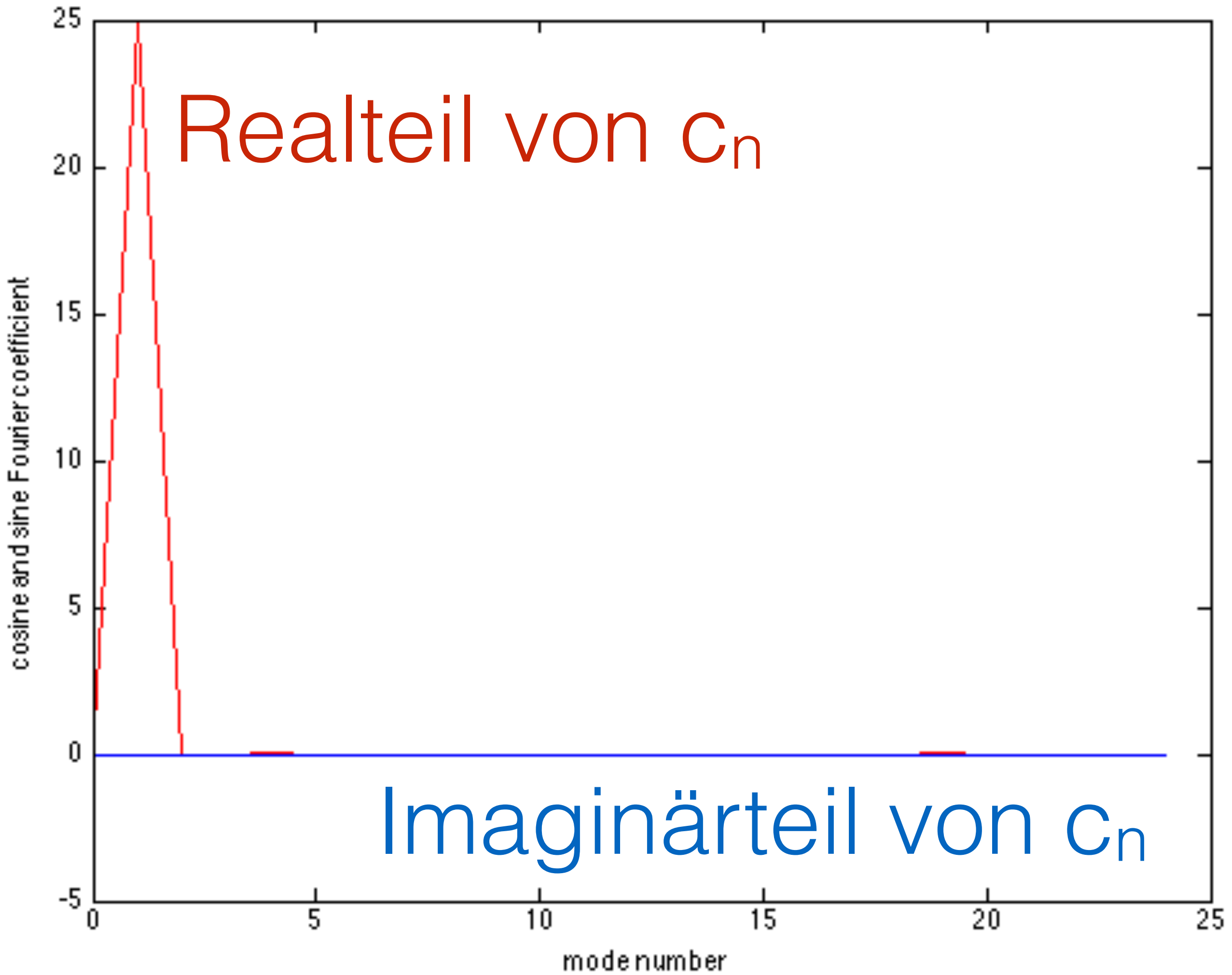
(Fourier_0.m)



$$\frac{a_n}{2} = \frac{Real(DFT_n)}{N}$$

$$\longrightarrow a_n = 2\frac{Real(DFT_n)}{N}$$

$$c_1 = 25/50 \rightarrow a_1 = 1.0$$ ✅



$$\frac{a_n}{2} = \frac{Real(DFT_n)}{N}$$

$$\longrightarrow \quad a_n = 2\frac{Real(DFT_n)}{N}$$

$$c_1 = 25/50 \rightarrow a_1 = 1.0$$ ✅

maximal 25 Fouriermoden wegen Abtasttheorem kurze Zusammenfassung

wichtige Eigenschaften eines abgetasteten Signals:

- für ein Signal der Dauer T ist die kleinste auflösbare Frequenz $f_{min}=1/T$

wichtige Eigenschaften eines abgetasteten Signals:

- für ein Signal der Dauer T ist die kleinste auflösbare Frequenz $f_{min}=1/T$

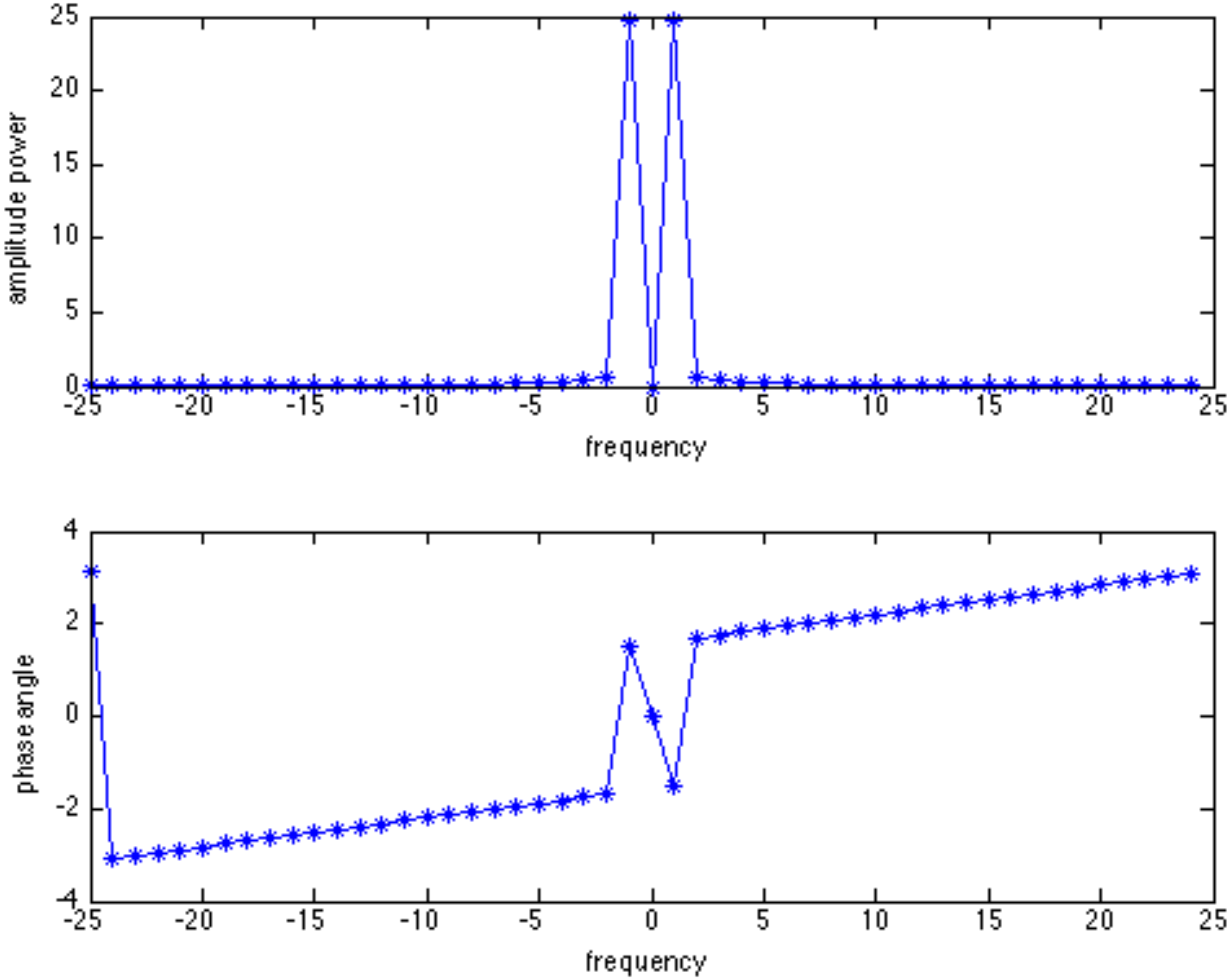
- für eine Abtastfrequenz f_s ist die Anzahl der Datenpunkte $N=Tf_s$ und es gibt N Frequenzen

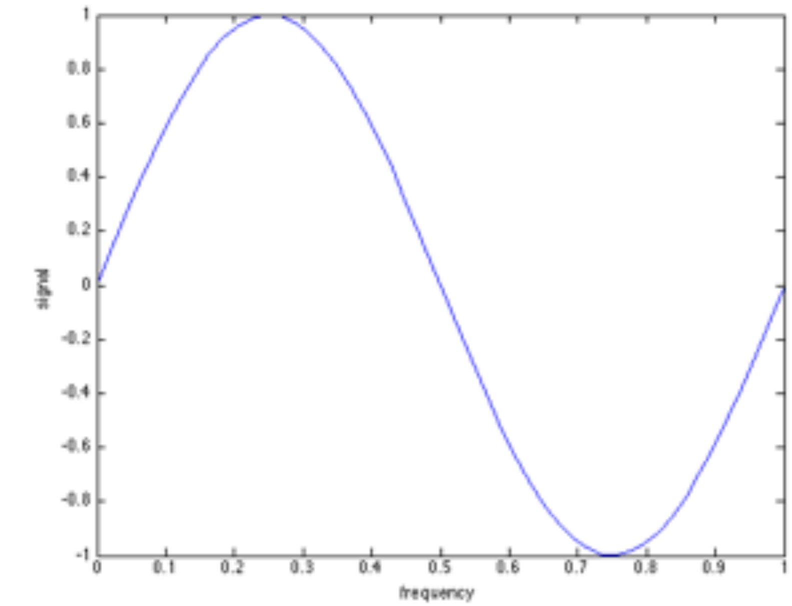
wichtige Eigenschaften eines abgetasteten Signals:

- für ein Signal der Dauer T ist die kleinste auflösbare Frequenz $f_{min}=1/T$

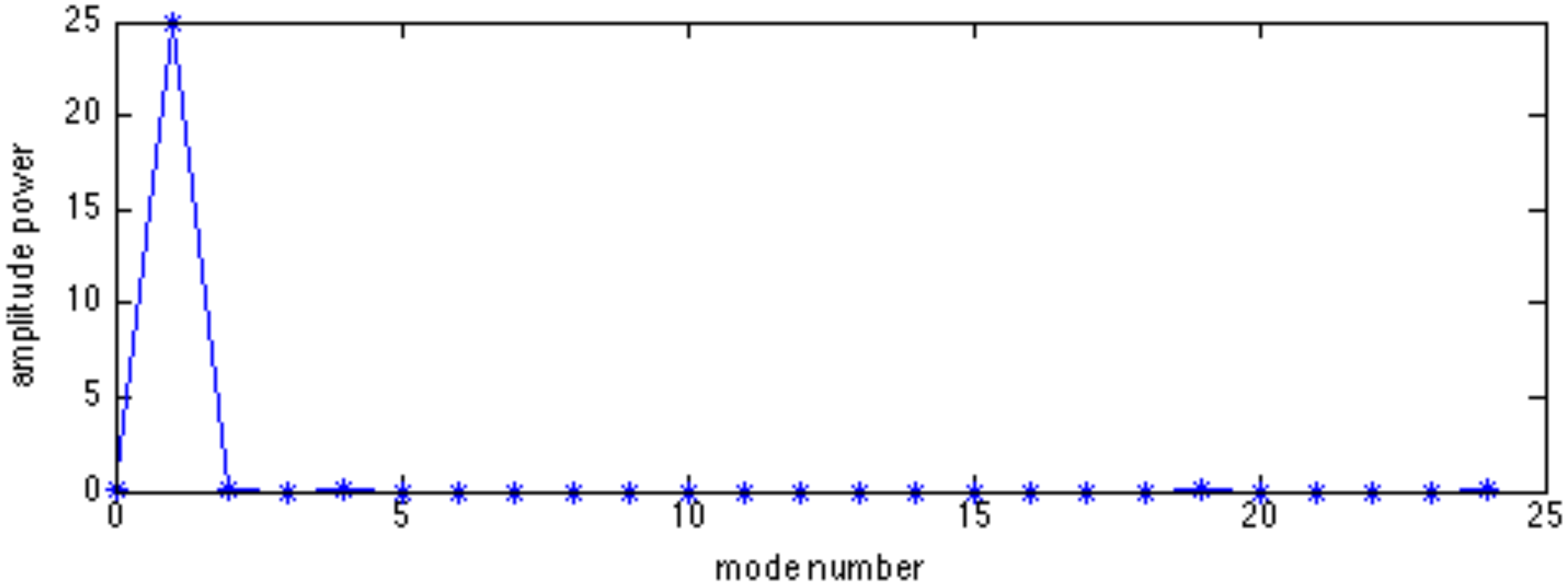
- für eine Abtastfrequenz f_s ist die Anzahl der Datenpunkte $N=Tf_s$ und es gibt N Frequenzen

- die Fourieranalyse ergibt N Frequenzen zwischen $-f_s/2$ und $f_s/2$ mit Frequenzinterval $\Delta f=f_{min}=1/T$



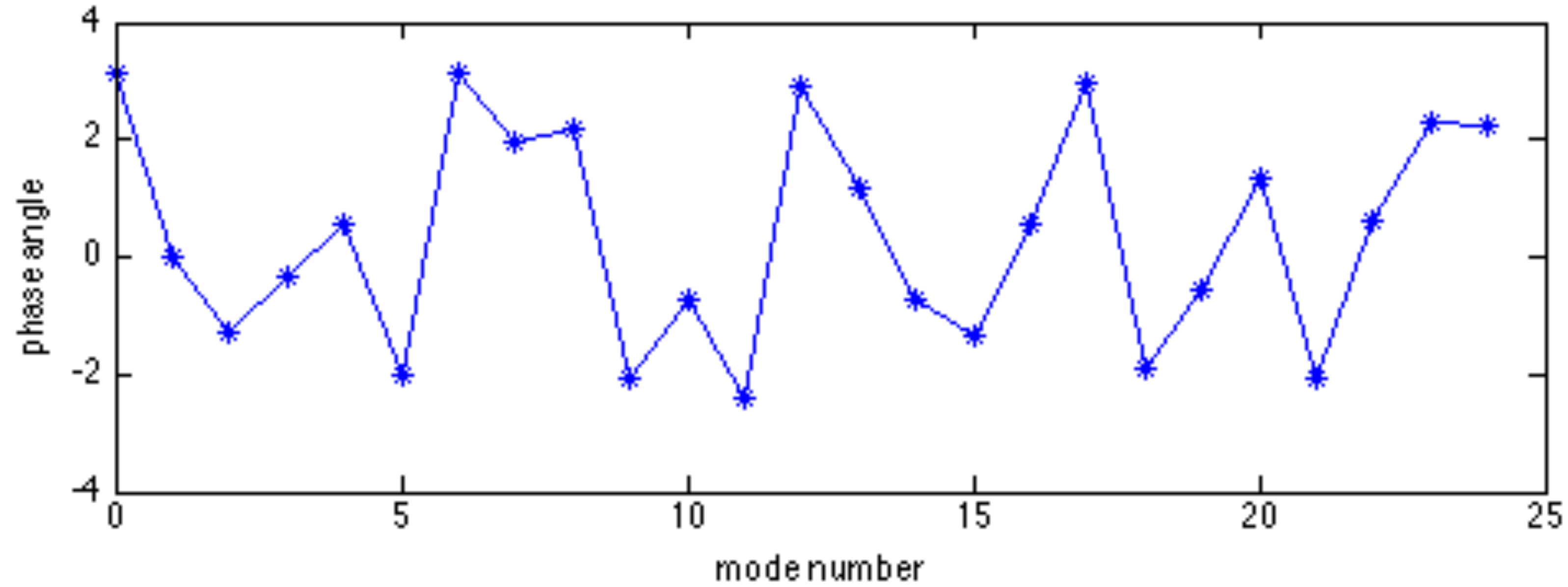


50 Frequenzen, 25 Fouriermoden, negative Frequenzen



power

$$|a_n| = \frac{2 \cdot |DFT_n|}{N}$$

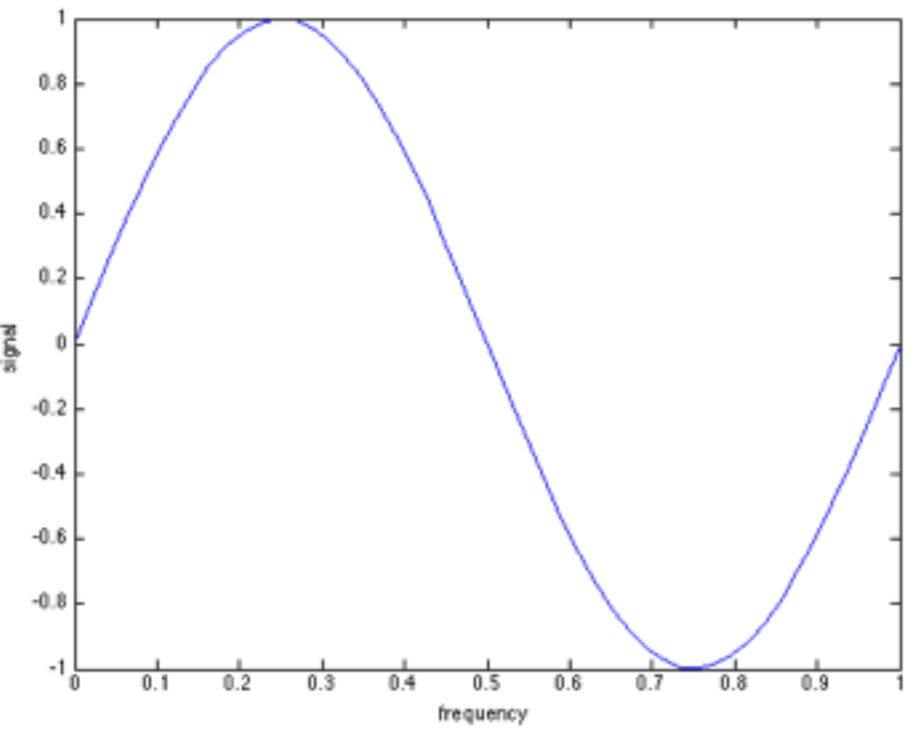


Phasenwinkel

$$\tan \phi_n = \frac{Imag(DFT_n)}{Real(DFT_n)}$$

$$|DFT_n| = \sqrt{Imag^2(DFT_n) + Real^2(DFT_n)}$$

Beispiel: Sinus Funktion



$$s(t) = 1.0 \cdot \sin(2\pi \cdot 1Hz \cdot t)$$

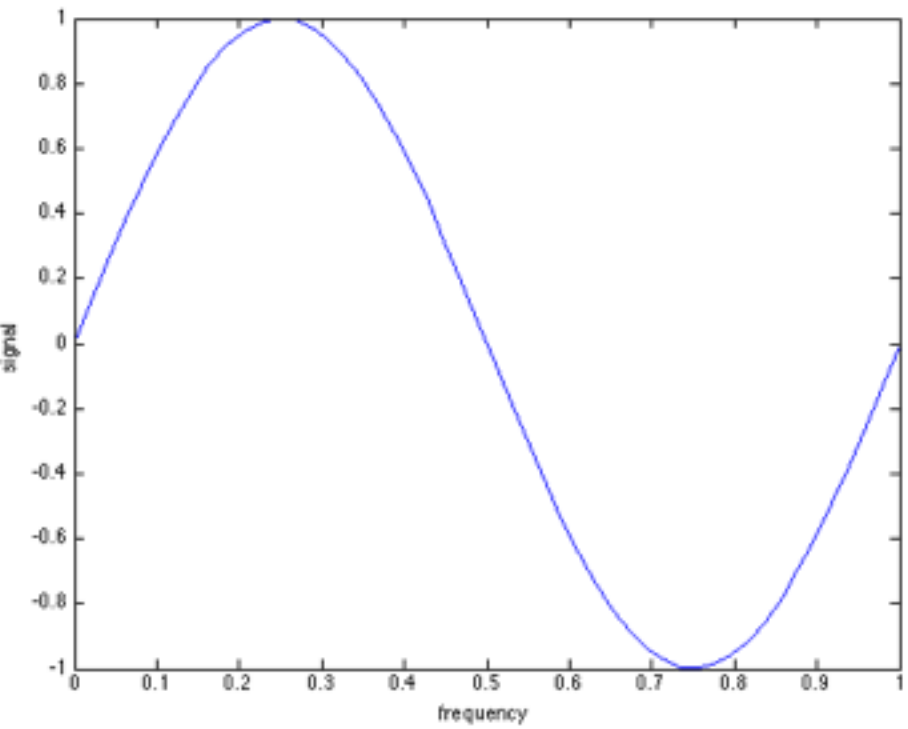
N=50, T=1s

Δf = ?

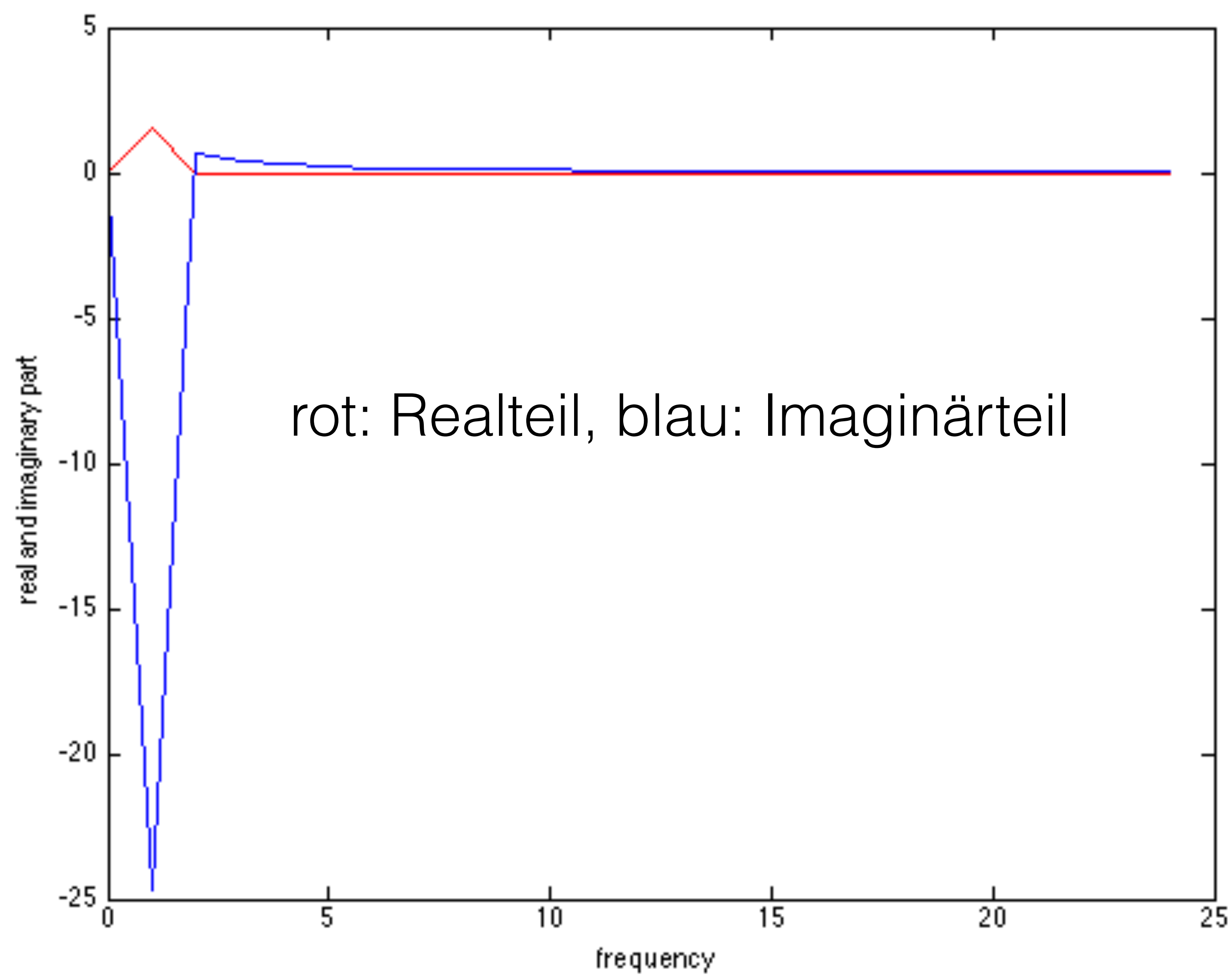
$\Delta t = ?$

$f_{max} = ?$

Beispiel: Sinus Funktion



$$s(t) = 1.0 \cdot \sin(2\pi \cdot 1Hz \cdot t)$$

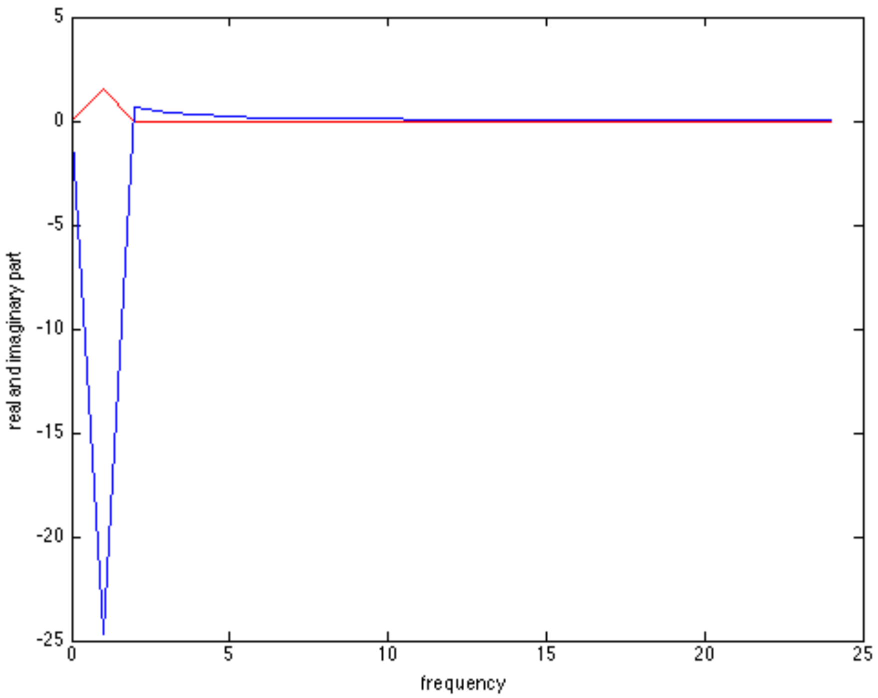


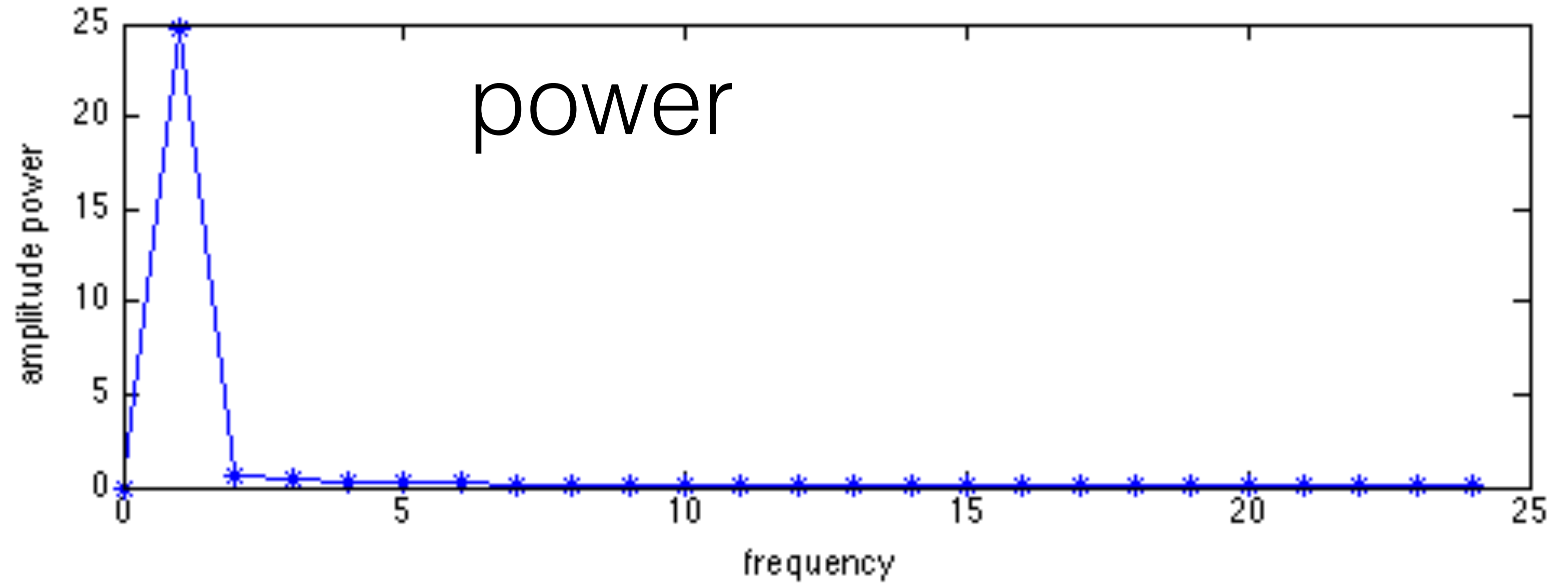
N=50, T=1s

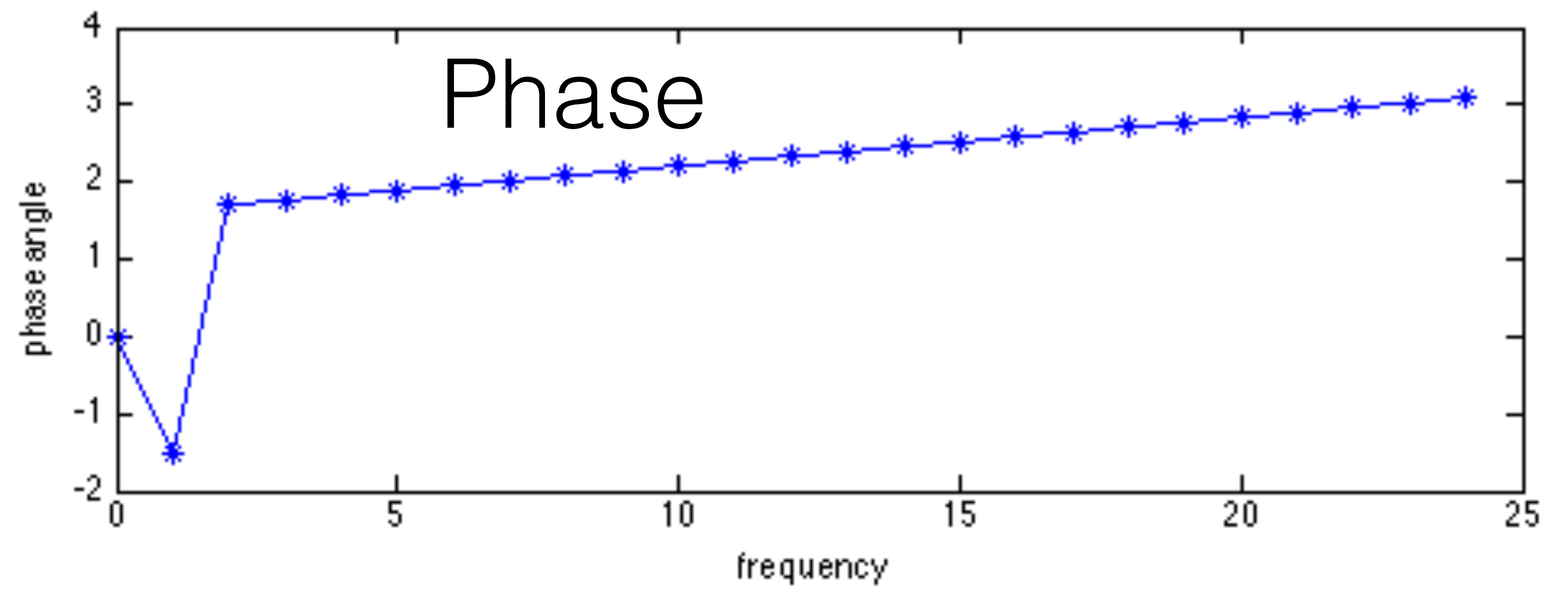
Δf = 1Hz

$$\Delta t = 0.02s$$

$$f_{max} = 25Hz$$





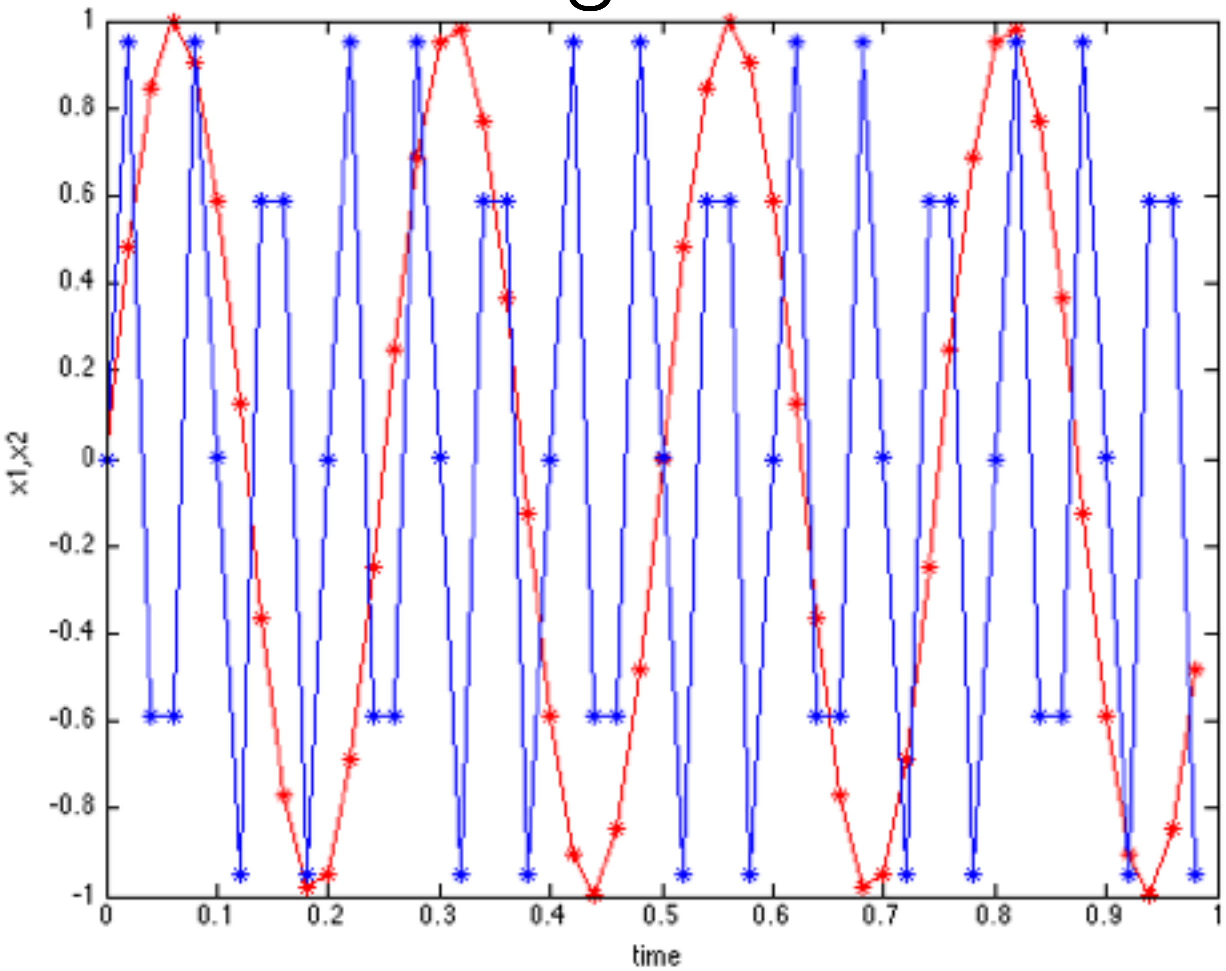


$$\phi_1 = -\pi/2$$

$$\cos(\phi - \pi/2) = \sin(\phi)$$

höhere Frequenzen

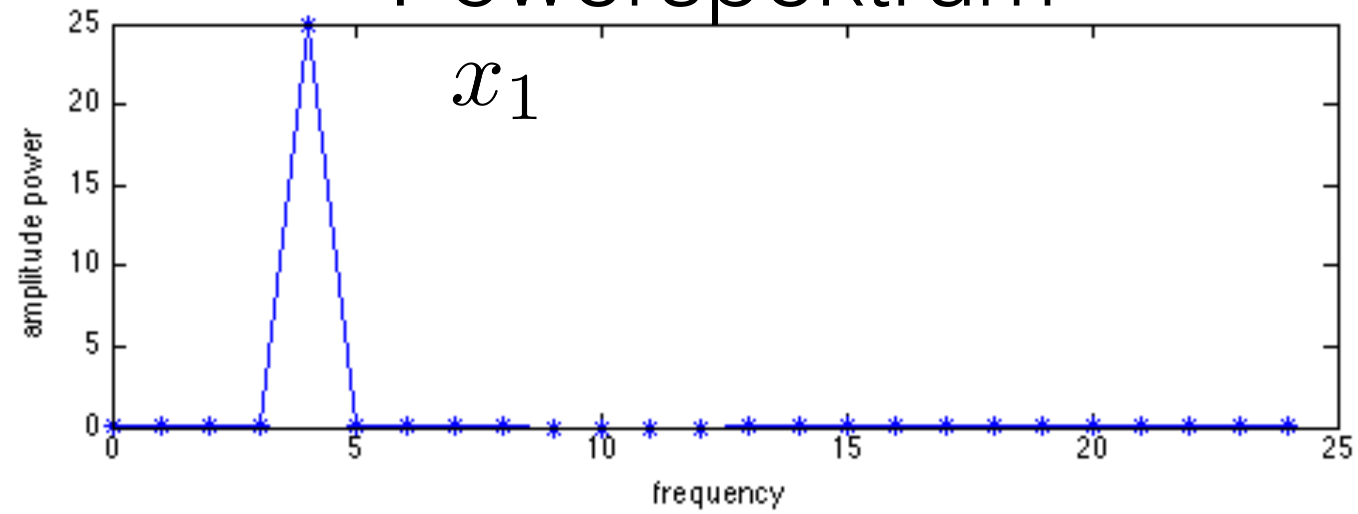
Signal

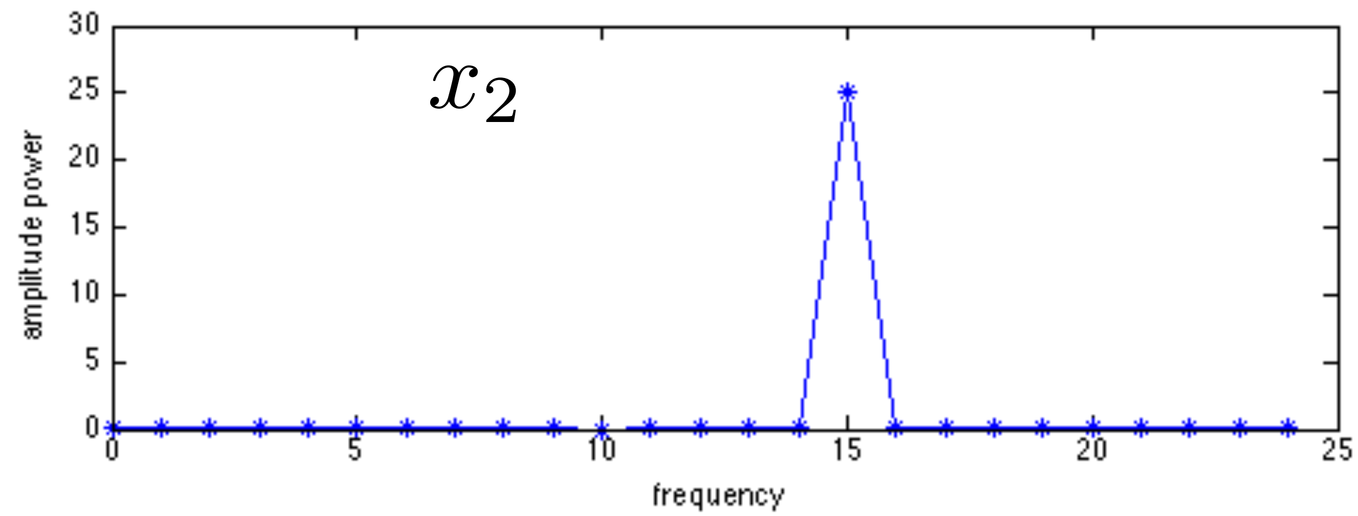


$$x_1(t) = \sin(2\pi \cdot 4 \cdot t)$$

$$x_2(t) = \sin(2\pi \cdot 15 \cdot t)$$

Powerspektrum



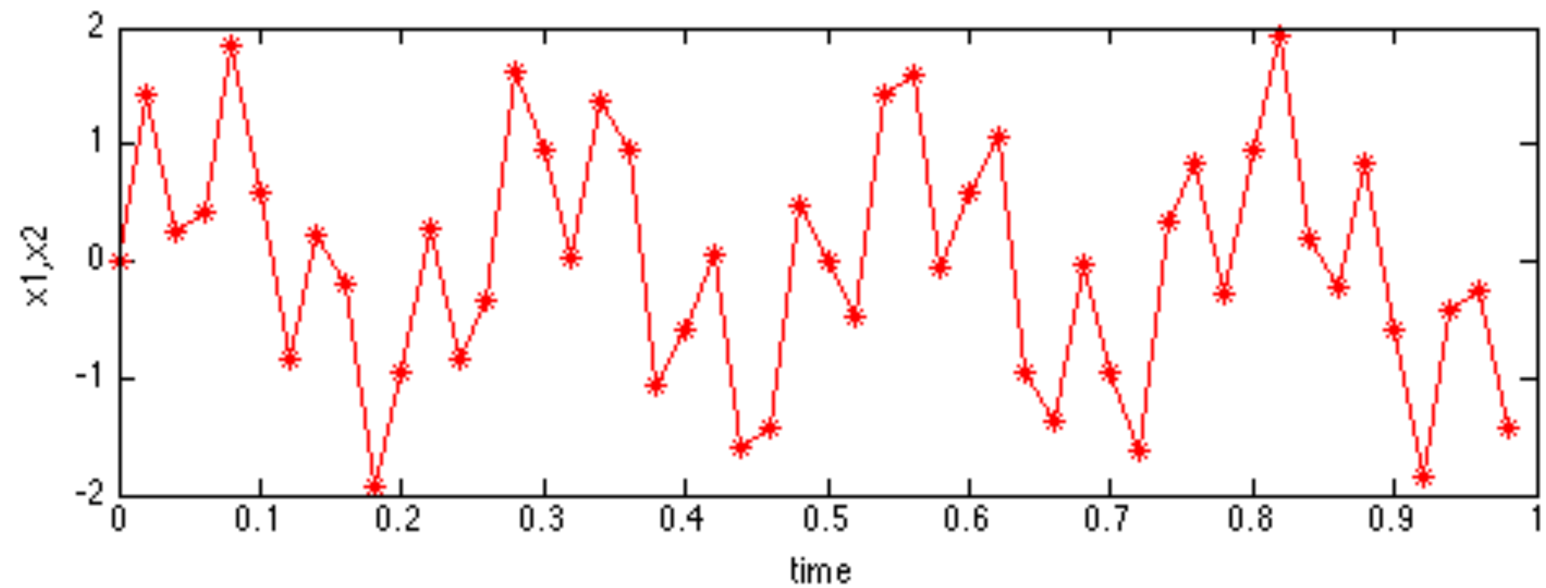


(Fourier_2.m)

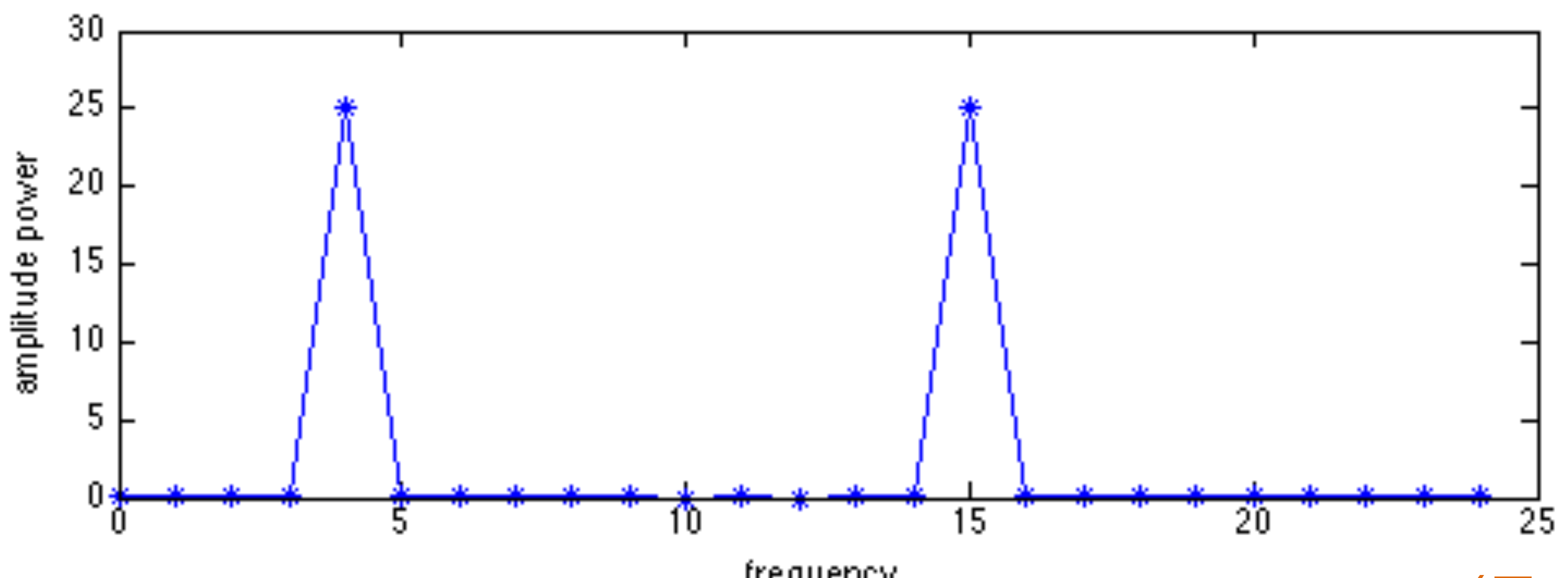
lineare Überlagerung

$$x(t) = \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)\ ,\ \omega_1 = 2\pi \cdot 4Hz\ ,\ \omega_2 = 2\pi \cdot 15Hz$$

Signal

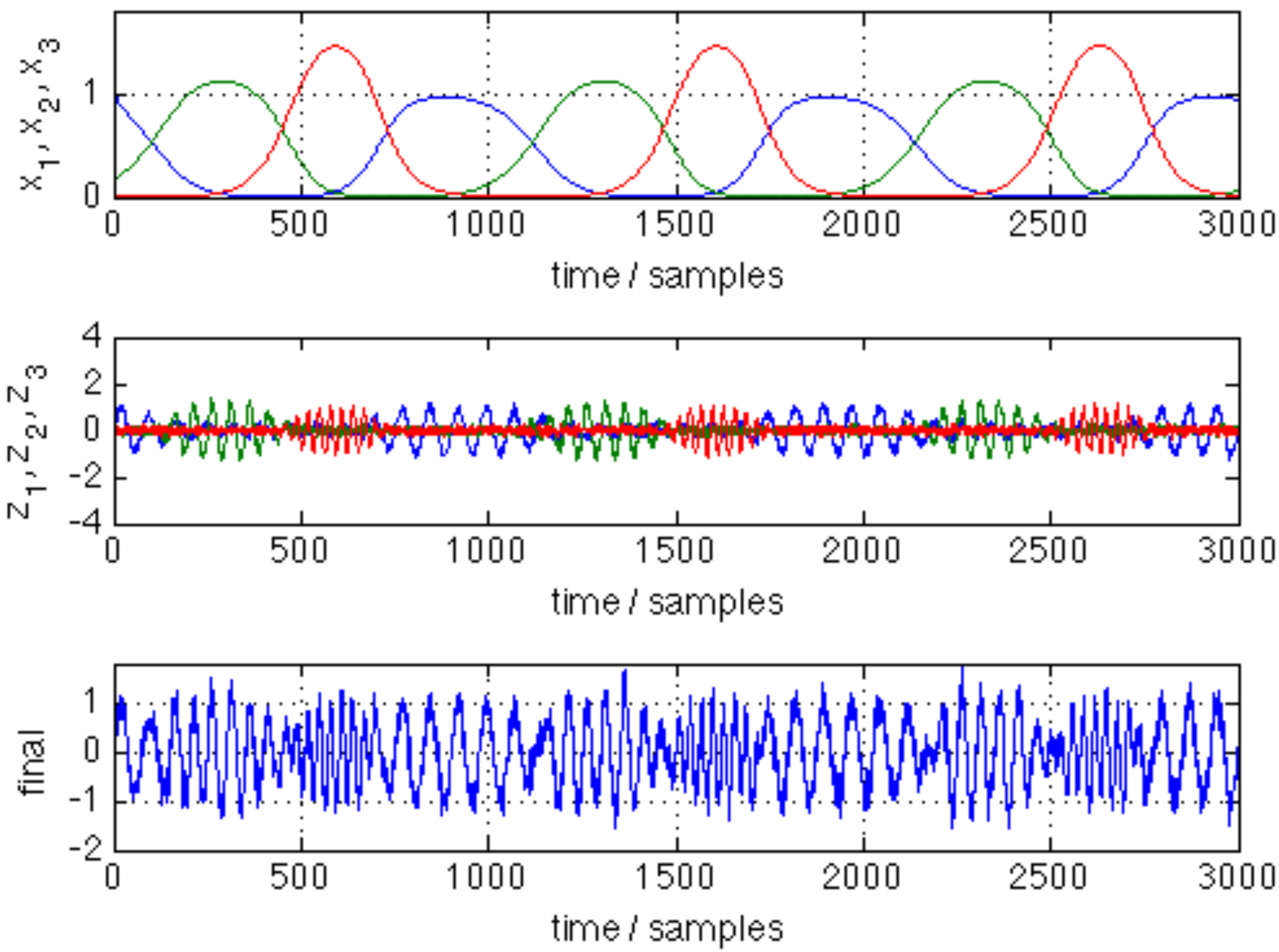


Powerspektrum



(Fourier_3.m)

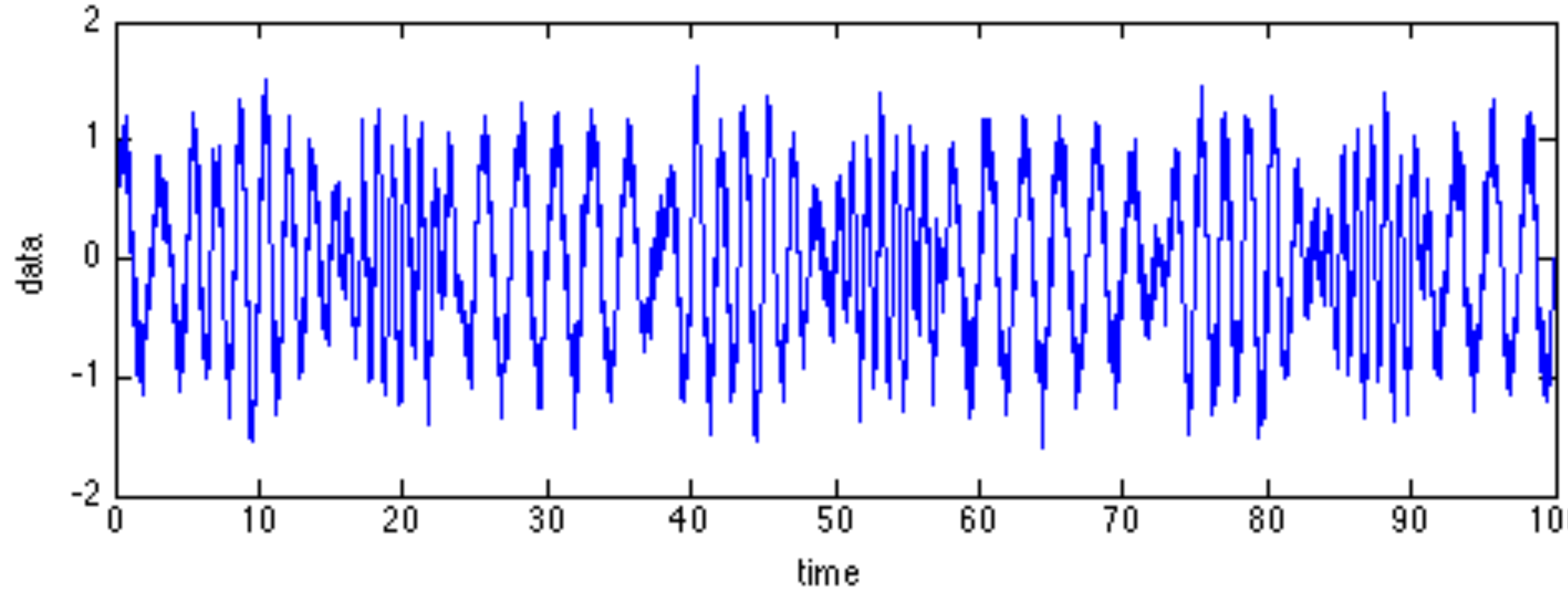
künstlicher Datensatz für spätere Untersuchungen



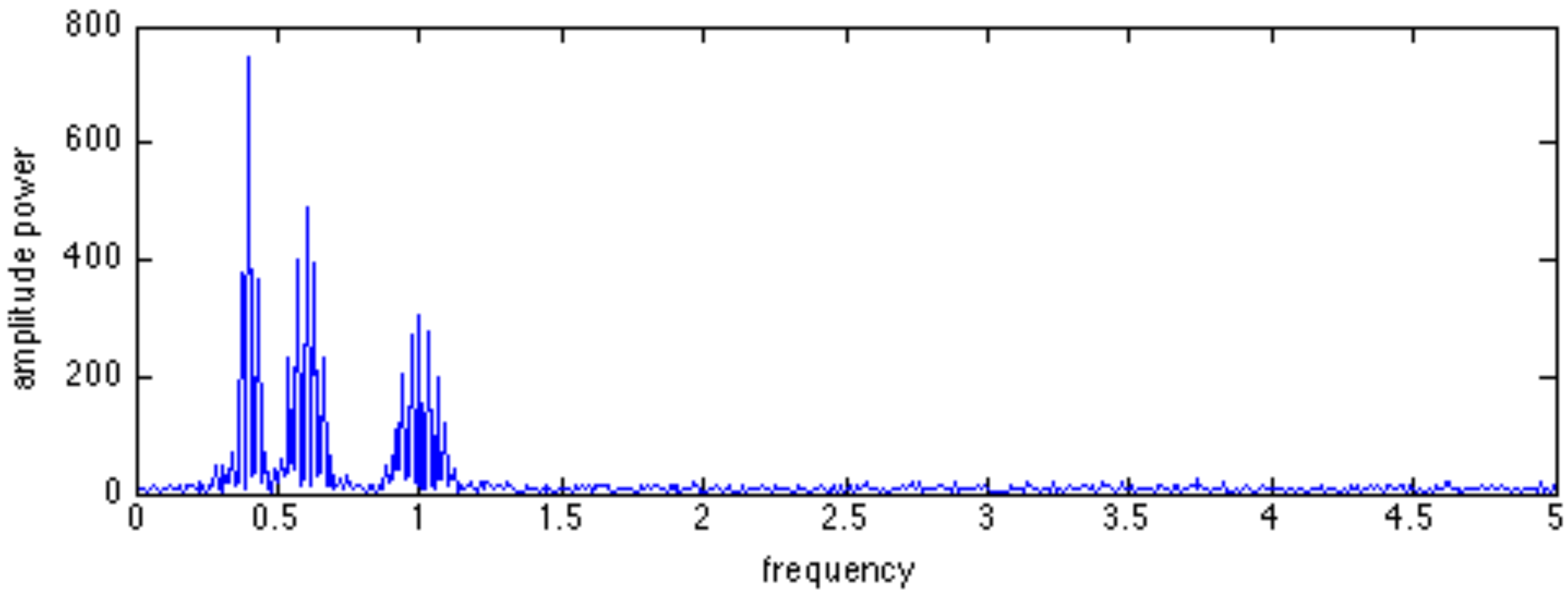
T=100s

Δt=0.033

Signal



Powerspektrum



(Fourier_5.m)

II. Fourier Analyse

II.1. Grundlagen

a) Koeffizienten

b) Fourier Theorem

II.2. Mögliche Fehler in der Fourier Analyse

Aliasing

Periodizität

Spectral leakage

II.3. Berechnung von Spektren

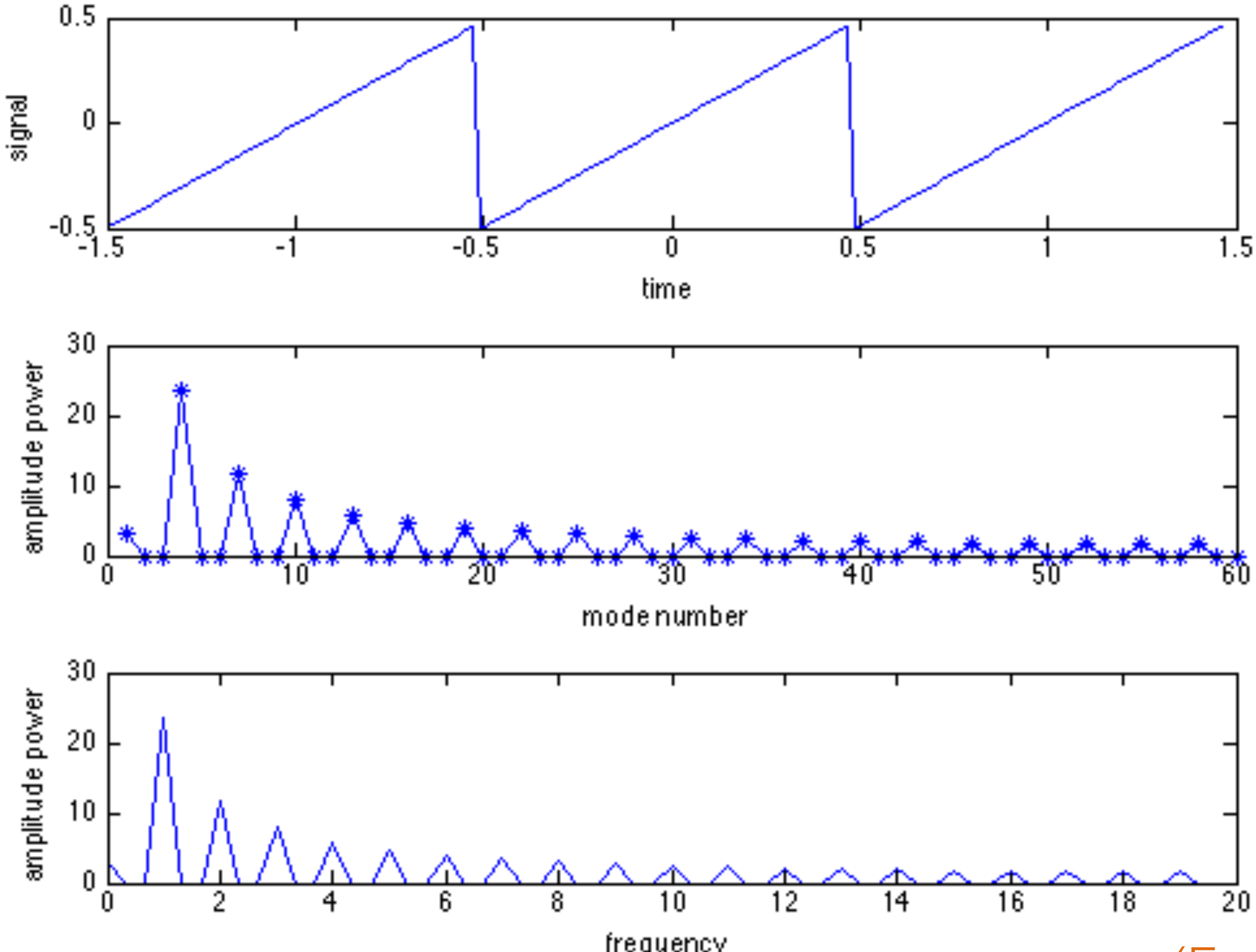
Fourier Theorem (J.B. Fourier, 1800):

Fast jedes periodische Signal

kann als eine lineare Superposition von

sinus- und cosinus Funktionen dargestellt werden.

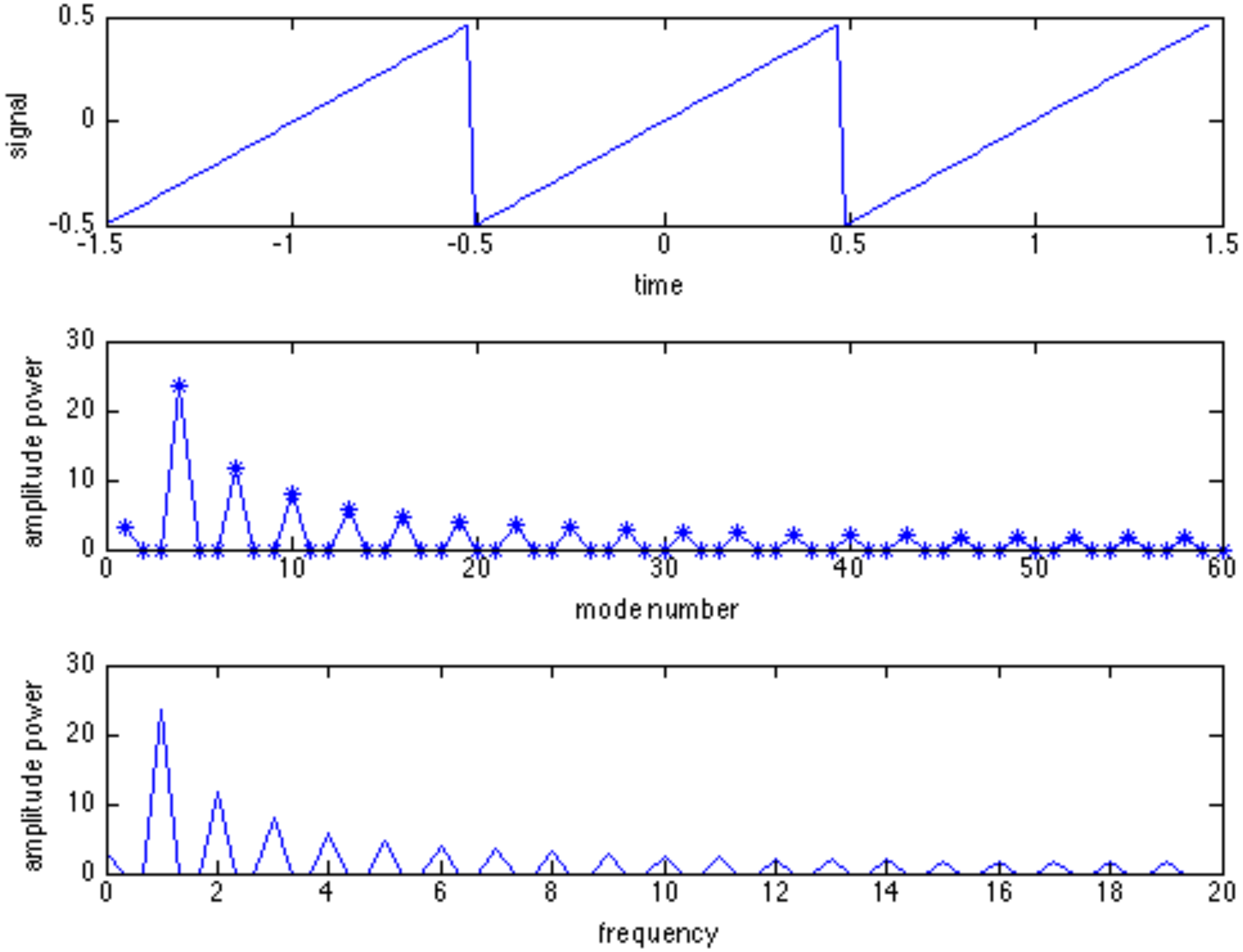
Beispiel:



M=150

Δt=0.02

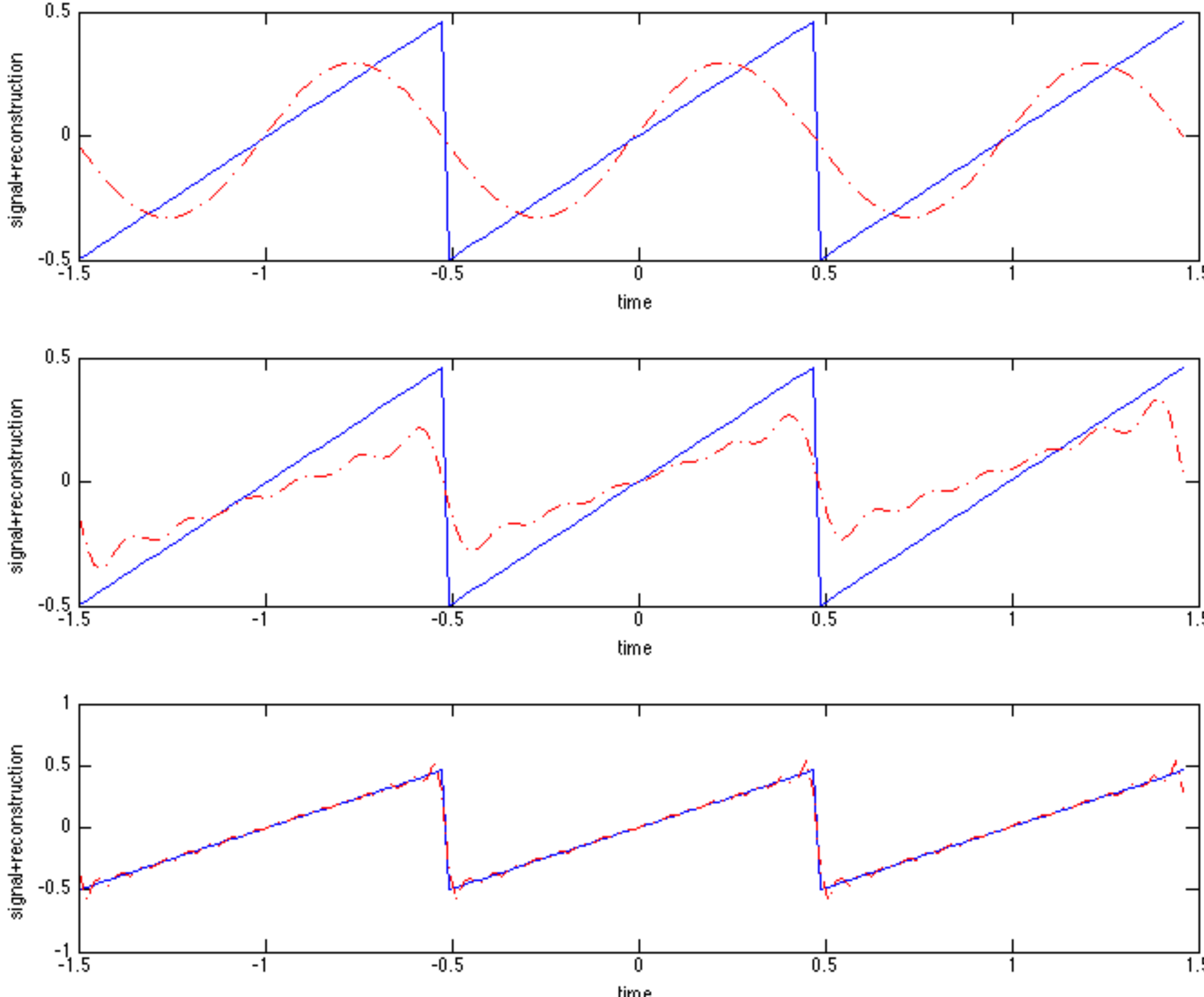
(Fourier_4.m)



- obwohl Sägezahn Frequenz 1Hz hat
  zeigt das Powerspektrum höhere Frequenzen

- Grund: Analyse *muss alle Ecken rekonstruieren*

Rekonstruktion eines Signals

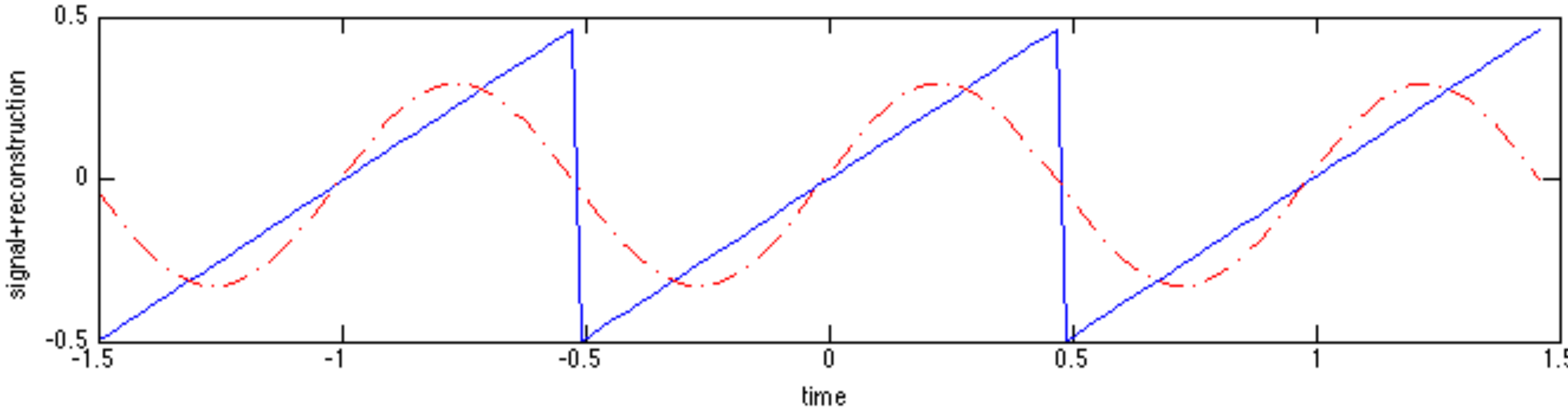


N=5 Moden

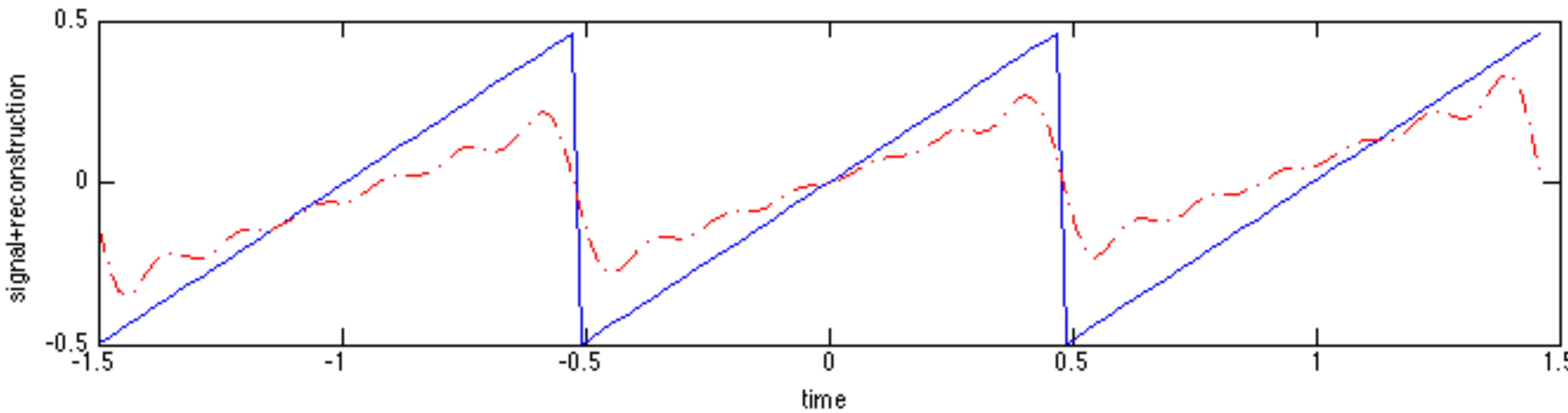
N=20 Moden

N=50 Moden

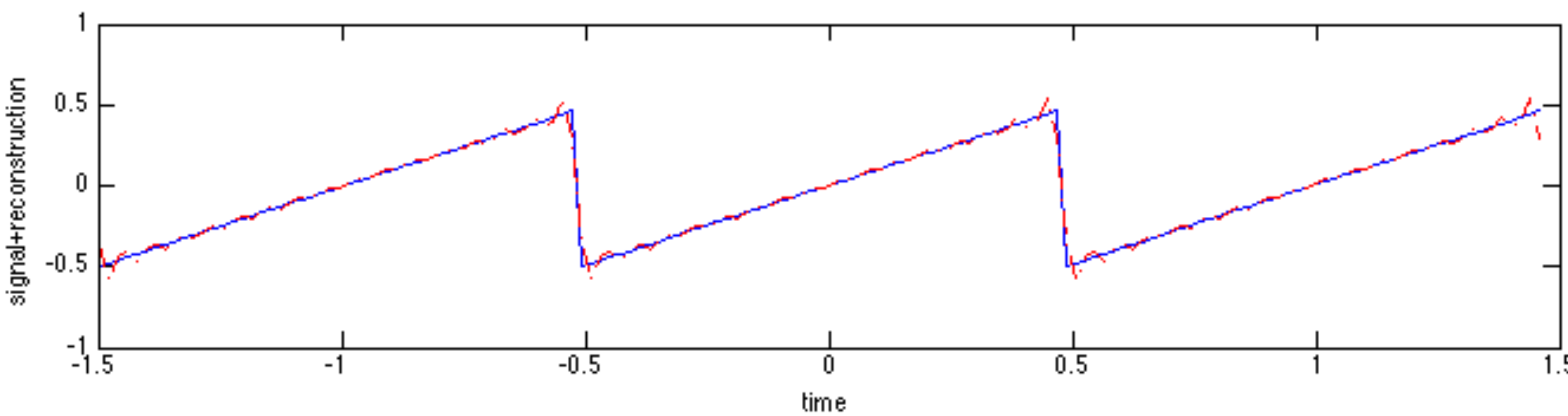
(Fourier_4.m)



N=5 Moden



N=20 Moden



N=50 Moden

um den Sägezahn gut aufzulösen muss man viele höheren Frequenzen berücksichtigen

II. Fourier Analyse

II.1. Grundlagen

a) Koeffizienten

b) Fourier Theorem

II.2. Mögliche Fehler in der Fourier Analyse

Aliasing

Periodizität

Spectral leakage

II.3. Berechnung von Spektren

Fourier transform

Fehler

a) $$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

zeitlich unbegrenzt,
zeit-kontinuierlich

b) $$X_s(f) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n}$$

zeitlich unbegrenzt,
zeit-diskret **aliasing**

c) $$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

zeitlich begrenzt
zeit-kontinuierlich

spectral leakage

d) $$X_s(f) = \Delta t \sum_{n=-M/2}^{M/2} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n}$$

zeitlich begrenzt,
zeit-diskret

a) $$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

zeitlich unbegrenzt,
zeit-kontinuierlich

Frage: was ist die inverse Fourier-Transformation ?

Ansatz: $$x(t) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} X(f') e^{i2\pi f' t} df'$$

$\longrightarrow$ bestimme $\mathcal{N}$

setze ein:

$$X(f) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f') e^{i2\pi f' t} e^{-i2\pi f t} df' dt$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} X(f') \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi (f' - f) t} dt \right] df'$$

....

$$\tau = 2\pi t$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} X(f') \underbrace{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(f'-f)\tau} d\tau \right]}_{= \delta(f'-f)} df'$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-\infty}^{\infty} X(f') \delta(f'-f) df'$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} X(f) \quad \rightarrow \mathcal{N} = 1$$

inverse Fourier-Transformation: $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f') e^{i2\pi f' t} df'$

<u>Frage</u>: wie transformiert sich eine **skalierte** Zeit/Frequenz und eine **Translation** in Zeit/Frequenz ?

$$\mathcal{F}[x(t)](\nu) = X(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi\nu t} dt$$

$$\mathcal{F}[x(at)](\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-i2\pi\nu t} dt \ , \ a \in \mathcal{R}$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau/a} d\tau \ , \ a \in \mathcal{R}$$

$$\mathcal{F}[x(at)]\,(\nu) = \frac{1}{a} \mathcal{F}[x] \left(\frac{\nu}{a} \right)$$

Frage: wie transformiert sich eine **skalierte** Zeit/Frequenz und eine **Translation** in Zeit/Frequenz ?

$$\mathcal{F}[x(t+b)](\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+b) e^{-i2\pi\nu t} dt \ , \ \ b \in \mathcal{R}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} e^{-i2\pi\nu b} d\tau$$

$$\mathcal{F}[x(t+b)](\nu) = \mathcal{F}[x](\nu) e^{-i2\pi\nu b}$$

Fourier transform

Fehler

a) $$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

zeitlich unbegrenzt
zeit-kontinuierlich

b) $$X_s(f) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n}$$

zeitlich unbegrenzt,
zeit-diskret **aliasing**

c) $$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

zeitlich begrenzt
zeit-kontinuierlich

spectral leakage

d) $$X_s(f) = \Delta t \sum_{n=-M/2}^{M/2} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n}$$

zeitlich begrenzt,
zeit-diskret

Sampling-Effekt auf Fourier Transformation - **aliasing**

gegeben: **unendlich lange** *abgetastete* Zeitserie

$$t_n = n\Delta t \longleftrightarrow f_s = 1/\Delta t$$

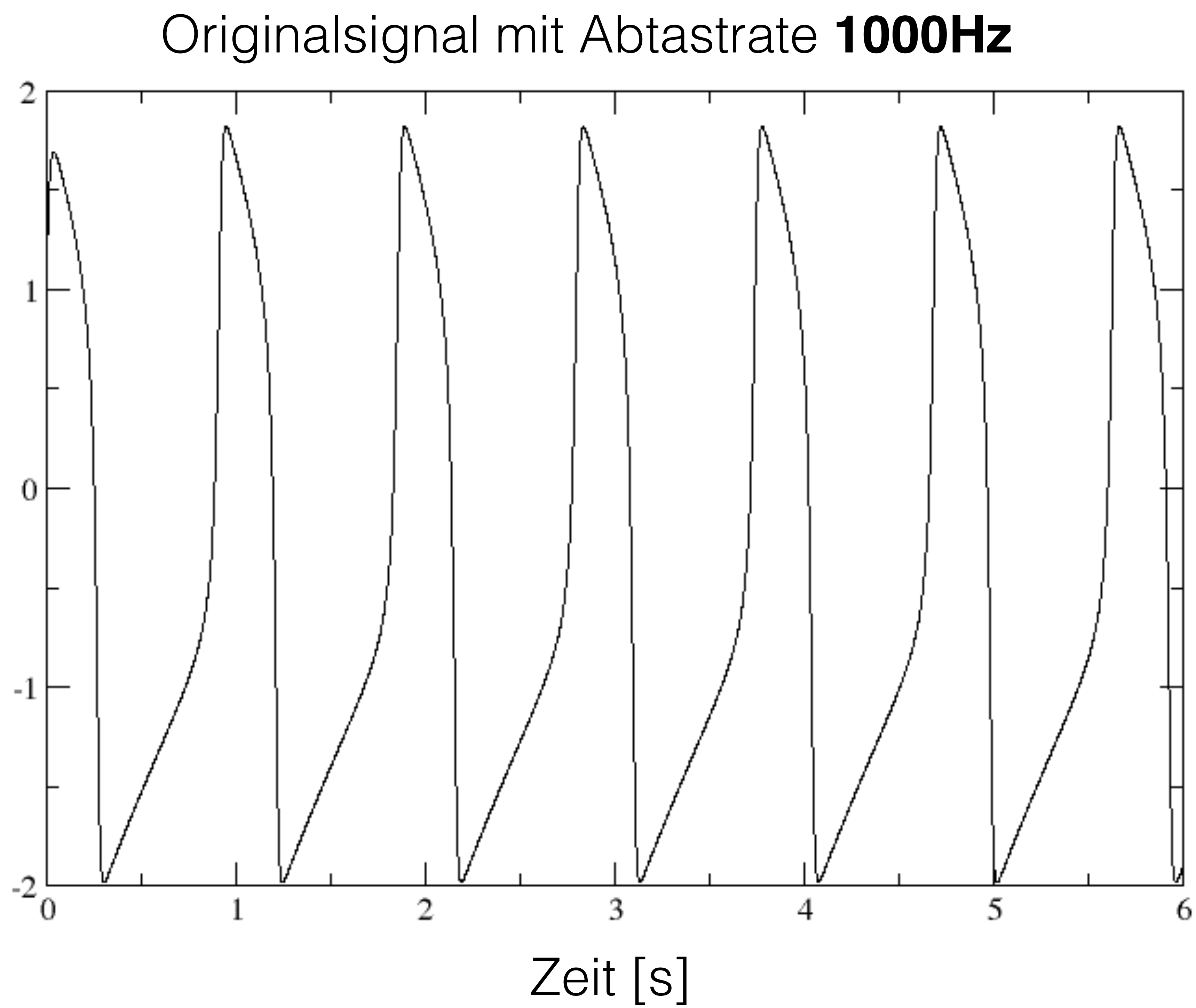
Abtastrate

$$\longrightarrow \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dt \, \cdot \to \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cdot$$

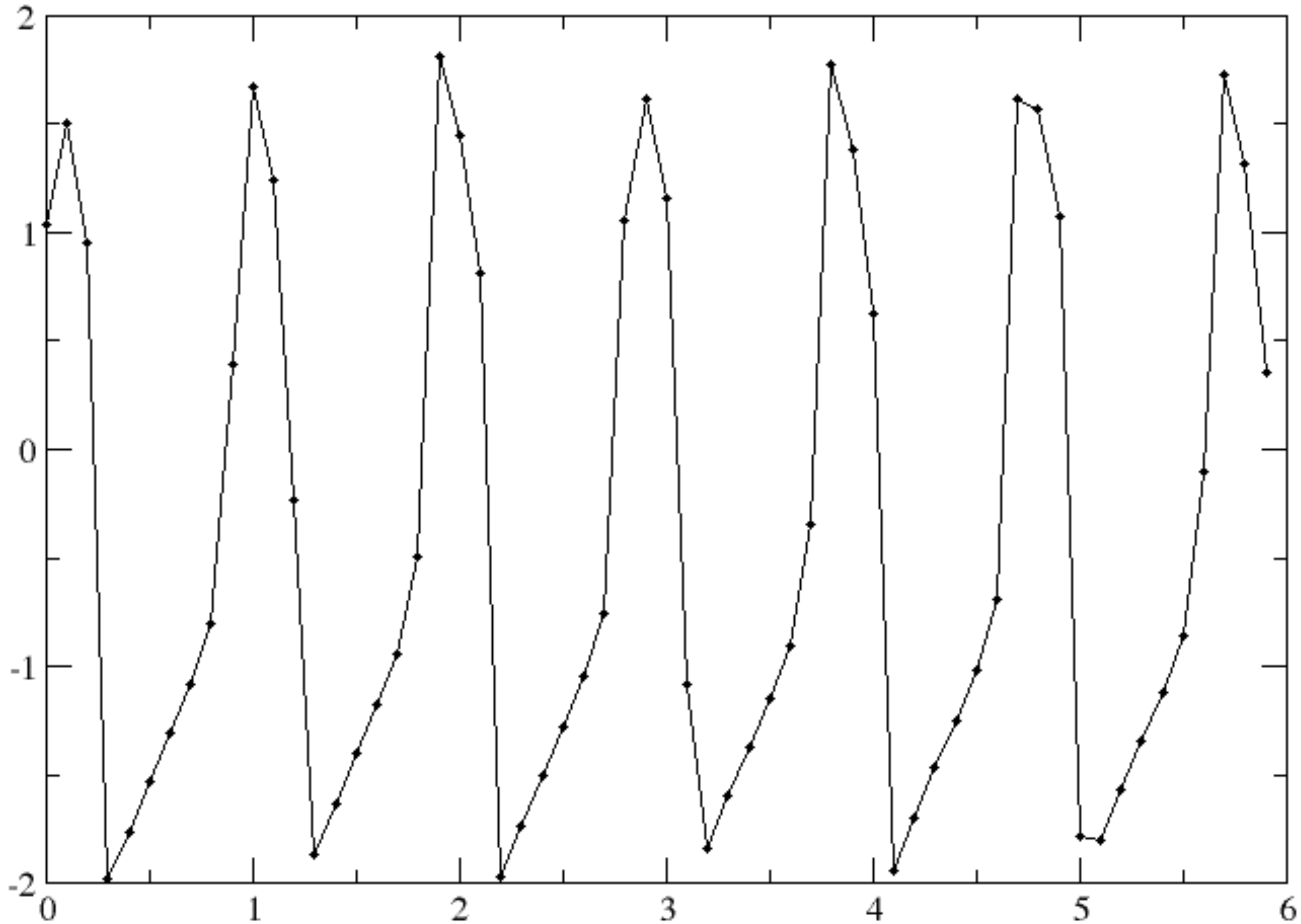
$$\longrightarrow \qquad X_s(f) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n}$$

Discrete Time Fourier Transform (DTFT)

Beispiel

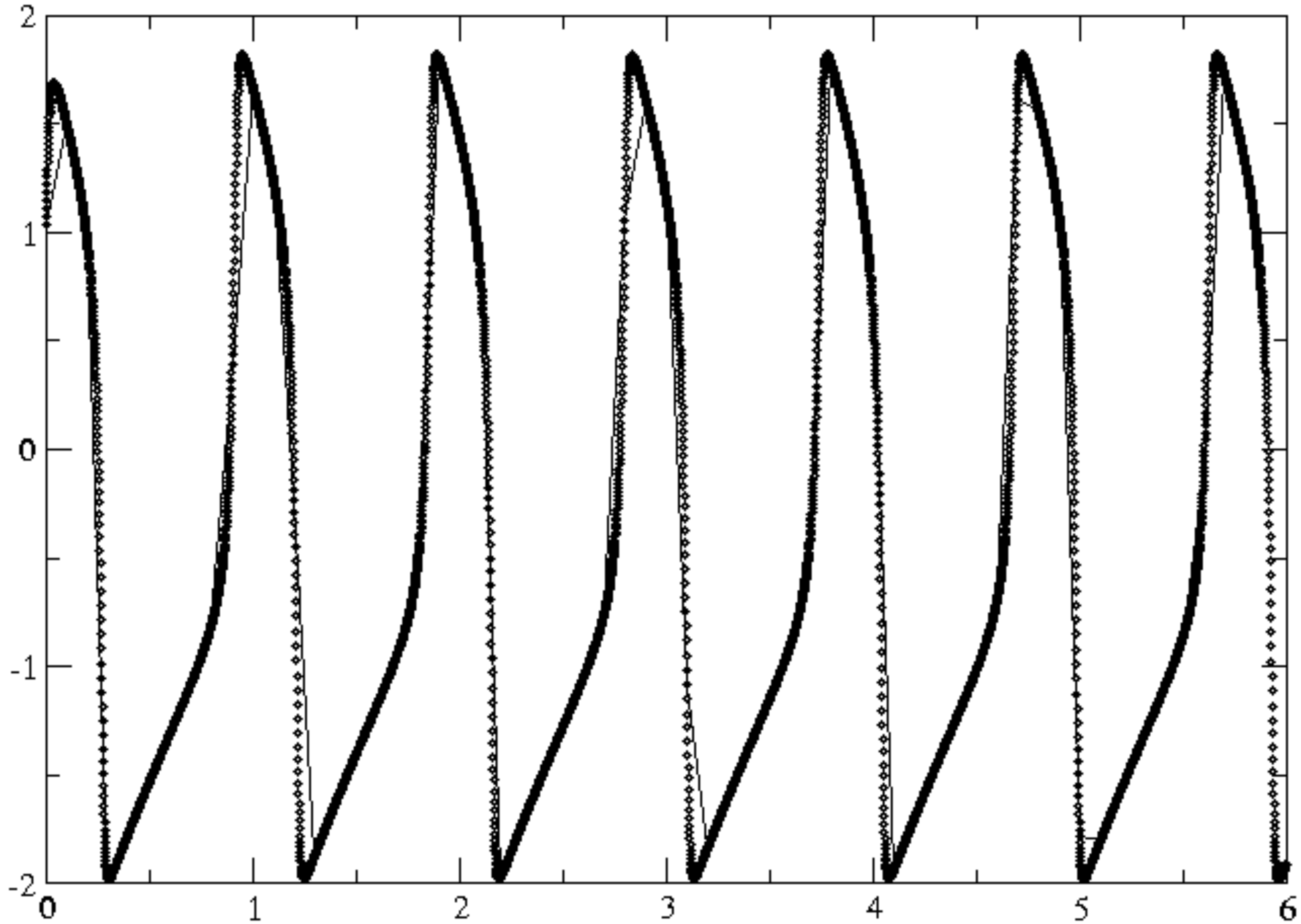

Originalsignal mit Abtastrate **1000Hz**
2
1
0
-1
-2
0
1
2
3
4
5
6
Zeit [s]

Abtastrate **10Hz**



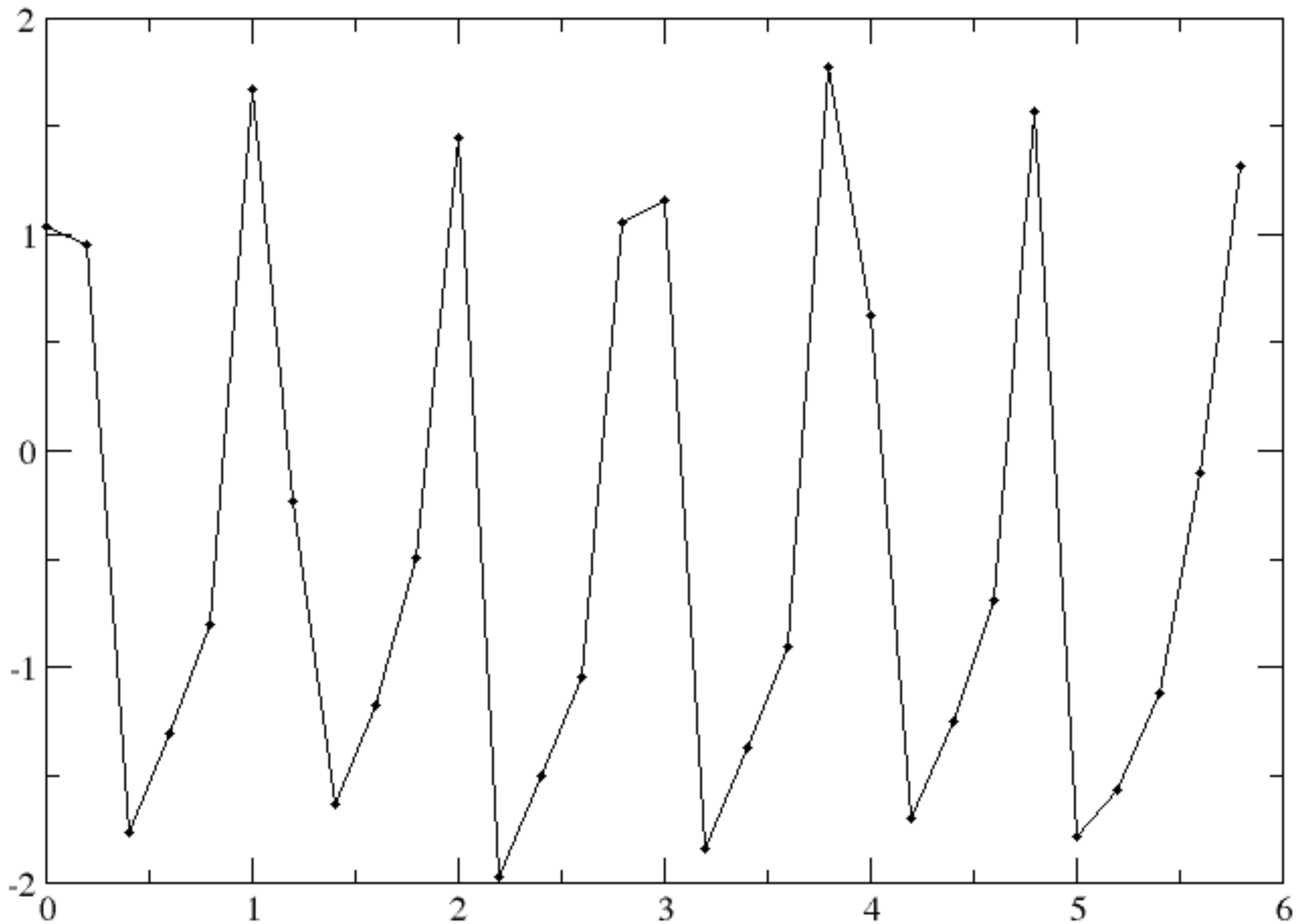
Zeit [s]

Abtastrate **1000Hz** und **10Hz**



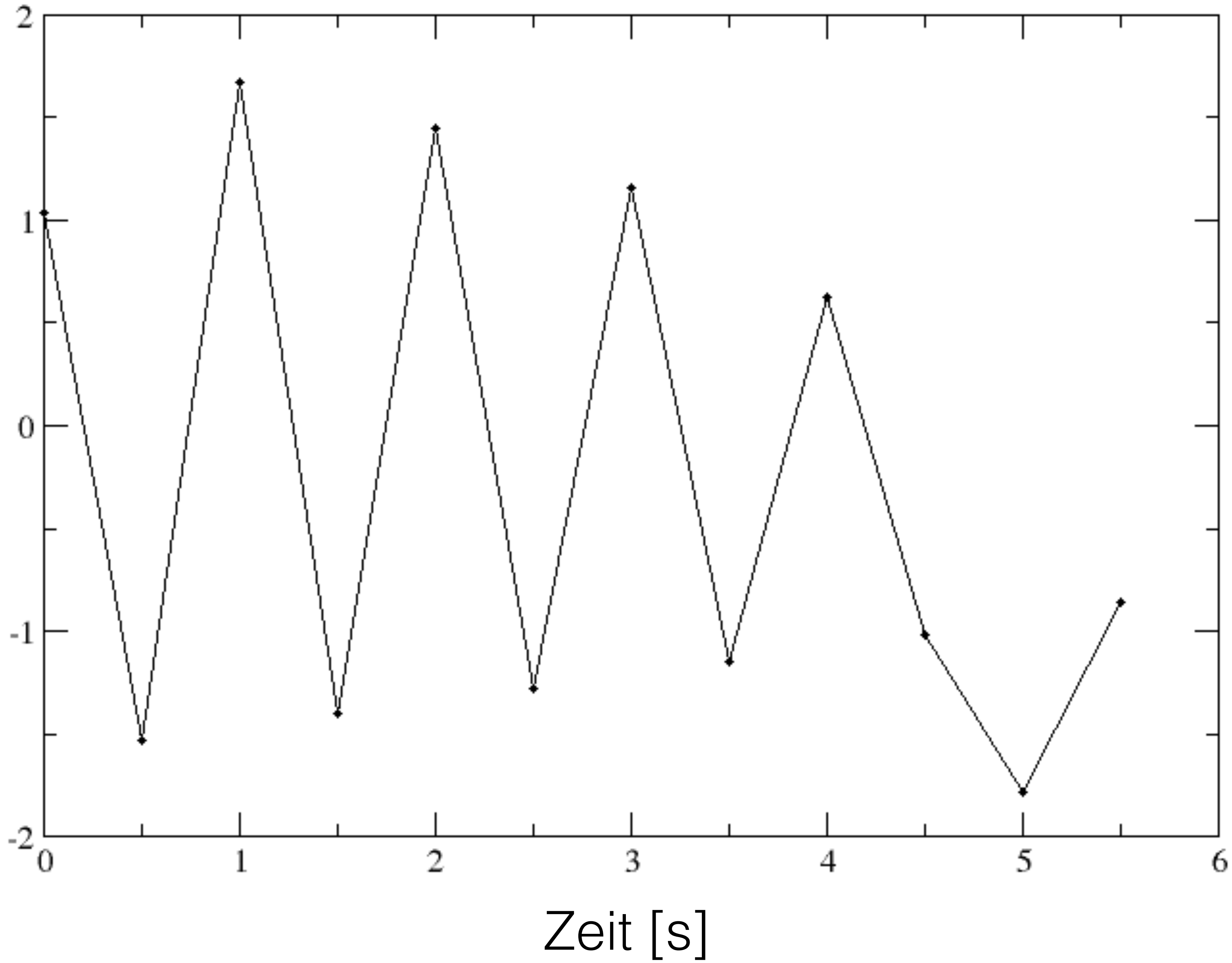
Zeit [s]

Abtastrate **5Hz**



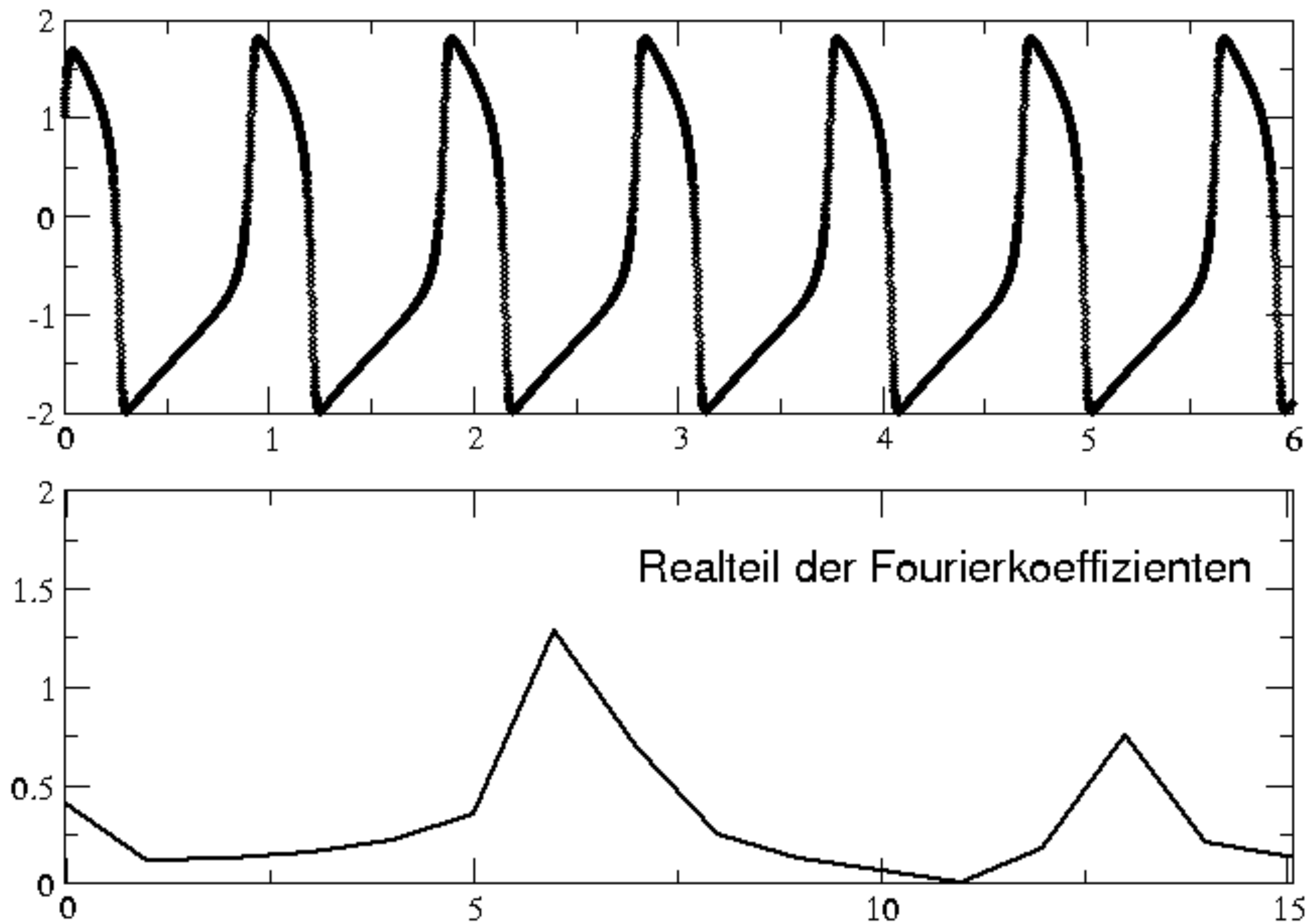
Zeit [s]

Abtastrate **2Hz**



Fourier-Transformation

Abtastrate **1000Hz**



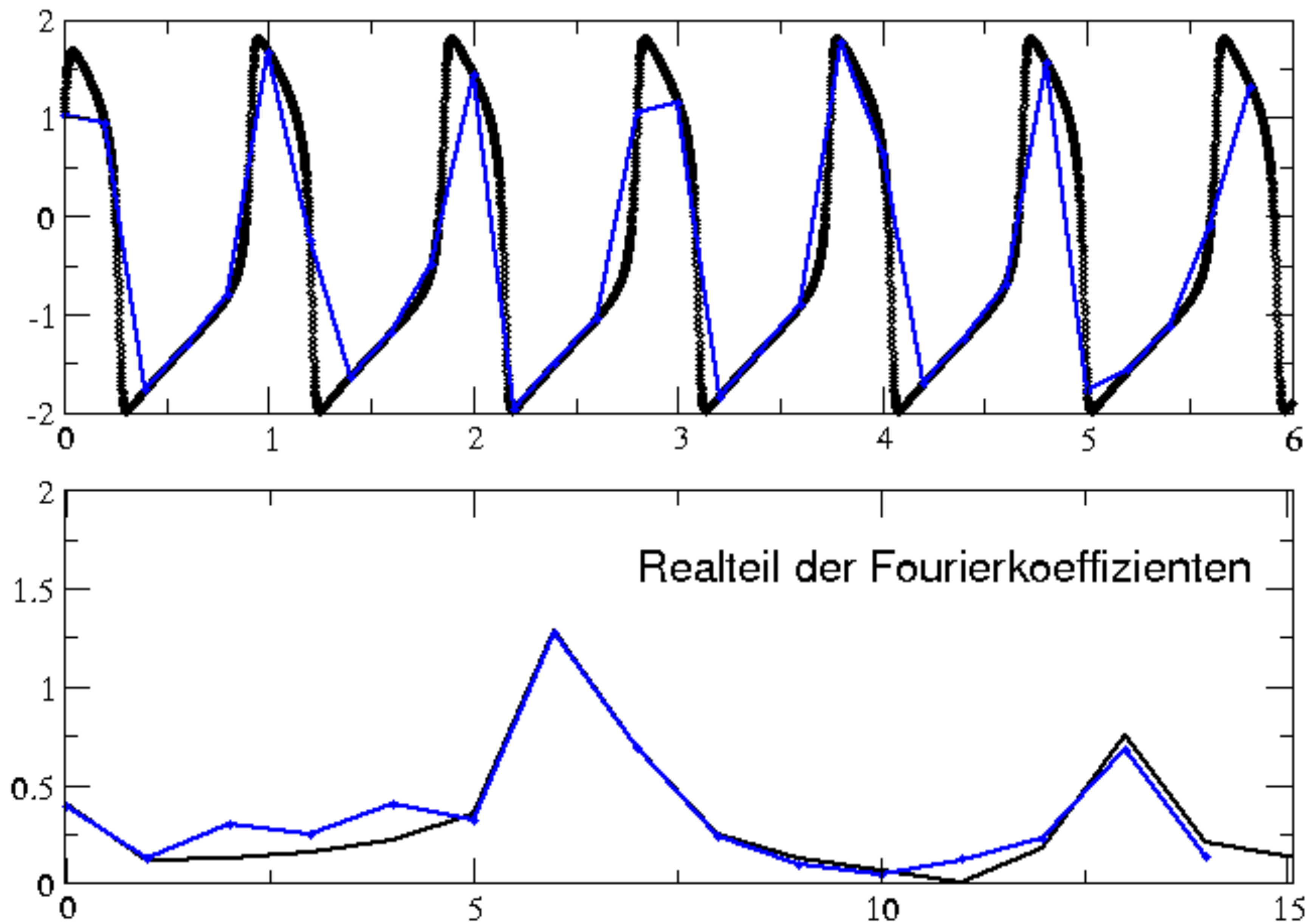
Mode

T=6s ⟶ Δf=0.166Hz

Δt=0.001s ⟶ N=6000

Fourier-Transformation

Abtastrate **5Hz**

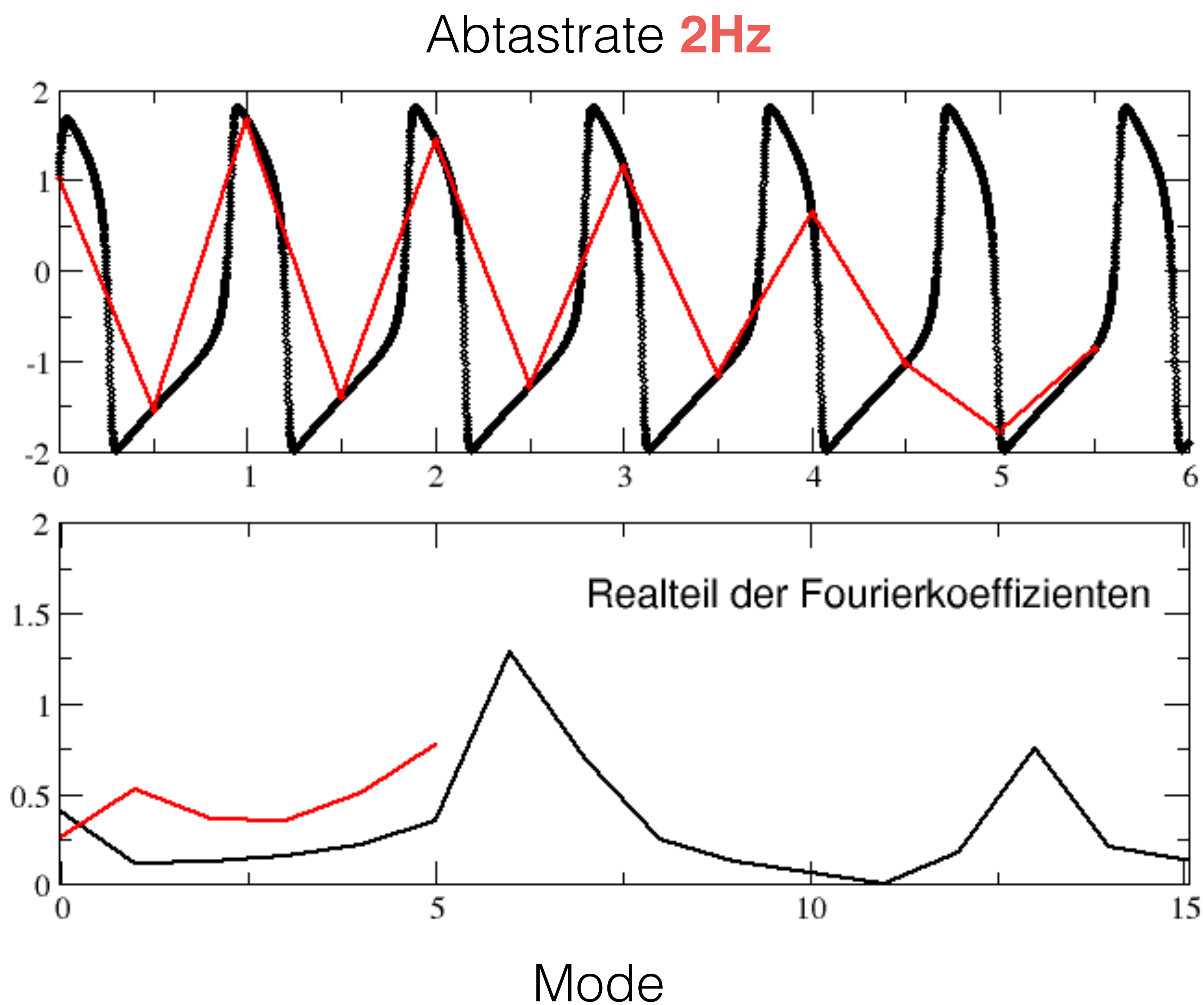


Mode

T=6s ⟶ Δf=0.166Hz

Δt=0.2s ⟶ N=30

Fourier-Transformation

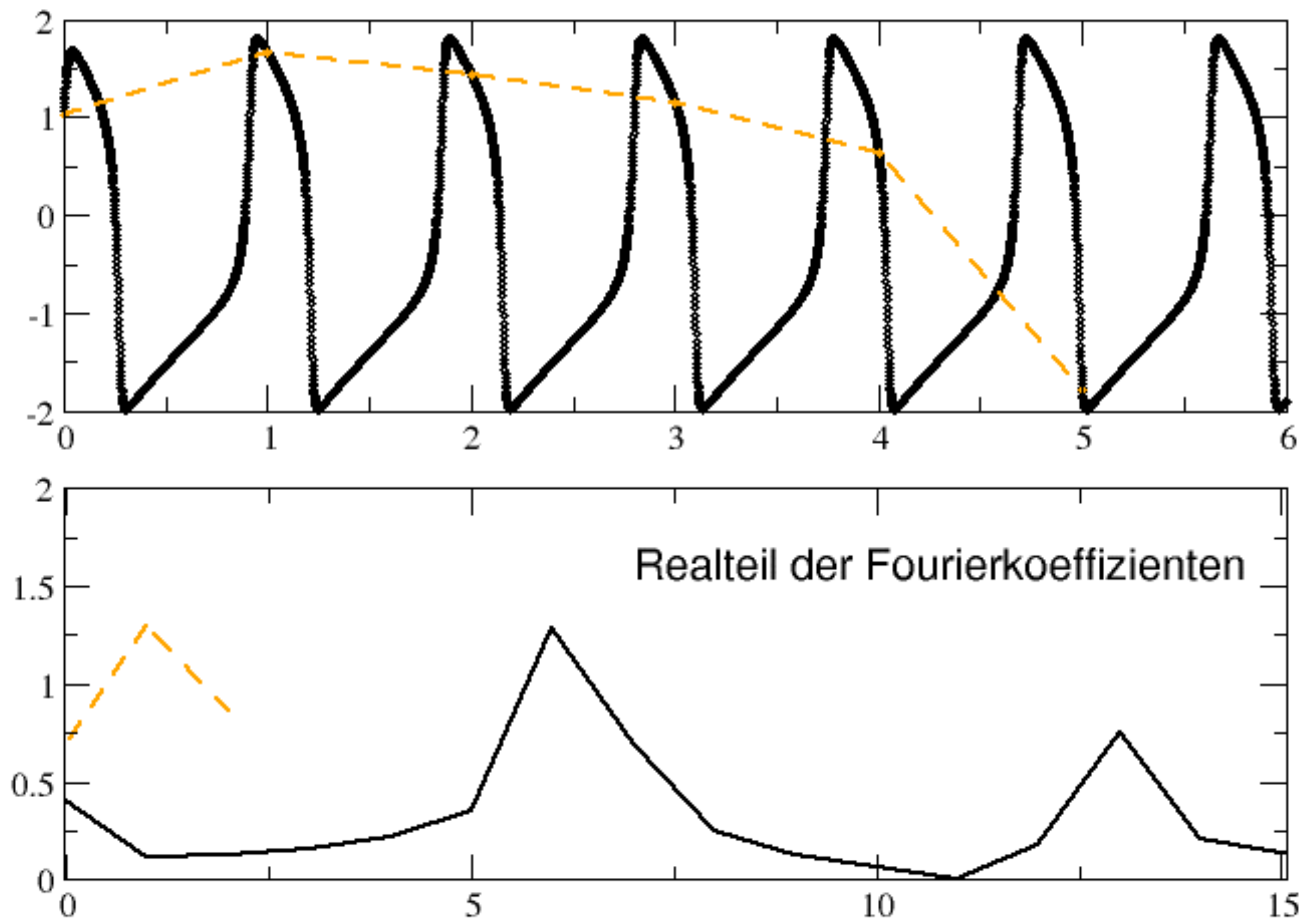


T=6s ⟶ Δf=0.166Hz

Δt=0.5s ⟶ N=12

Fourier-Transformation

Abtastrate **1Hz**



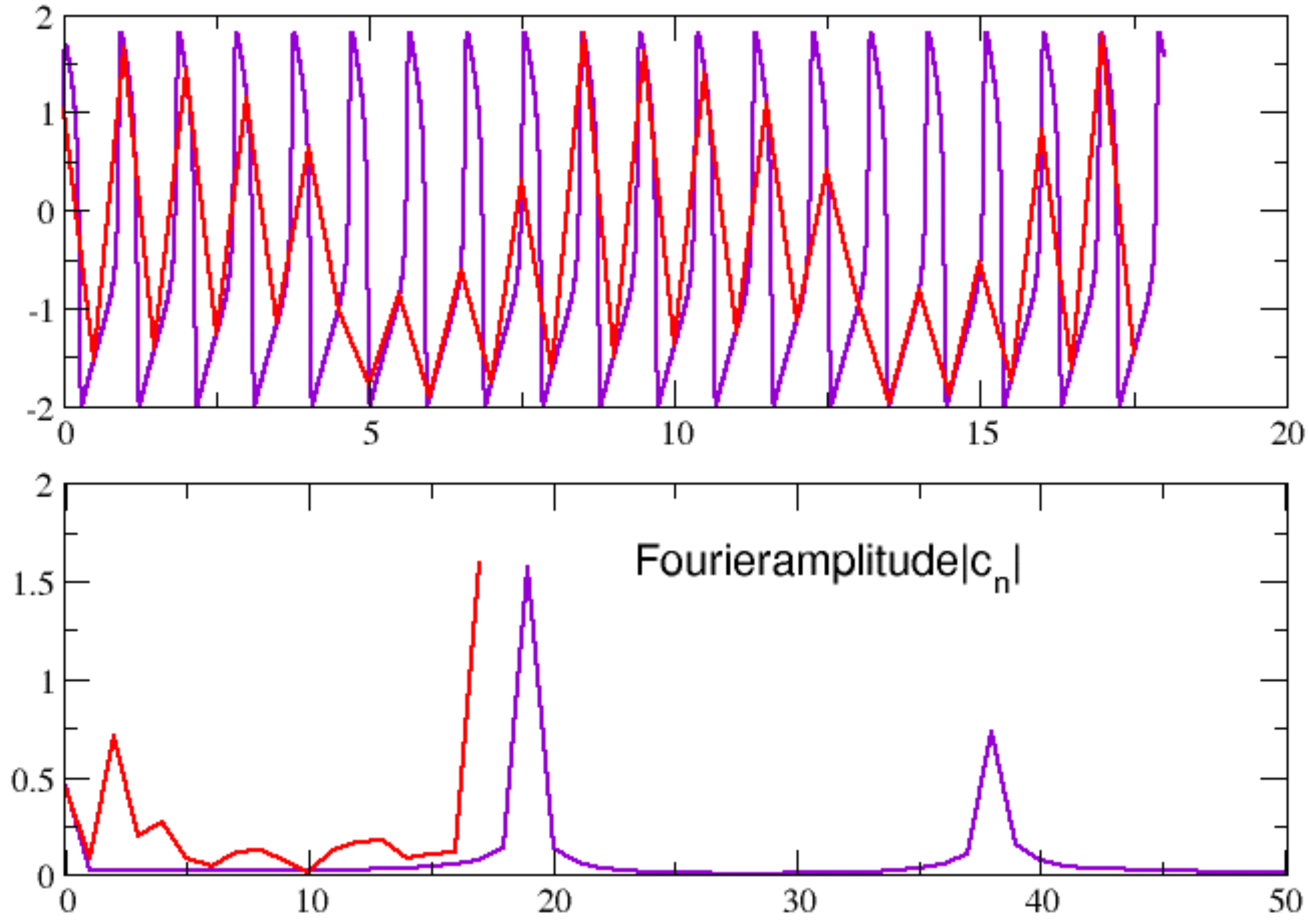
Mode

T=6s ⟶ Δf=0.166Hz

Δt=1s ⟶ N=6

longer time series

Abtastrate **2Hz**



Mode

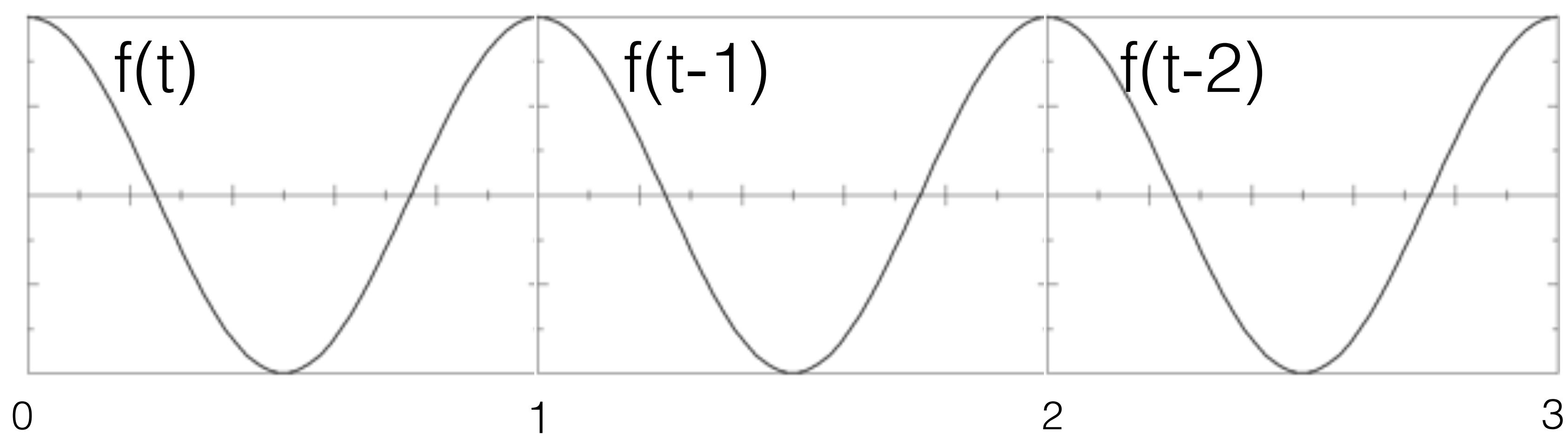
T=18s ⟶ Δf=(1/18)Hz Δt=0.5s ⟶ N=36

Einschub: Poisson Summenformel

$$g(t) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} f(t+n)$$

(f: periodisch mit Periode 1)

Beispiel:



$$g(t) = \sum_{k \in \mathcal{Z}_0} c_k e^{i2\pi kt/T} \; , \; T = 1$$

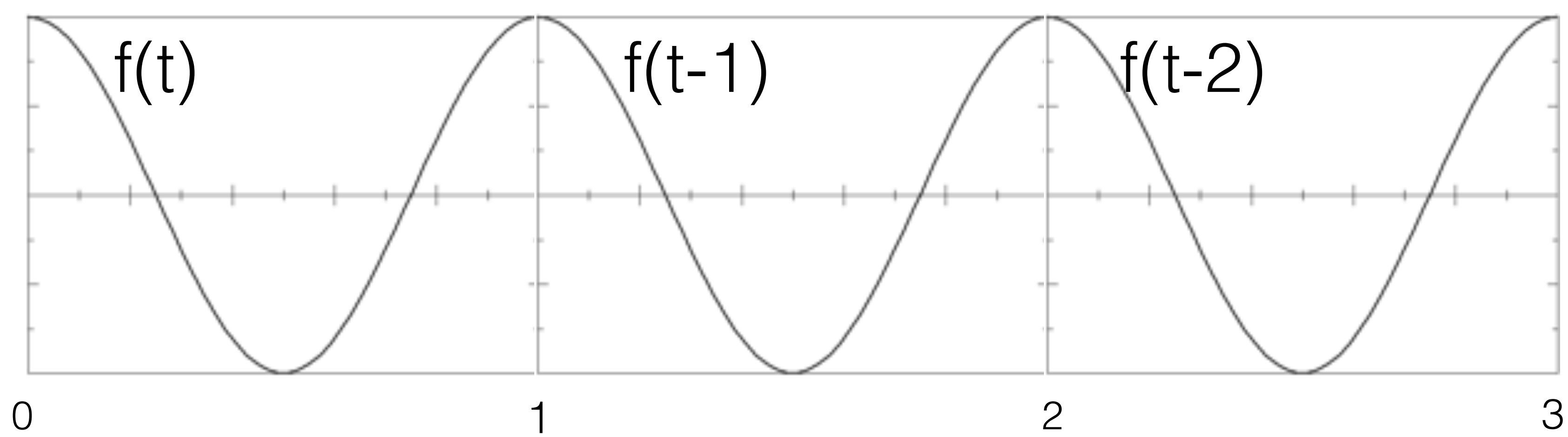
$$c_k = \int_0^T g(t) e^{-i2\pi kt/T} dt$$

Einschub: Poisson Summenformel

$$g(t) = \sum_{n \in \mathcal{Z}} f(t+n)$$

(f: periodisch mit Periode 1)

Beispiel:



$$g(t) = \sum_{k \in \mathcal{Z}_0} c_k e^{i2\pi kt/T} \;,\; T = 1$$

$$c_k = \int_0^T g(t) e^{-i2\pi kt/T} dt$$

$$= \int_0^T \sum_{n \in \mathcal{Z}} f(t+n) e^{-i2\pi kt/T} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{n \in \mathcal{Z}} f(t+n) e^{-i2\pi kt} \underbrace{e^{-i2\pi kn}}_{=1} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{n \in \mathcal{Z}} f(t+n) e^{-i2\pi k(t+n)} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{n \in \mathcal{Z}} f(t+n) e^{-i2\pi kt} \underbrace{e^{-i2\pi kn}}_{=1} dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{n \in \mathcal{Z}} f(t+n) e^{-i2\pi k(t+n)} dt$$

$$s = t + n$$

$$= \sum_{n \in \mathcal{Z}} \int_n^{n+1} f(s) e^{-i2\pi ks} ds$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-i2\pi ks} ds$$

$$= X(k)$$

$$\rightarrow g(t) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} X(k) e^{i2\pi kt} = \sum_{n \in \mathcal{Z}} f(t+n)$$

$$t = 0: \quad \rightarrow \quad \boxed{\sum_{n \in \mathcal{Z}} f(n) = \sum_{k \in \mathcal{Z}} X(k)}$$

Poisson Summenformel

falls x(t) eine Schwartz-Funktion ist,

also $x(t) \in \mathcal{S}$ mit

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) := \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta \phi(x)| < \infty \right\}$$

$$= \left\{ \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,\middle|\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n, \exists C \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n : |x^\alpha D^\beta \phi(x)| \leq C \right\} .$$

es gilt (siehe Übungen für Beweis):

$$\sum_{n\in\mathcal{Z}} X(f+nf_s) = \sum_{k\in\mathcal{Z}} \frac{1}{f_s} x\left(\frac{k}{f_s}\right) e^{-i2\pi kf/f_s}$$

$$f_s = \frac{1}{\Delta t}$$

$$\rightarrow \quad = \sum_{k\in\mathcal{Z}} \Delta t \; x(k\Delta t) e^{-i2\pi fk\Delta t}$$

$$= \Delta t \sum_{k\in\mathcal{Z}} \; x(t_k) e^{-i2\pi f t_k} \qquad \text{(DTFT)}$$

$$= \Delta t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\sum_{k\in\mathcal{Z}} \delta(t-t_k)\; x(t)}_{\text{abgetastetes Signal}} \right) e^{-i2\pi f t}\; dt$$

$$= \Delta t \ \mathcal{F}\left[\sum_{k \in \mathcal{Z}} \delta(t - t_k) \ x(t)\right]$$

$$\rightarrow \quad \boxed{\mathcal{F}\left[\sum_{k \in \mathcal{Z}} \delta(t - t_k) \ x(t)\right] = \frac{1}{\Delta t} \sum_{n \in \mathcal{Z}} X(f + n f_s)}$$

Fouriertransformierte von abgetastetem Signal

ist periodisch in Abtastfrequenz

also:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k f_s)$$

Discrete-time Fourier Transform (DTFT)

kont. Fouriertransformation

$$t_n = n\Delta t$$

$$f_s = 1/\Delta t$$

also:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k f_s)$$

kont. Fouriertransformation

Discrete-time Fourier Transform
(DTFT)

$$t_n = n\Delta t$$

$$f_s = 1/\Delta t$$

Zeitdiskretisierung erzeugt periodische Fortsetzung
im Frequenzraum

also:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k f_s)$$

Discrete-time Fourier Transform (DTFT)

kont. Fouriertransformation

$$t_n = n\Delta t$$

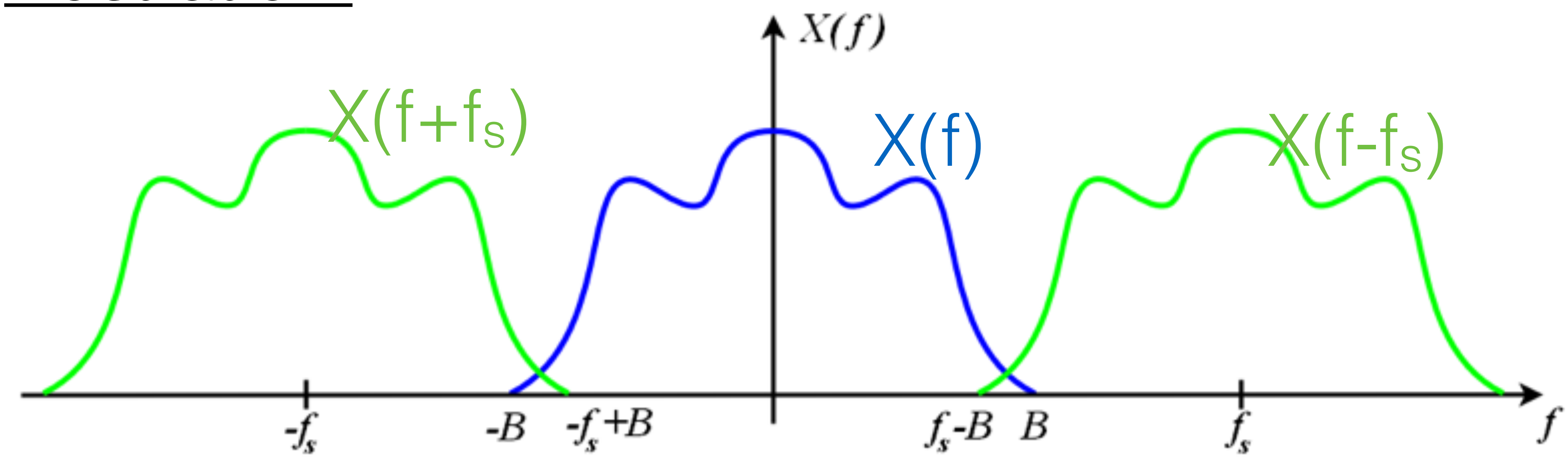
$$f_s = 1/\Delta t$$

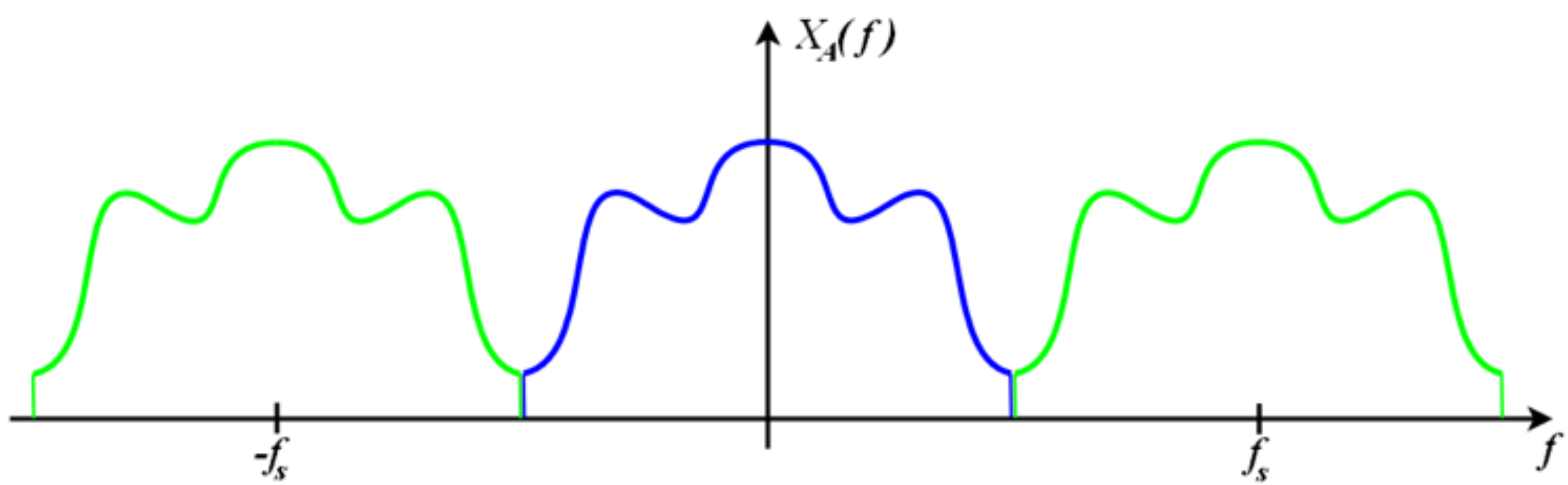
Zeitdiskretisierung erzeugt periodische Fortsetzung im Frequenzraum

kann Fehler erzeugen (aliasing) !!!

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n)e^{-i2\pi f t_n} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s)$$

Illustration:





Beispiel

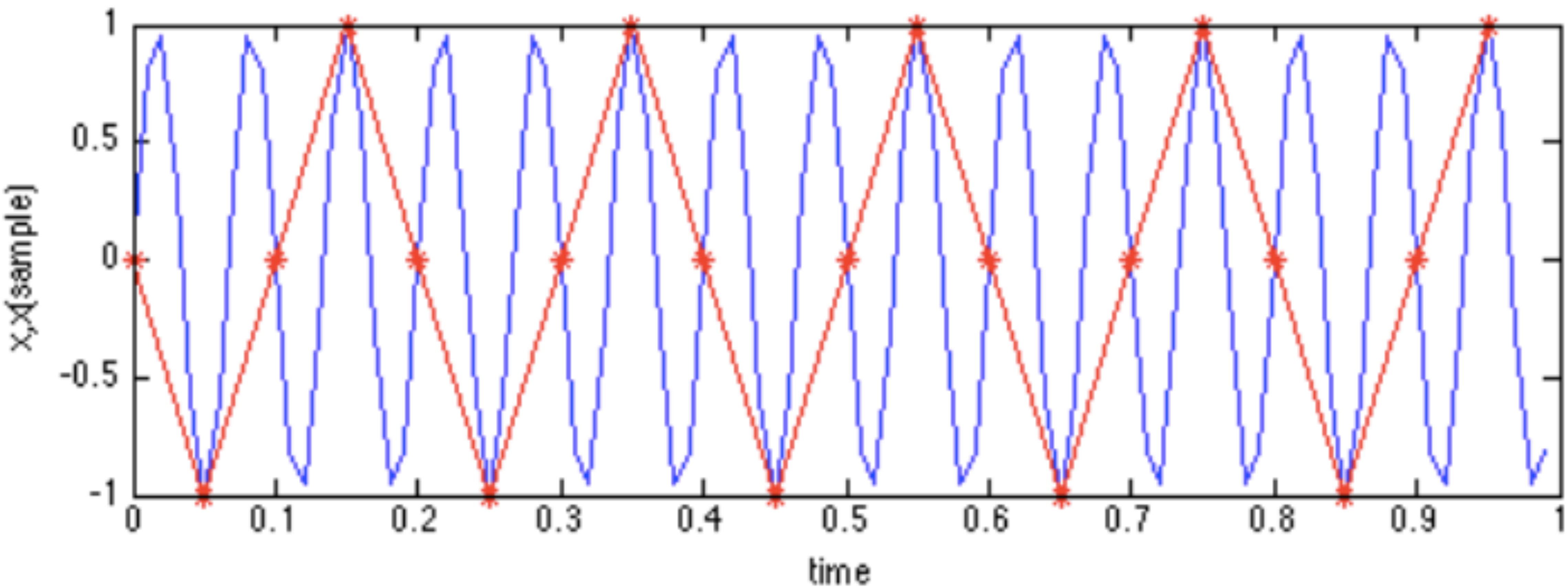
Originalsignal:

15Hz

abgetastetes Signal

sample rate: 20Hz, Nyquist: 10Hz

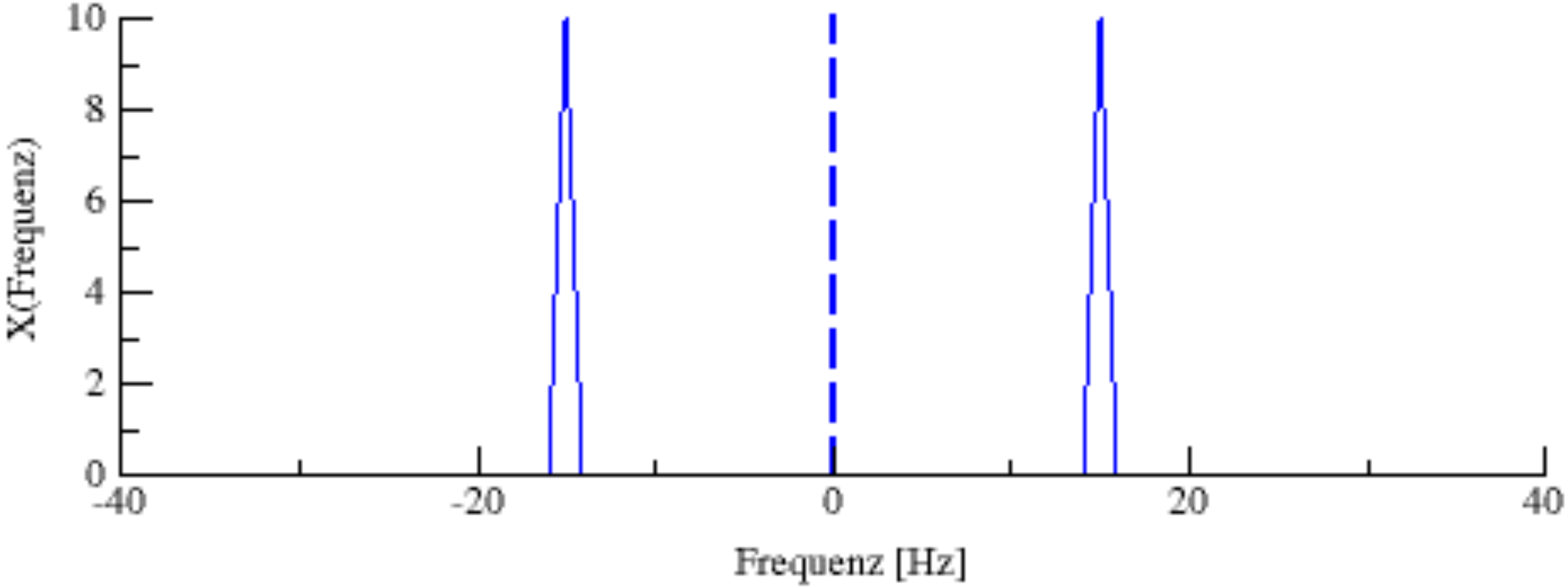
$\xrightarrow{?}$ 5Hz Oszillation



[Originalsignal:](#) [abgetastetes Signal](#)

15Hz

sample rate: 20Hz, Nyquist: 10Hz



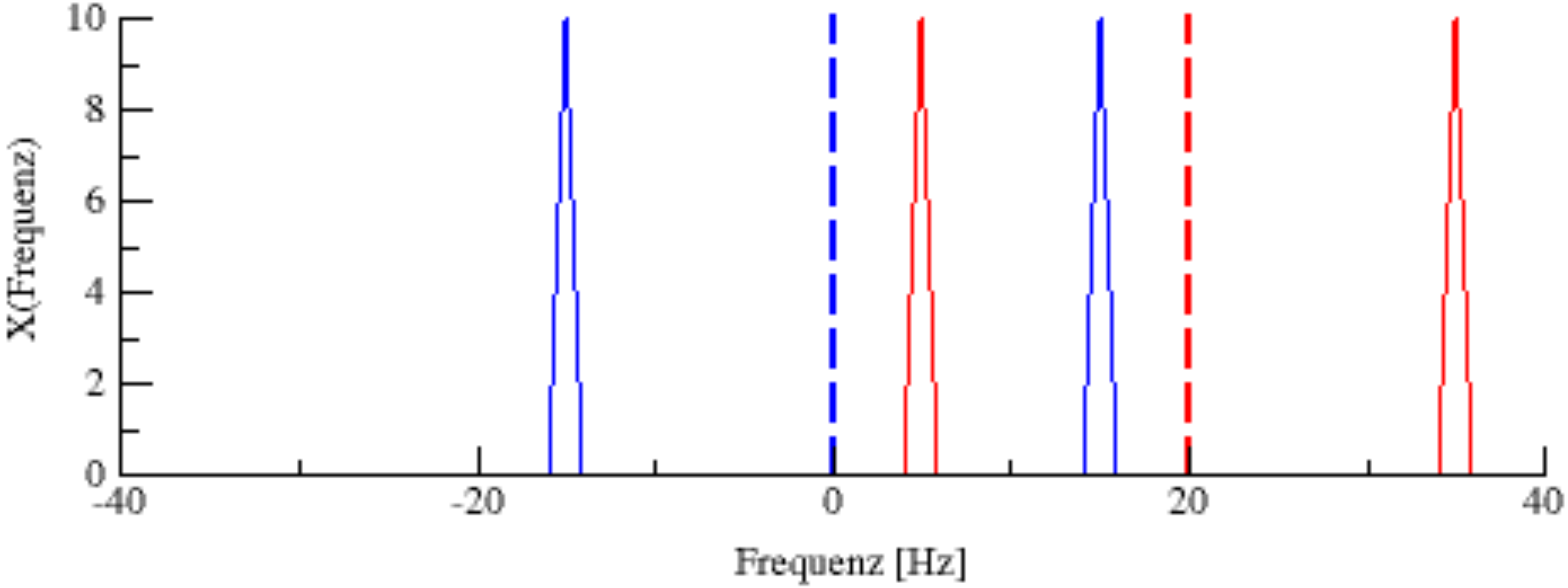
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n)e^{-i2\pi f t_n} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - kf_s)$$

Originalsignal:

abgetastetes Signal

15Hz

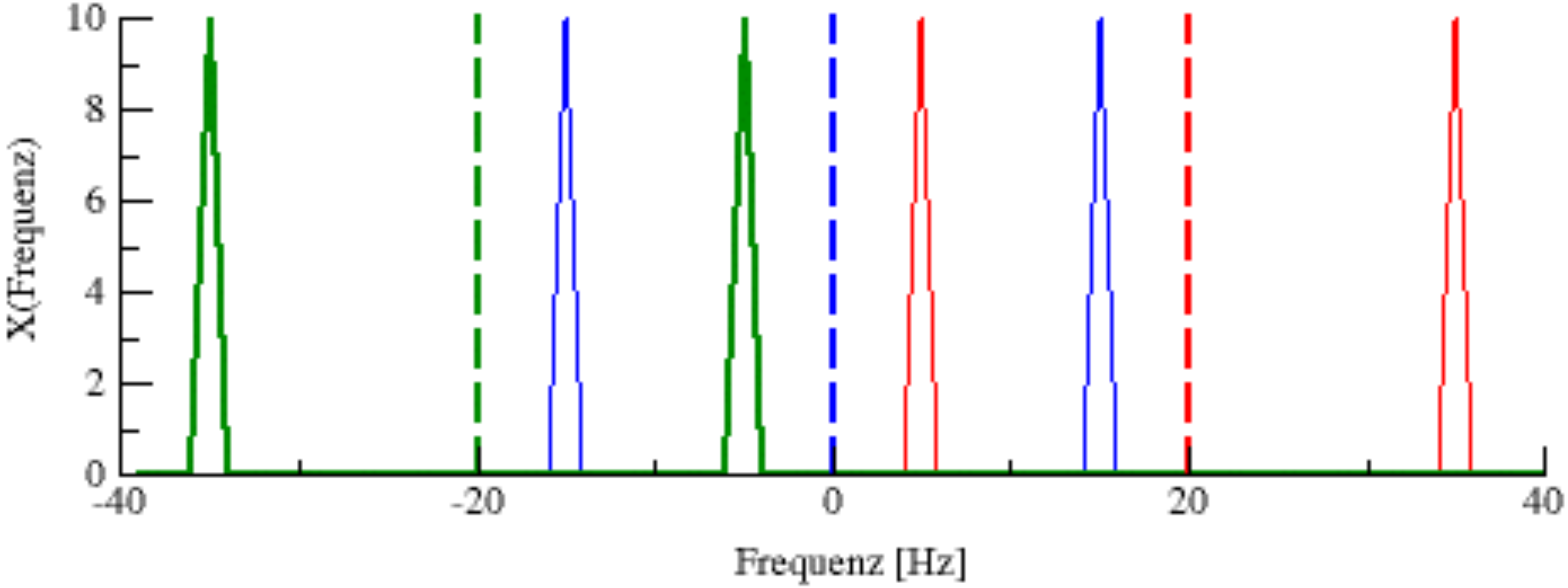
sample rate: 20Hz, Nyquist: 10Hz



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k f_s)$$

Originalsignal: abgetastetes Signal

15Hz sample rate: 20Hz, Nyquist: 10Hz



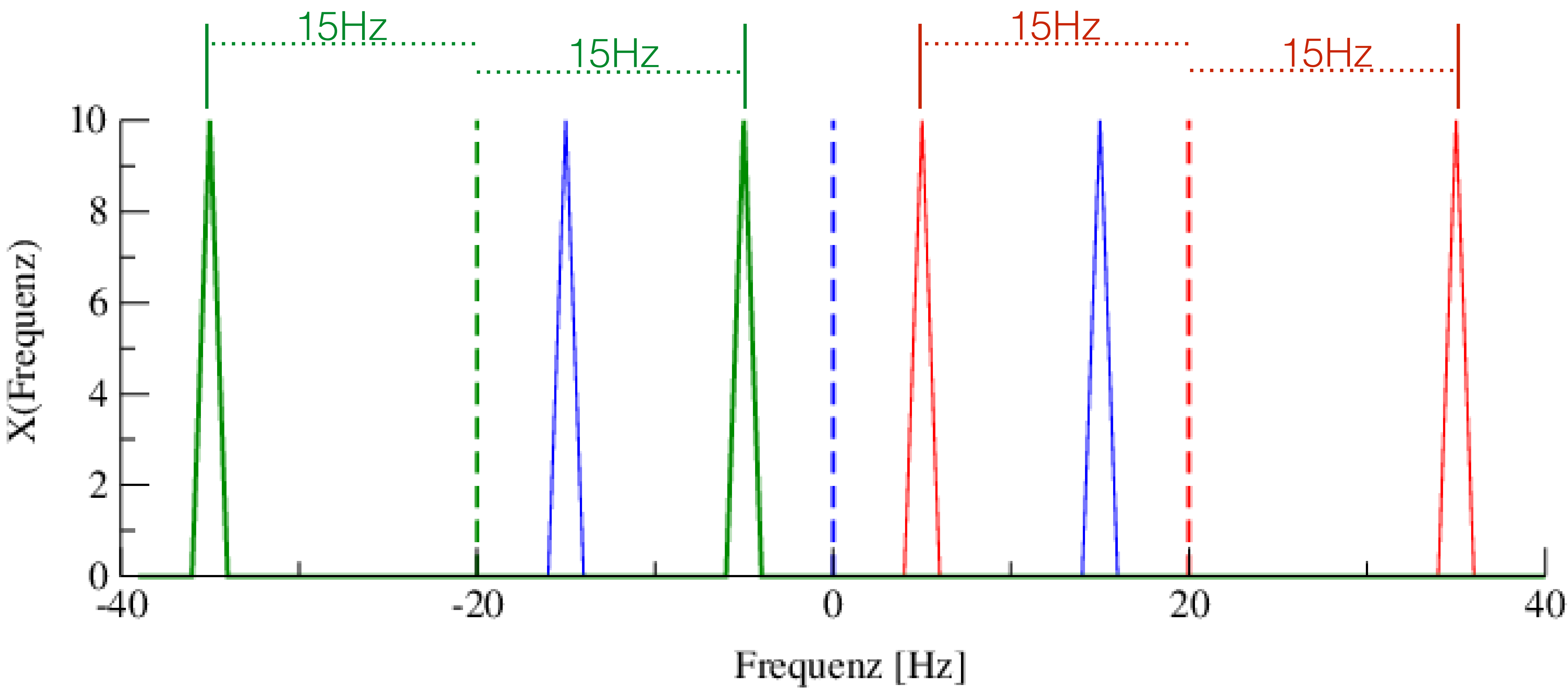
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n} = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k f_s)$$

Originalsignal:

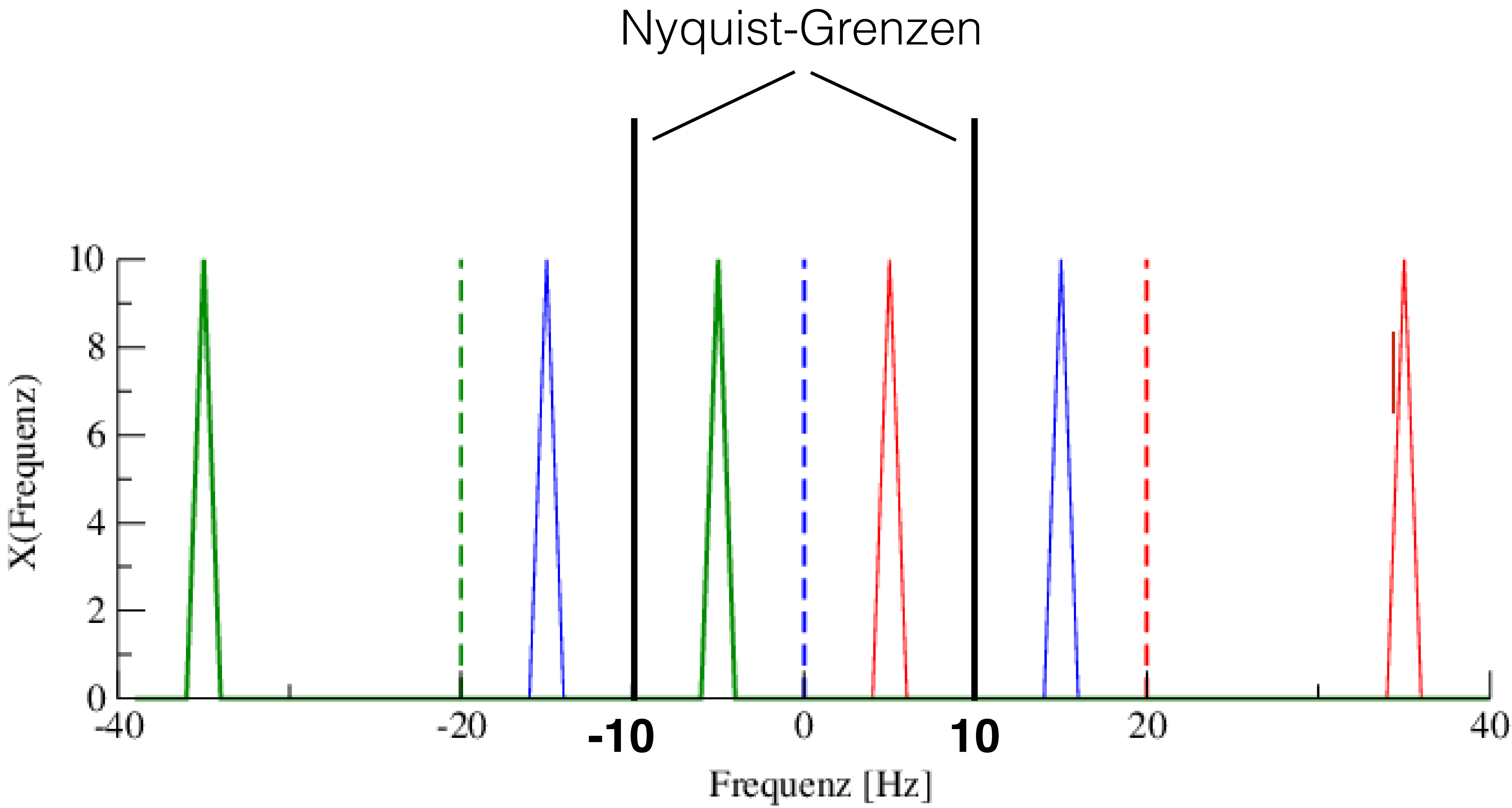
15Hz

abgetastetes Signal

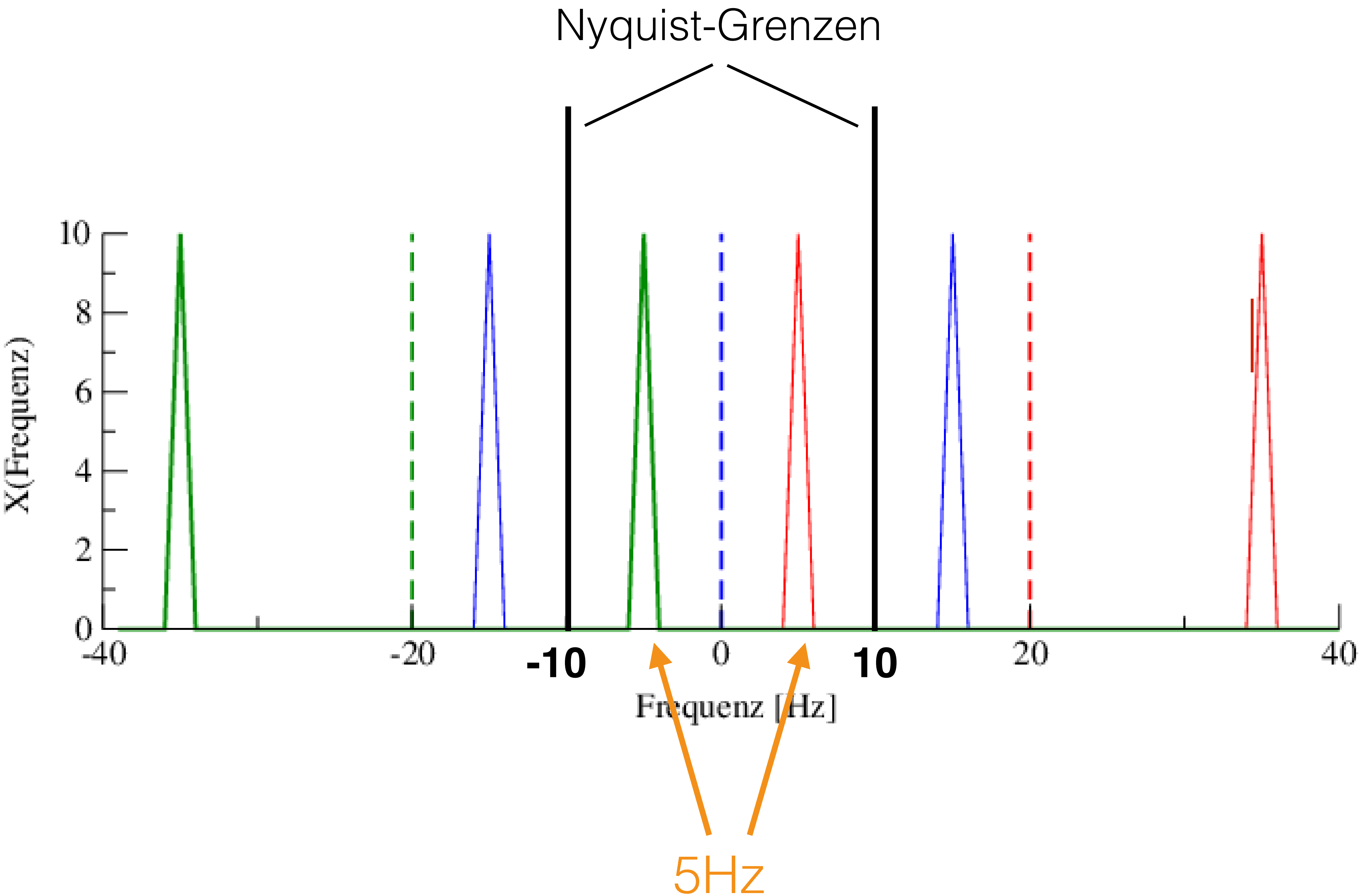
sample rate: 20Hz, Nyquist: 10Hz → 5Hz



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n)e^{-i2\pi f t_n} = \frac{1}{\Delta t}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(f - k f_s)$$



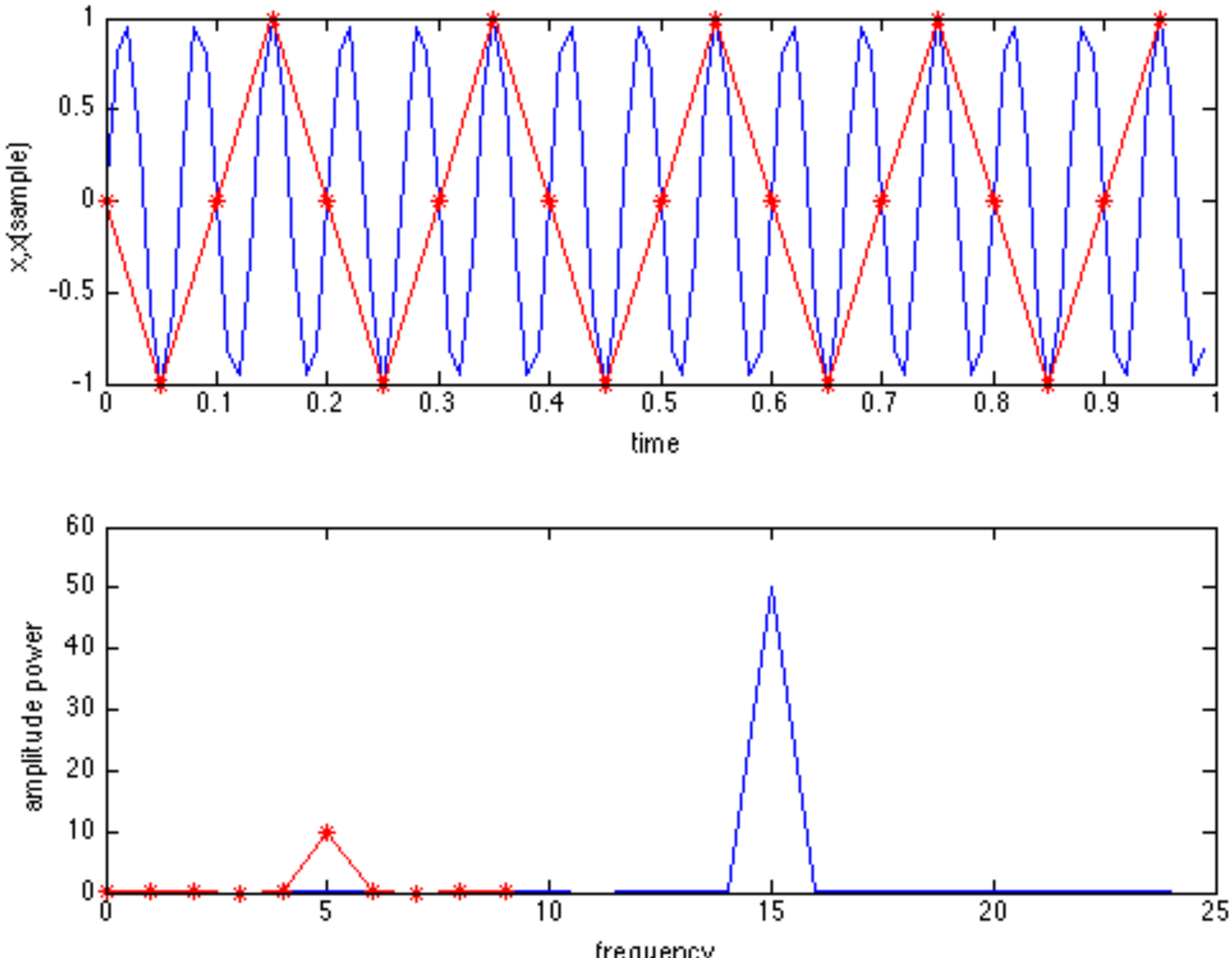
Nyquist-Grenzen
10
8
6
4
2
0
X(Frequenz)
-40
-20
-10
0
10
20
40
Frequenz [Hz]



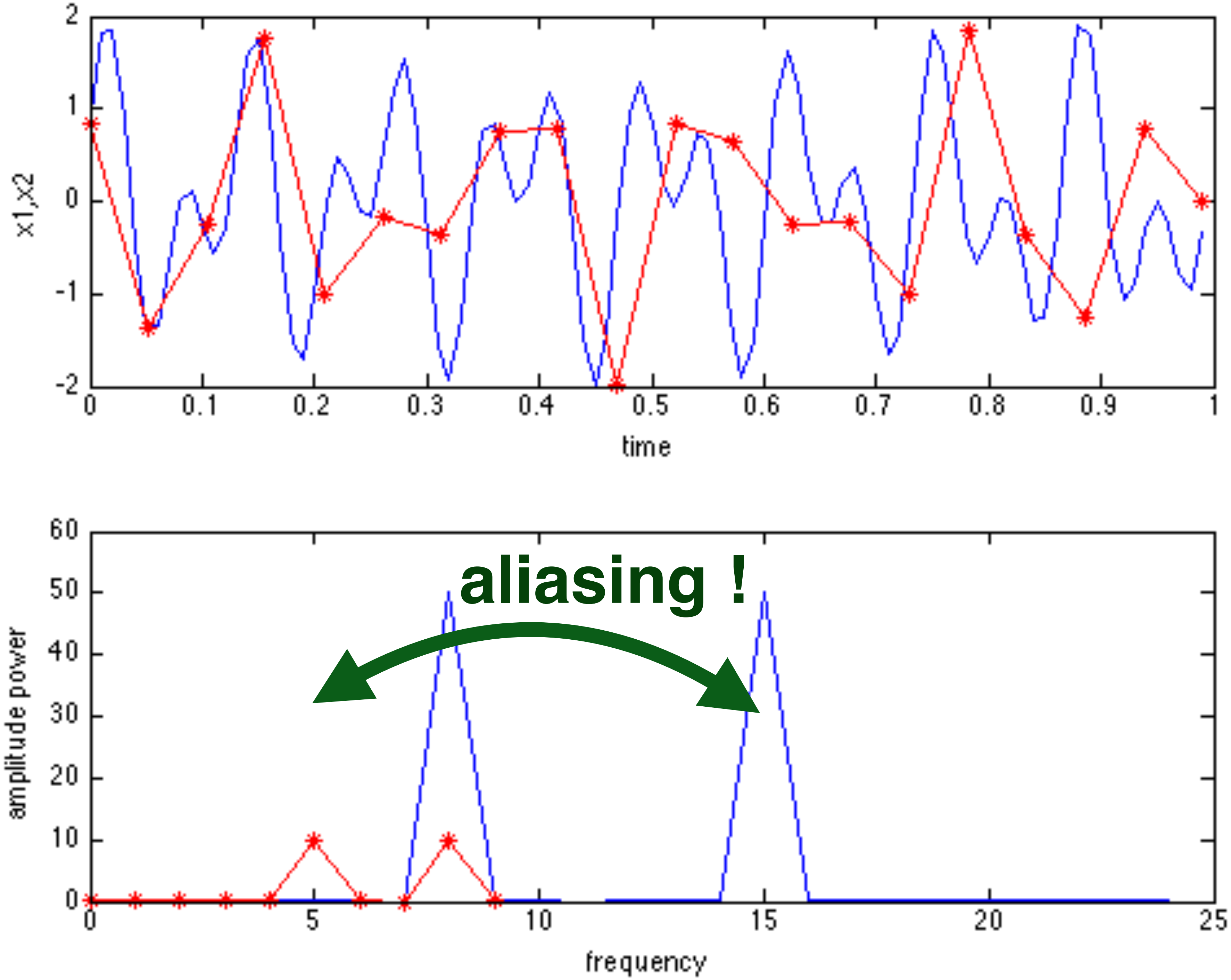
Nyquist-Grenzen
10
8
6
4
2
0
X(Frequenz)
-40
-20
-10
0
10
20
40
Frequenz [Hz]
5Hz

(Fourier_7.m)

Resultat:



weiteres Beispiel:



Originalsignal:

8Hz and 15Hz

abgetastetes Signal:

Abtastrate: 20Hz

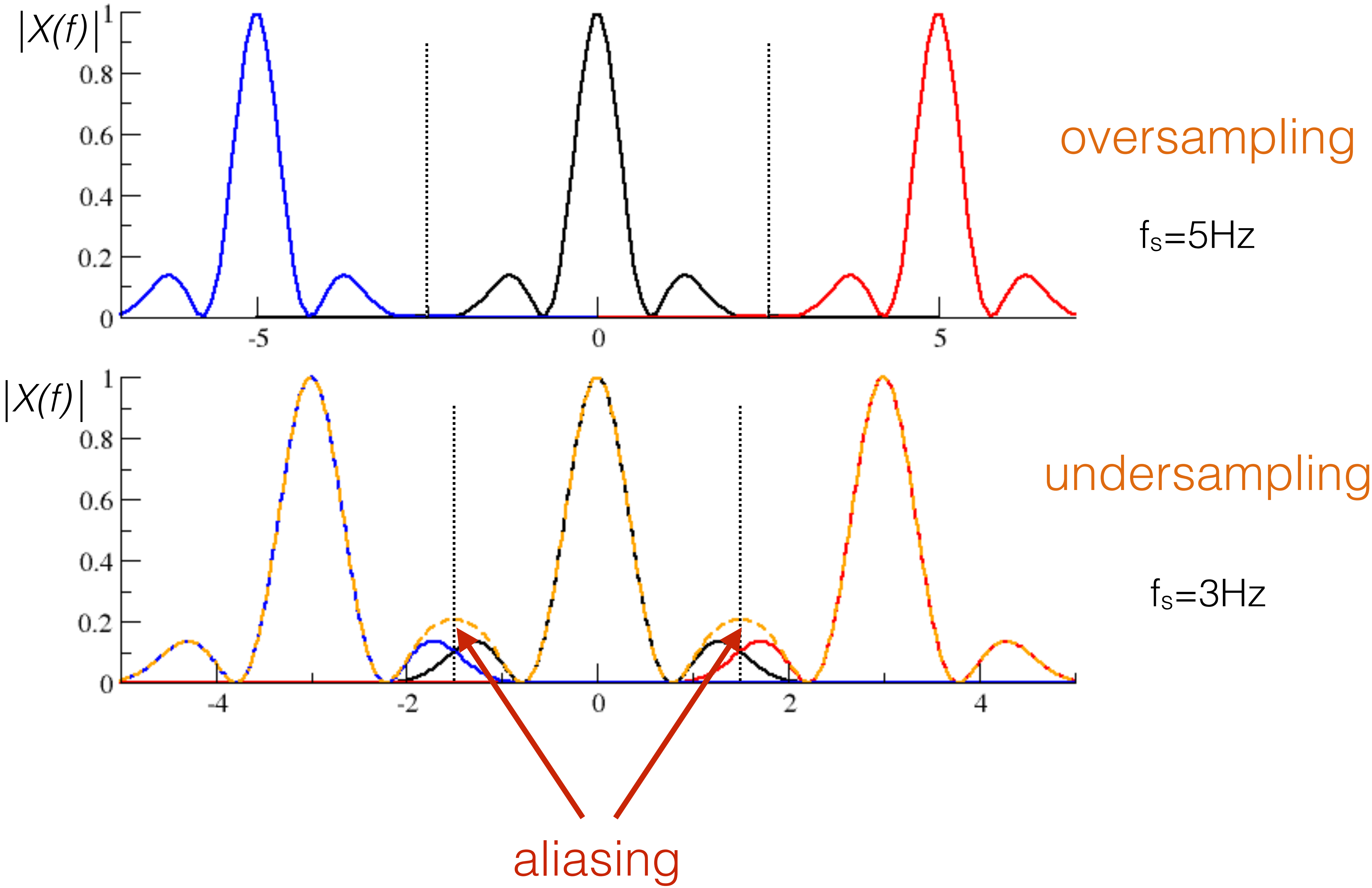
Nyquist: 10Hz

new alias frequency: 5Hz = 15Hz-Nyquist

(Fourier_6.m)

anderes Beispiel für aliasing: Stroboskop-Effekt

illustratives Beispiel



Fourier transform

Fehler

a) $$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

zeitlich unbegrenzt
zeit-kontinuierlich

b) $$X_s(f) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n}$$

zeitlich unbegrenzt,
zeit-diskret **aliasing**

c) $$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

zeitlich begrenzt,
zeit-kontinuierlich

spectral leakage

d) $$X_s(f) = \Delta t \sum_{n=-M/2}^{M/2} x(t_n) e^{-i2\pi f t_n}$$

zeitlich begrenzt,
zeit-diskret

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

<u>Spezialfall</u>: Signal periodisch mit Periode P

$$x(t) = x(t+P)$$ *P=T/M*

$$= \int_{-T/2}^{T/2} x(t+P) e^{-i2\pi f t} dt$$

$$= \int_{-T/2+P}^{T/2+P} x(\tau) e^{-i2\pi f \tau} e^{i2\pi f P} d\tau$$

$$= e^{i2\pi f P} \int_{-T/2}^{T/2} x(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau$$

$$e^{i2\pi f P} = 1 \;\rightarrow\; 2\pi f P = 2\pi n, n \in \mathcal{Z}_0$$

$$\boxed{f_n = \frac{1}{P} n}$$

$$X_T(f) = X_T\left(\frac{n}{P}\right)$$

Periode im Signal diskretisiert Frequenzen

$$X_T(f) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

$$= \int_{-T/2}^{-T/2+P} x(t)e^{-i2\pi ft}dt + \int_{-T/2+P}^{-T/2+2P} x(t)e^{-i2\pi ft}dt + \cdots$$

$$\cdots + \int_{T/2-P}^{T/2} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \int_{-T/2+(m-1)P}^{-T/2+mP} x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

$$= \sum_{m=1}^{M} \int_{-T/2+(m-1)P}^{-T/2+mP} x(t) e^{-i2\pi f t} dt$$

Periodizität

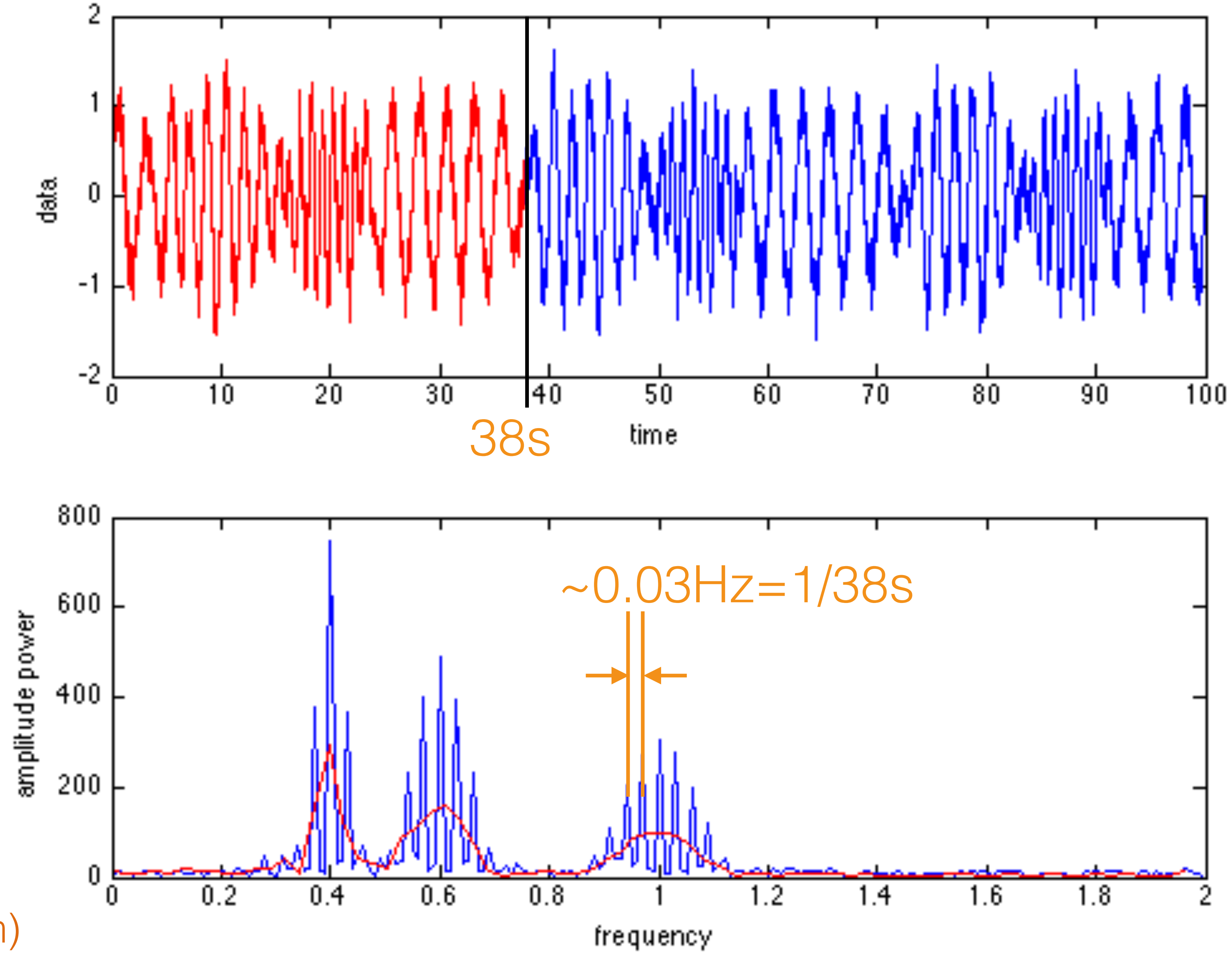
$$X_T(f) = M \int_{-T/2}^{-T/2+P} x(t) e^{-i\frac{2\pi n t}{P}} dt$$

$$= MPc_n = Tc_n$$

Fourier-Koeffizient

falls man annimmt, dass Zeitserie periodisch ist und man aber **nur eine Periode** betrachtet, dann kann man die Fourieranalyse anwenden.

Beispiel:



(Fourier_8.m)

wenn Signal periodisch ist mit Periode P, dann zeigt das Spektrum eine Kamm-Struktur mit Diskretisierung *1/P*

Fourierreihe nimmt Periodizität an

wenn Signal selbst **keine** periodische Struktur hat:

Ergebnis ist wie **erwartet** :-)

wenn Signal selbst **eine** periodische Struktur hat:

zusätzliche **unbeabsichtigte** Struktur :-(

aus der Praxis:

- wenn Powerspektrum regelmäßige Unterstruktur hat:

  die Daten sind periodisch !

- falls Daten *a priori* periodisch sind:

  versuche dies zu vermeiden !!

Frage: wie lautet die inverse Fourier Transformation ?

gegeben: Zeitserie mit Länge T

$$\rightarrow f = f_n = \frac{n}{T}$$

$\longrightarrow$ Ansatz: $x(t) = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(f_n) e^{i2\pi f_n t}$

eingesetzt:

$$X_T(f_m) = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(f_n) e^{i2\pi f_n t} e^{-i2\pi f_m t} dt$$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(f_n) \int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi (f_n - f_m) t} dt$$

N.R.:

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi(f_n - f_m)t} dt = \frac{e^{i2\pi(f_n - f_m)T/2} - e^{-i2\pi(f_n - f_m)T/2}}{i2\pi(f_n - f_m)}$$

$$= T\frac{\sin(\pi(n-m))}{\pi(n-m)} = \begin{cases} T \ \forall n = m \\ 0 \ \forall n \neq m \end{cases}$$

$$= T\delta_{n,m}$$

$\dots$

$$= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(f_n) T\delta_{n,m}$$

$$X_T(f_m) = \frac{T}{\mathcal{N}} X_T(f_m)$$

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_T(f_n) e^{i2\pi f_n t}$$