Verfahren zur Datenanalyse gemessener Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 1 - WS 2017/18

Ihre Erwartungen an die Vorlesung ?

Programmierkenntnisse ?

Erfahrung mit Daten ?

Übungsaufgaben:

- schriftlich oder
- in Form einer Präsentation

Prüfung:

- bei ausreichender Beteiligung an Übungen
- mündlich, 30 Minuten

I. Einleitung

II. Fourier Analyse

III. Zeit-Frequenz Analyse

I. Einleitung

II. Fourier Analyse

III. Zeit-Frequenz Analyse

I.1. Rhythmen in der Natur

I.2. Sampling

I.1. Rhythmen in der Natur

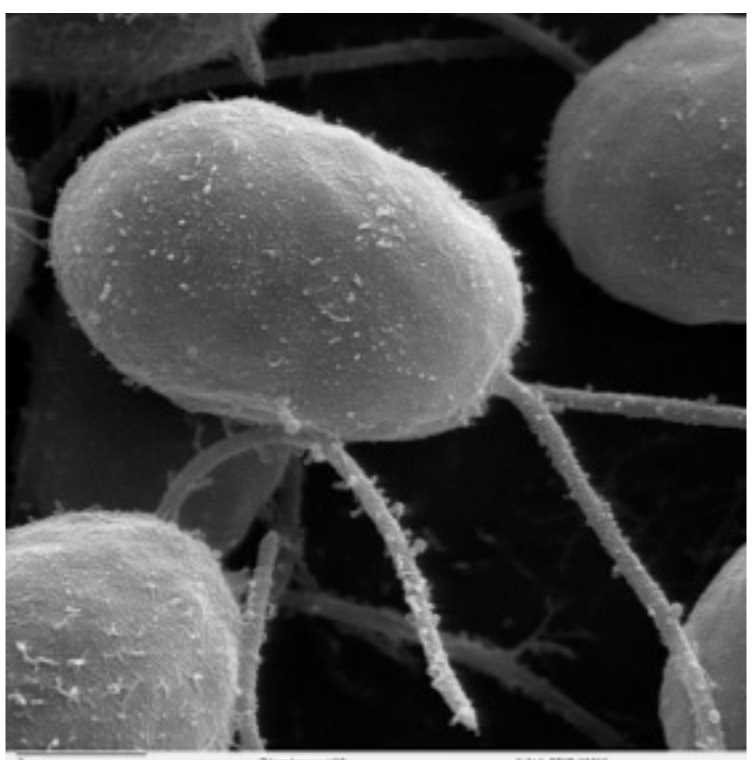
I.2. Sampling

Chronobiologie:

systeminterne biologische Rhythmen, z.Bsp. bei

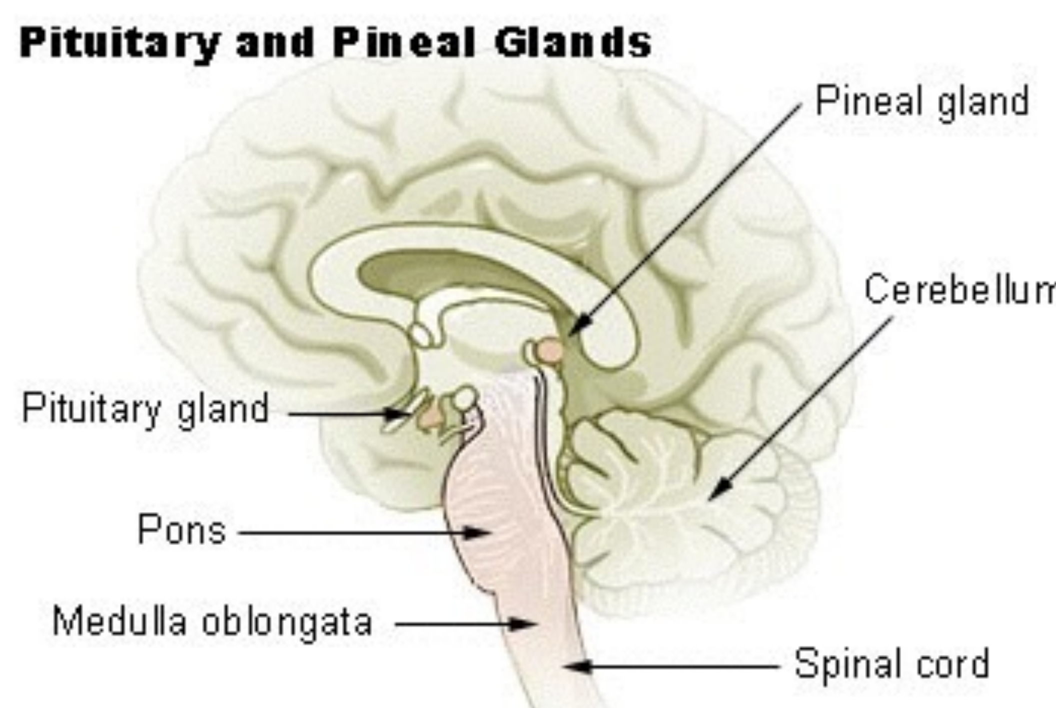
(Nobelpreis Medizin 2017)

Algen



circadianer Rhythmus

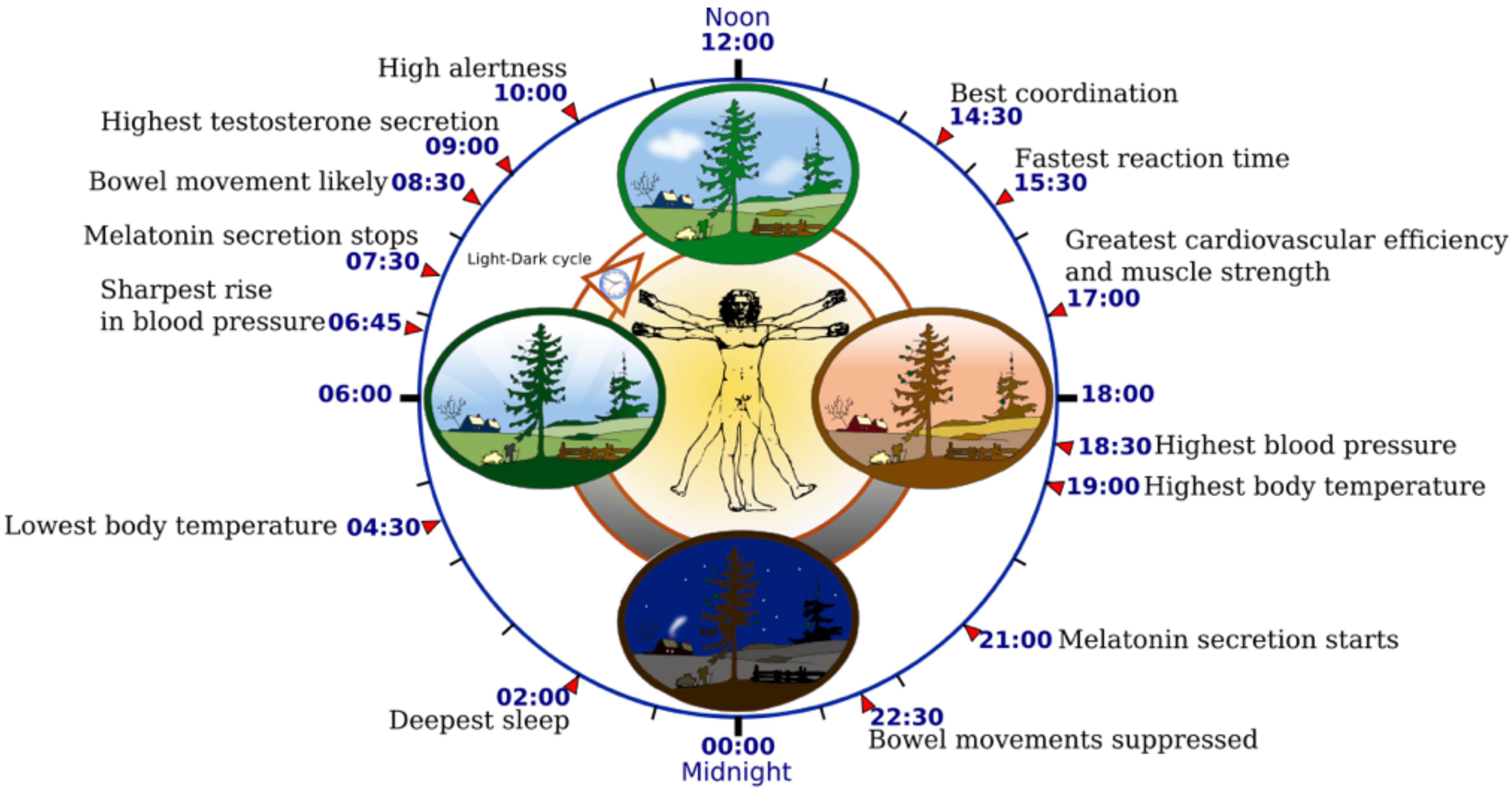
Tiere



Zirbeldrüße/
Epiphyse

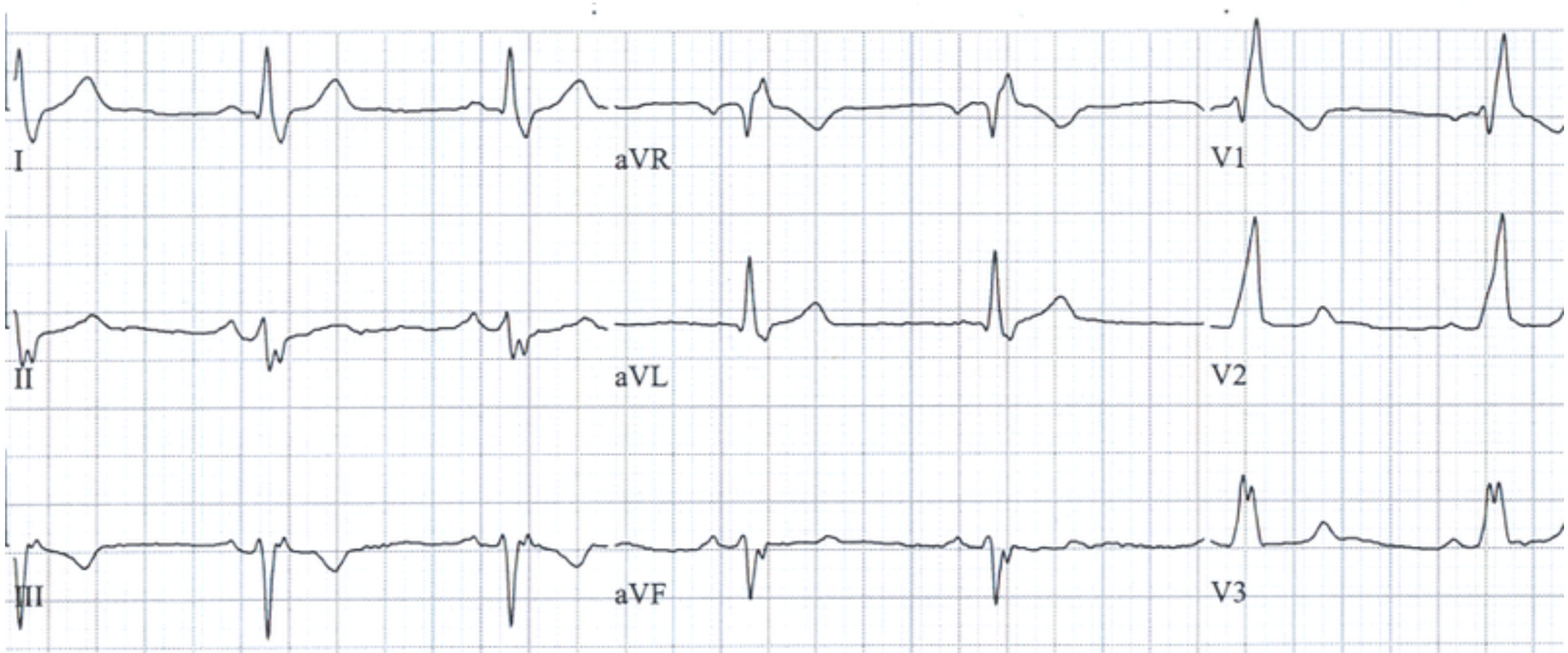
circadianer Rhythmus

Beispiel: circadianer Rhythmus eines Menschen



andere physiologische Rhythmen:

Herz-Rhythmus

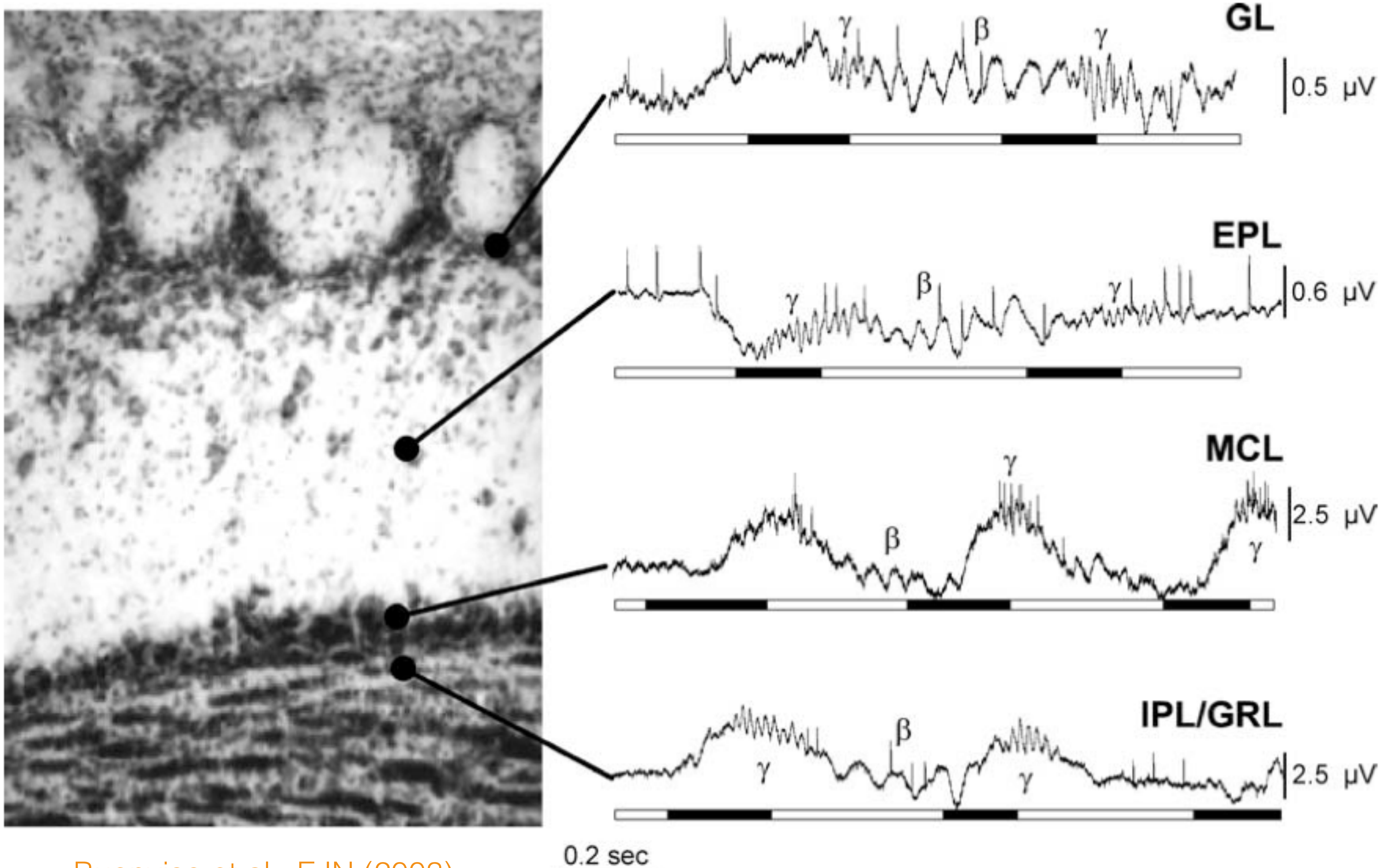


?

Beispiel: Interaktion zwischen Atmung und Gehirnaktivität

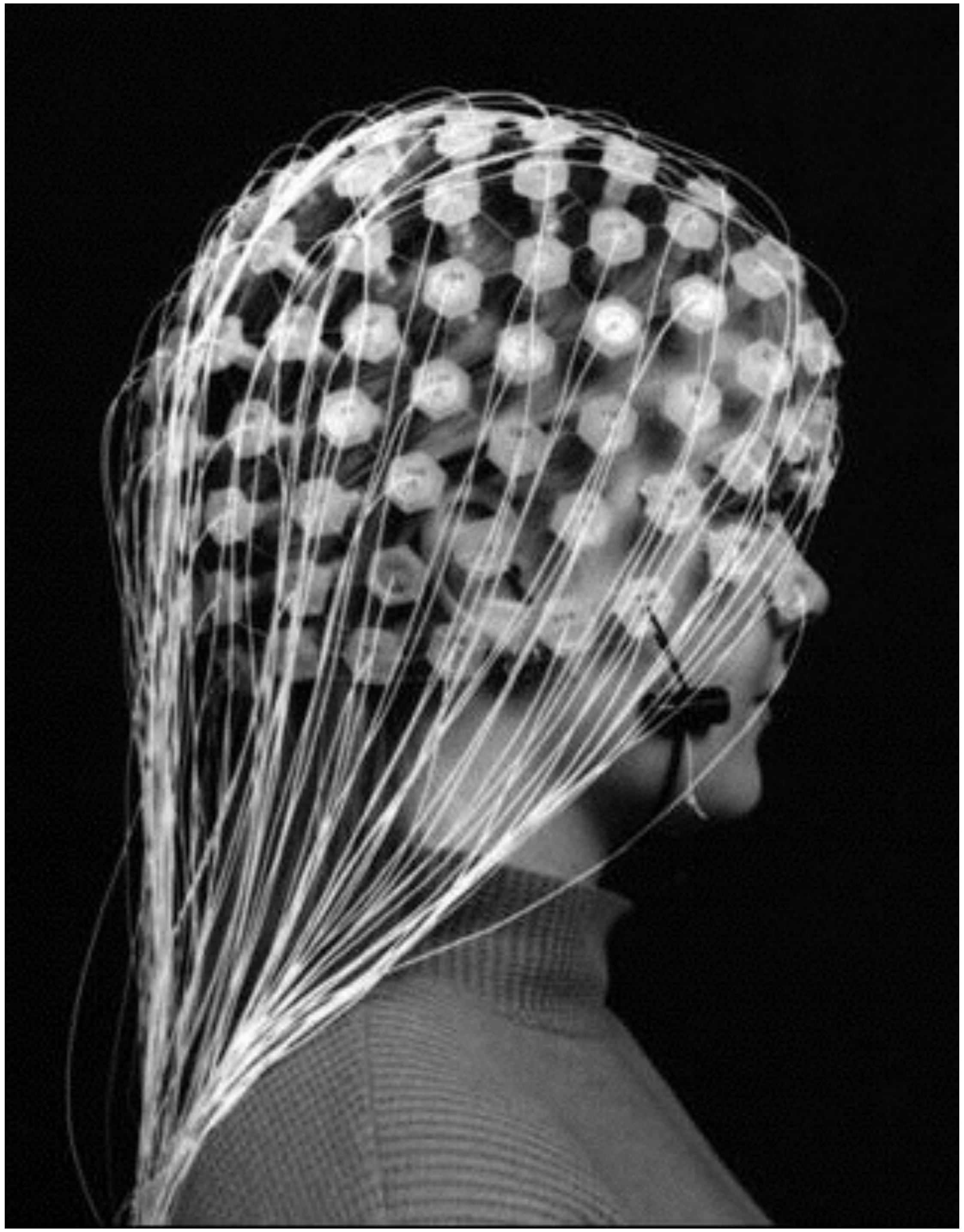
olfaktorischer Bulbus (Ratte)

intrakraniale Ströme/Potentiale

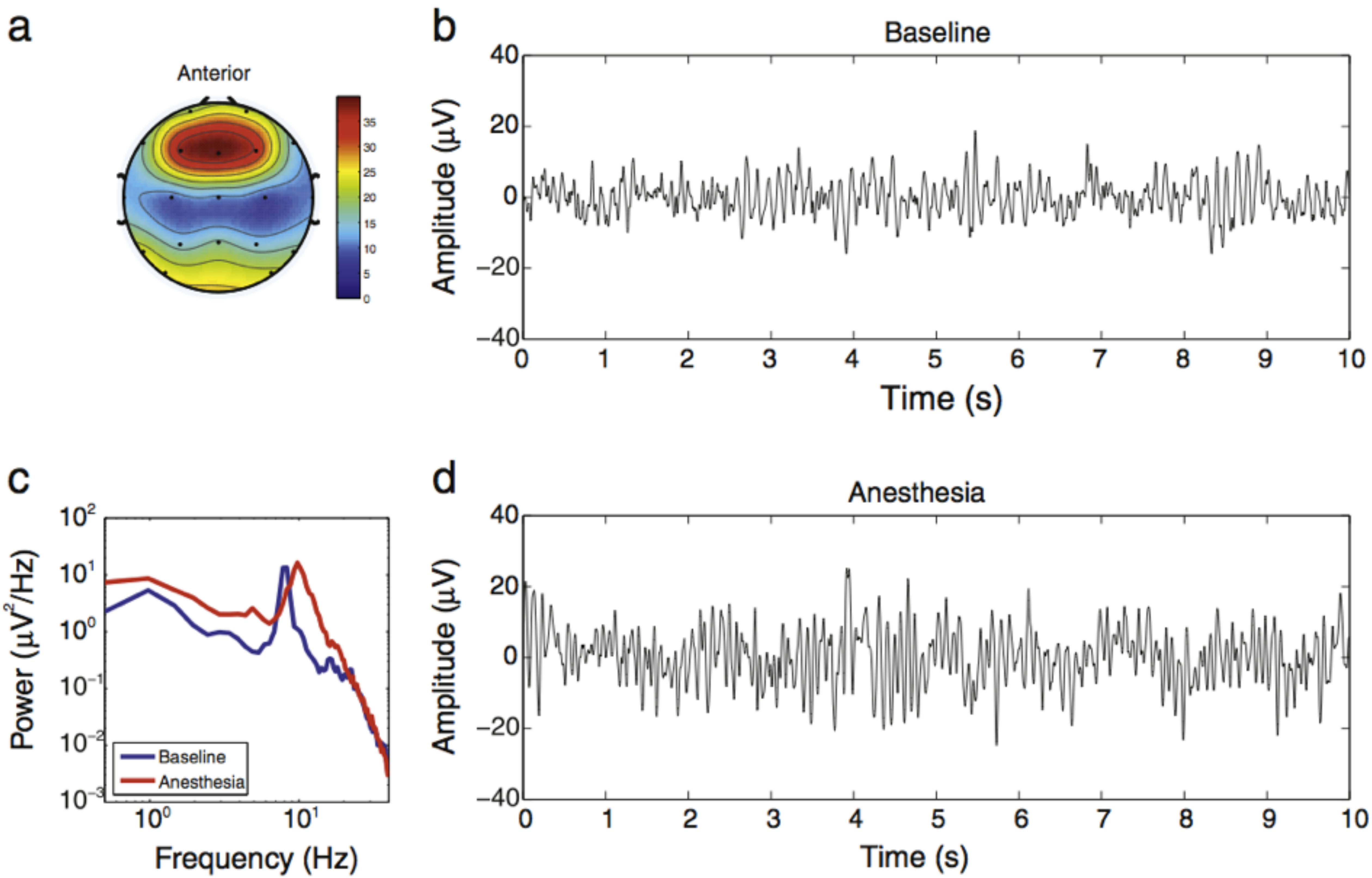


Buonviso et al., EJN (2003)

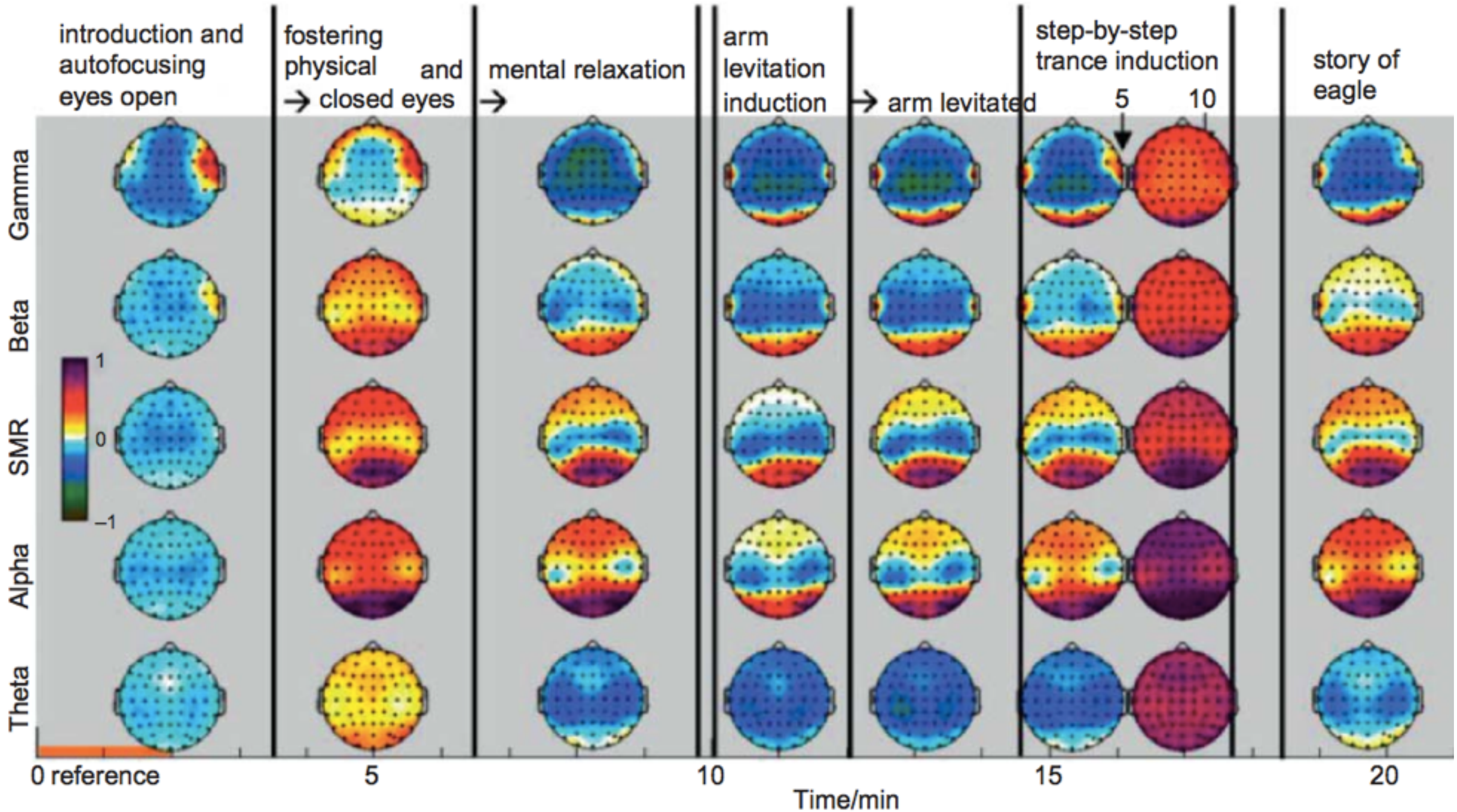
Beispiel: Gehirnaktivität



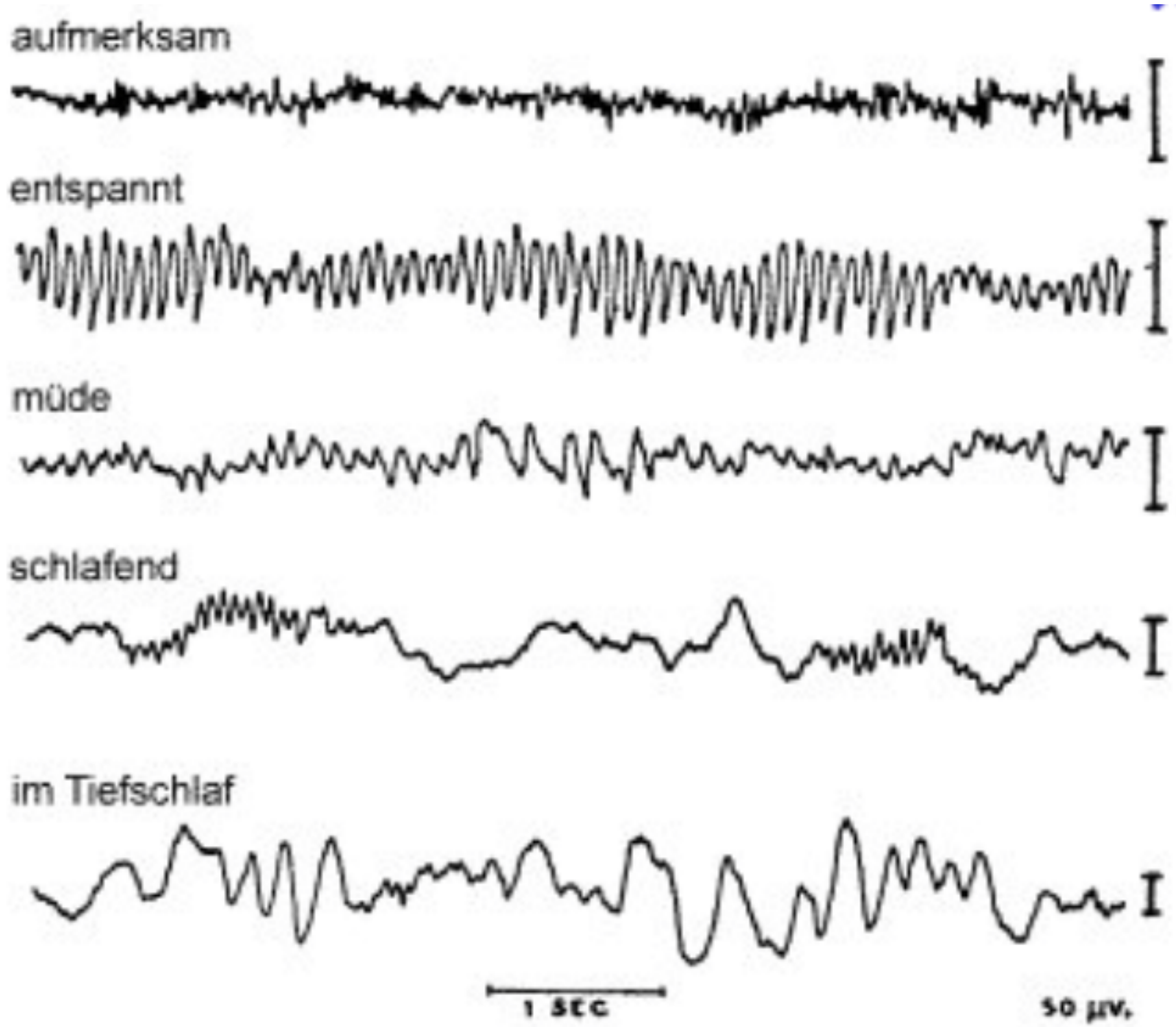
Beispiel: Anästhesie



Beispiel: Hypnose



Beispiel: Schlaf



Oszillatorische Aktivität ist omnipräsent in biologischen Systemen

Oszillatorische Aktivität charakterisiert physiologischen Zustand

Oszillatorische Aktivität widerspiegelt Interaktion von Untersystemen in biologischem System

I.1. Rhythmen in der Natur

I.2. Sampling

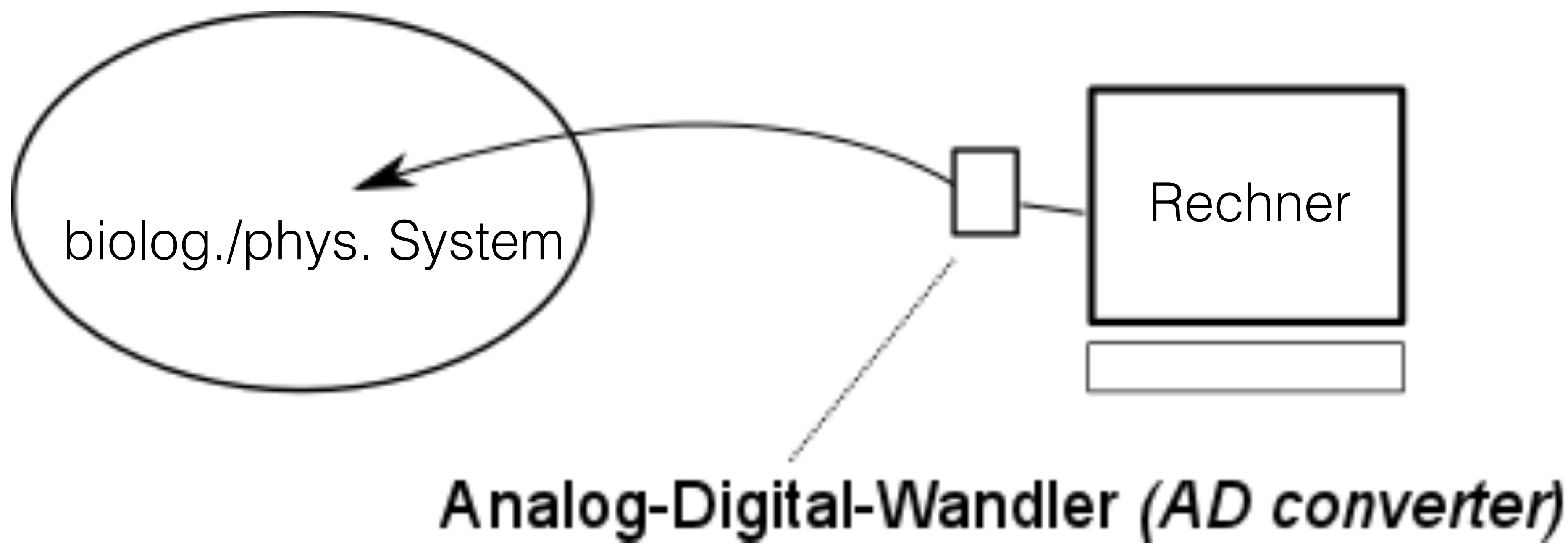
Messung von Signalen analog :

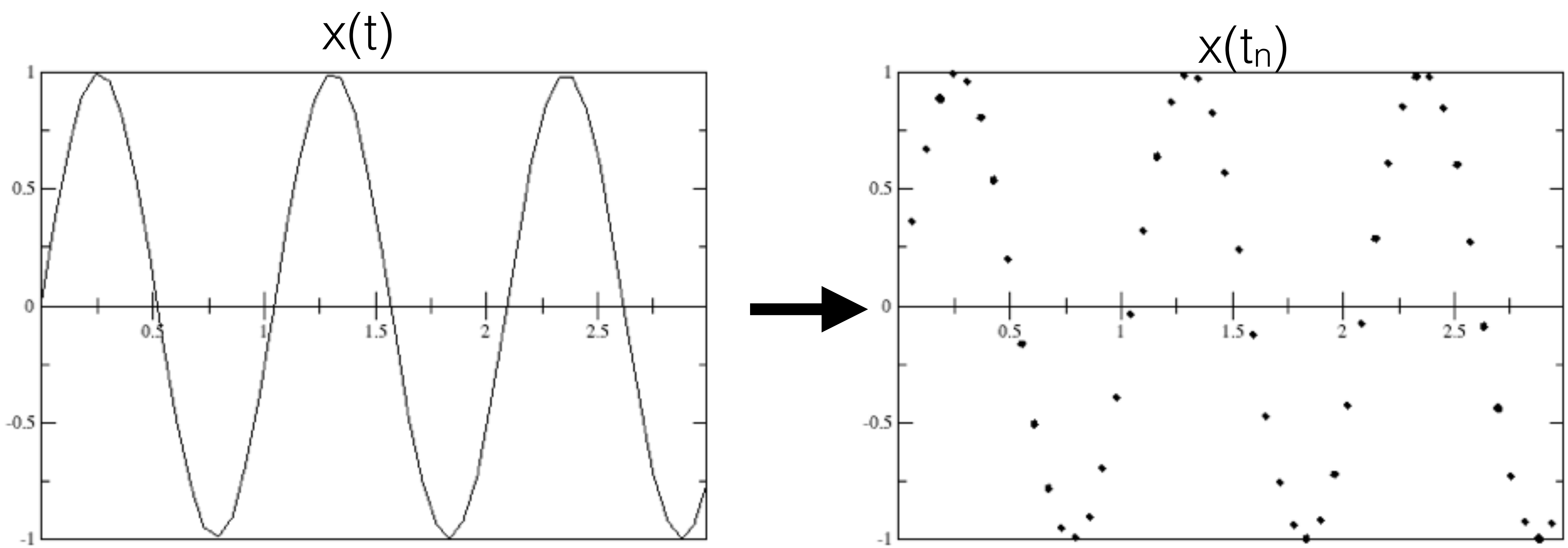
- elektrische Potentiale / Ströme
- mechanische Amplituden
- akustische Signale

Speicherung der Messdaten:

Digitalisierung durch **periodisches** Registrieren

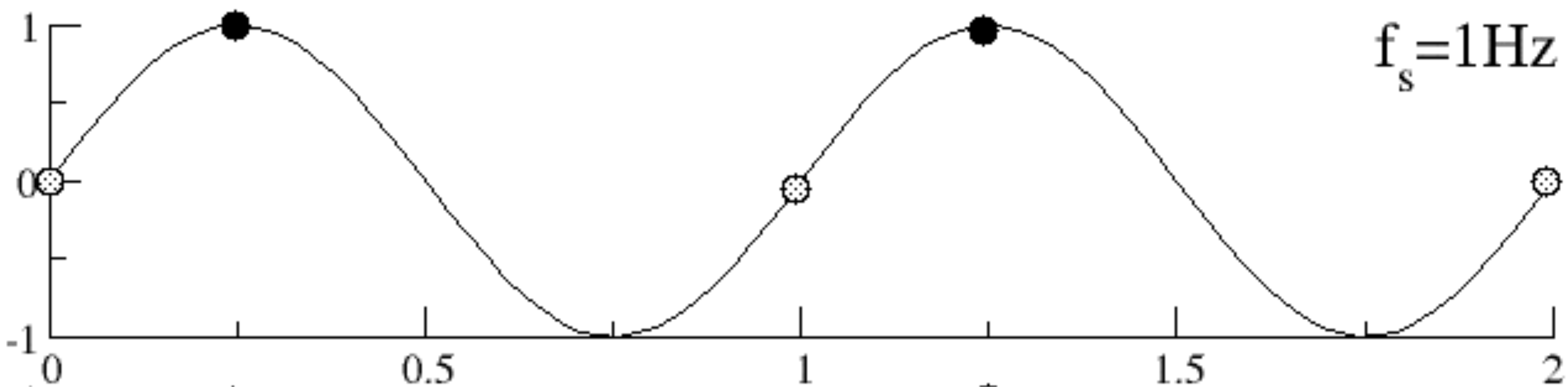
Prinzip des Abtastens:





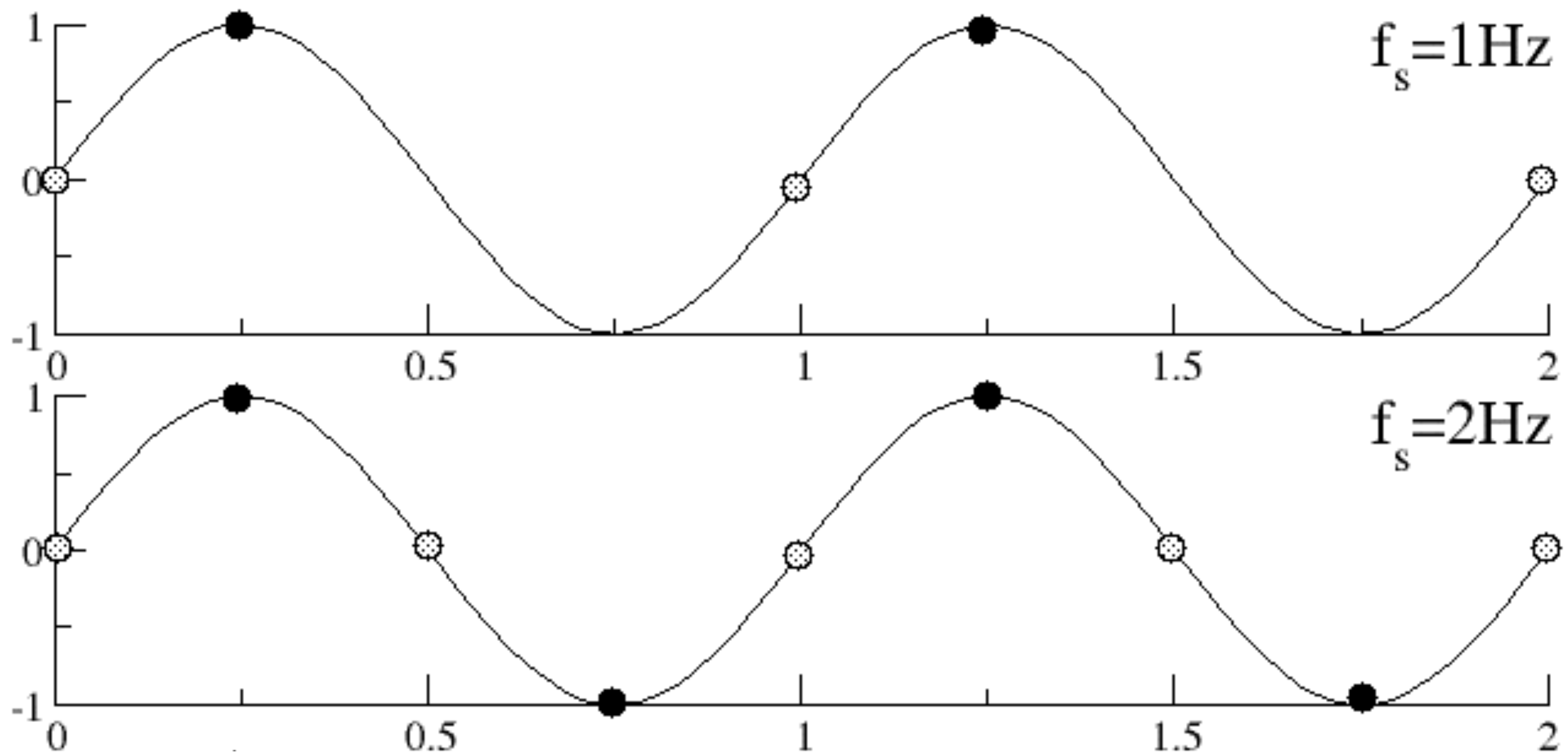
Sampling

oszillatorisches Signal mit 1 Hz



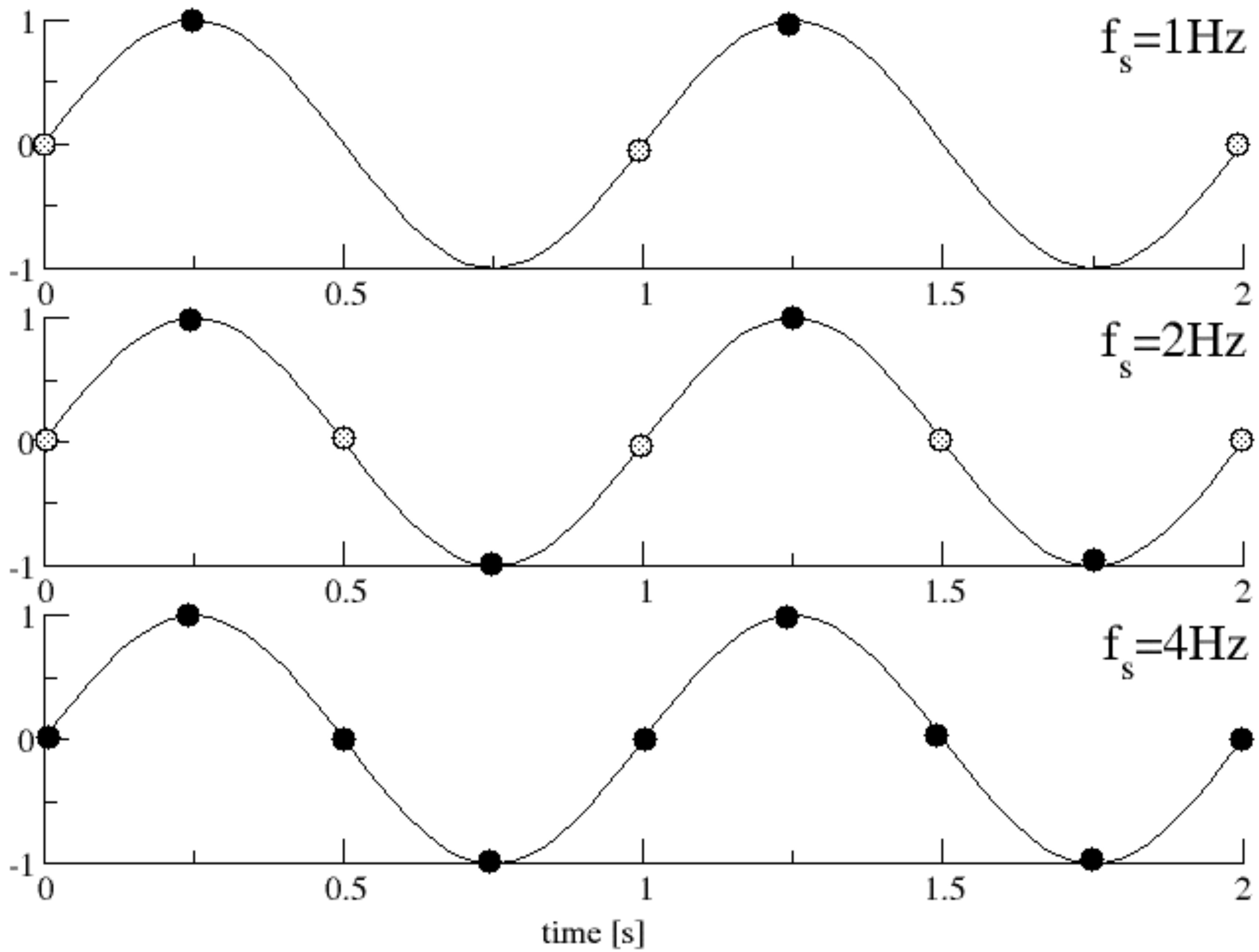
Sampling

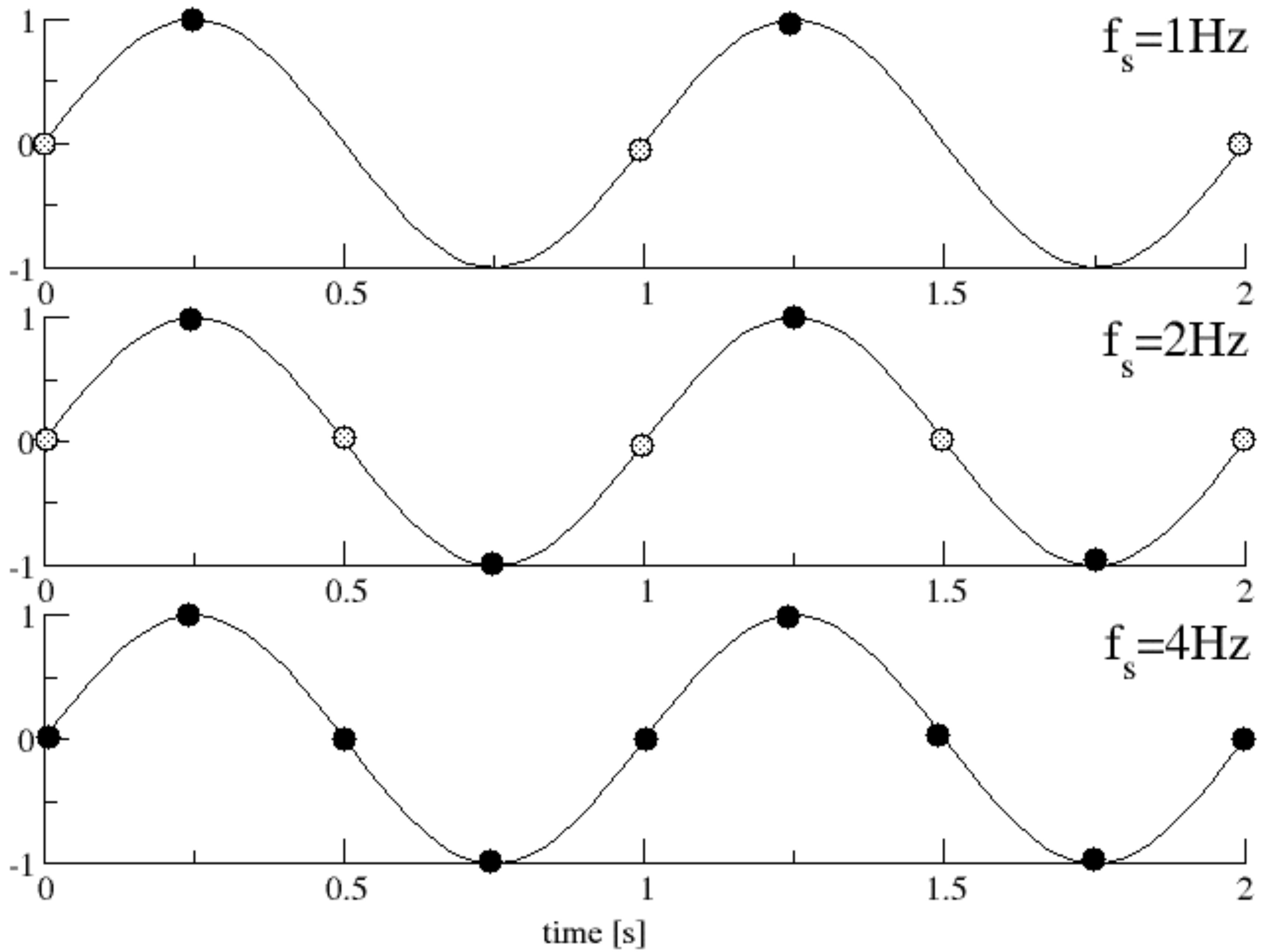
oszillatorisches Signal mit 1 Hz



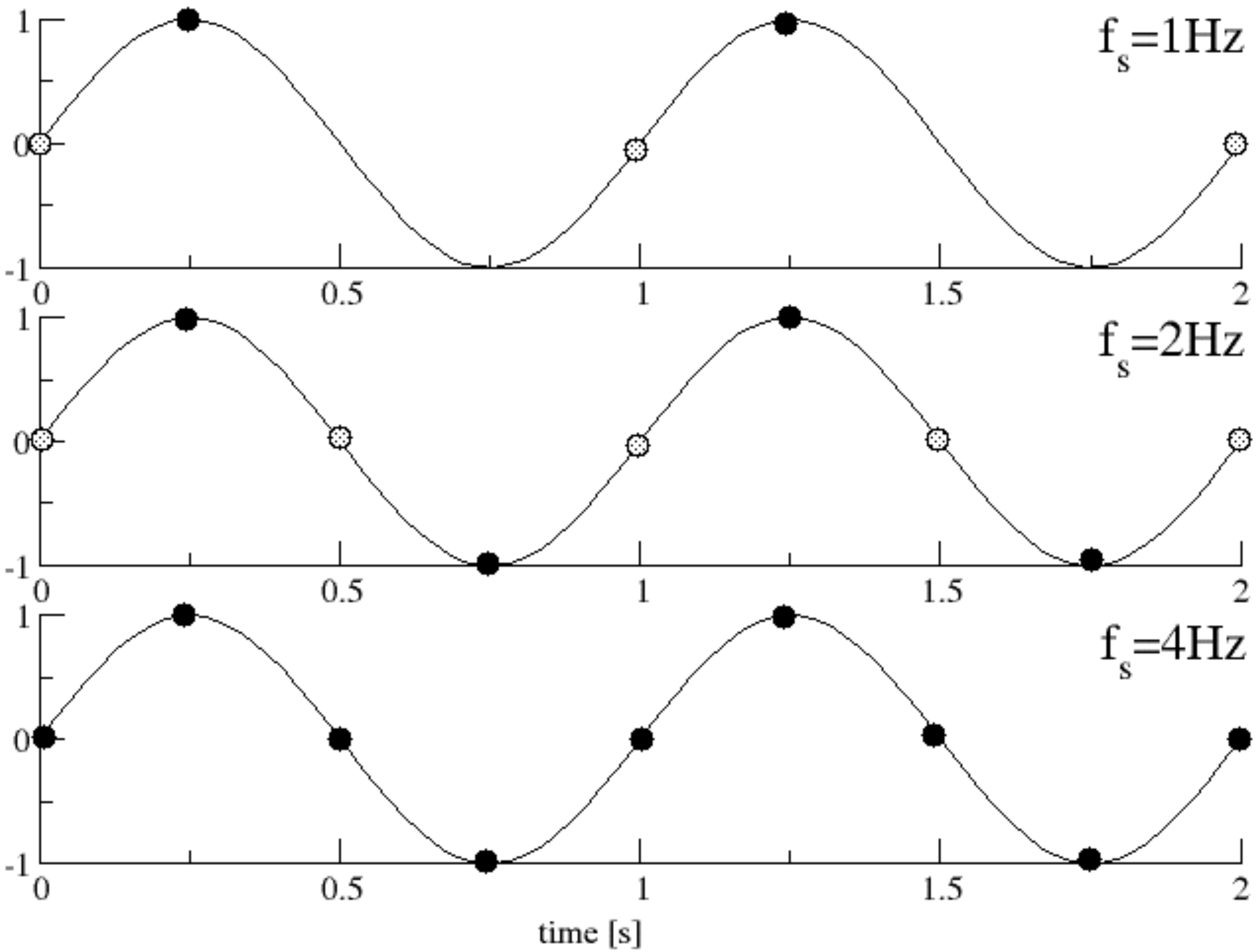
Sampling

oszillatorisches Signal mit 1 Hz





$$f_s > 2f_{signal} \;\rightarrow\; f_{signal} < f_s/2$$



$$f_s > 2f_{signal} \;\rightarrow\; f_{signal} < f_s/2$$

kleinste Abtastfrequenz: Nyquist Frequenz $f_{Nyquist} = 2f_{Signal}$

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

<u>gegeben</u>: kontinuierliche Funktion $s(t)$

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

gegeben: kontinuierliche Funktion $s(t)$

$s(t)$ enthält maximale Frequenz f_m

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

<u>gegeben</u>: kontinuierliche Funktion $s(t)$

$s(t)$ enthält maximale Frequenz f_m

$s(t)$ wird abgetastet mit Frequenz $f_s \longrightarrow s(t_n)$

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

gegeben: kontinuierliche Funktion $s(t)$

$s(t)$ enthält maximale Frequenz f_m

$s(t)$ wird abgetastet mit Frequenz $f_s \longrightarrow s(t_n)$

Vermutung: Informationsverlust durch Abtastung

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

gegeben: kontinuierliche Funktion $s(t)$

$s(t)$ enthält maximale Frequenz f_m

$s(t)$ wird abgetastet mit Frequenz $f_s \longrightarrow s(t_n)$

Vermutung: Informationsverlust durch Abtastung

gesucht: Abtastfrequenz, für welche Rekonstruktion von $s(t)$ aus $s(t_n)$ (durch Interpolation) ohne Informationsverlust möglich ist.

Abtast-Theorem
(Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

Lösung:

Abtast-Theorem (Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

Lösung: $\boxed{\text{Abtastfrequenz } f_s > 2f_m}$

Abtast-Theorem (Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

Lösung: $\boxed{\text{Abtastfrequenz } f_s > 2f_m}$

Grenz-Abtastfrequenz

Nyquistfrequenz $\boxed{f_{Nyquist} = 2f_m}$

Abtast-Theorem (Shannon/Nyquist/Whitaker/Kotelnikov)

<u>Lösung:</u> $\boxed{\text{Abtastfrequenz } f_s > 2f_m}$

Grenz-Abtastfrequenz

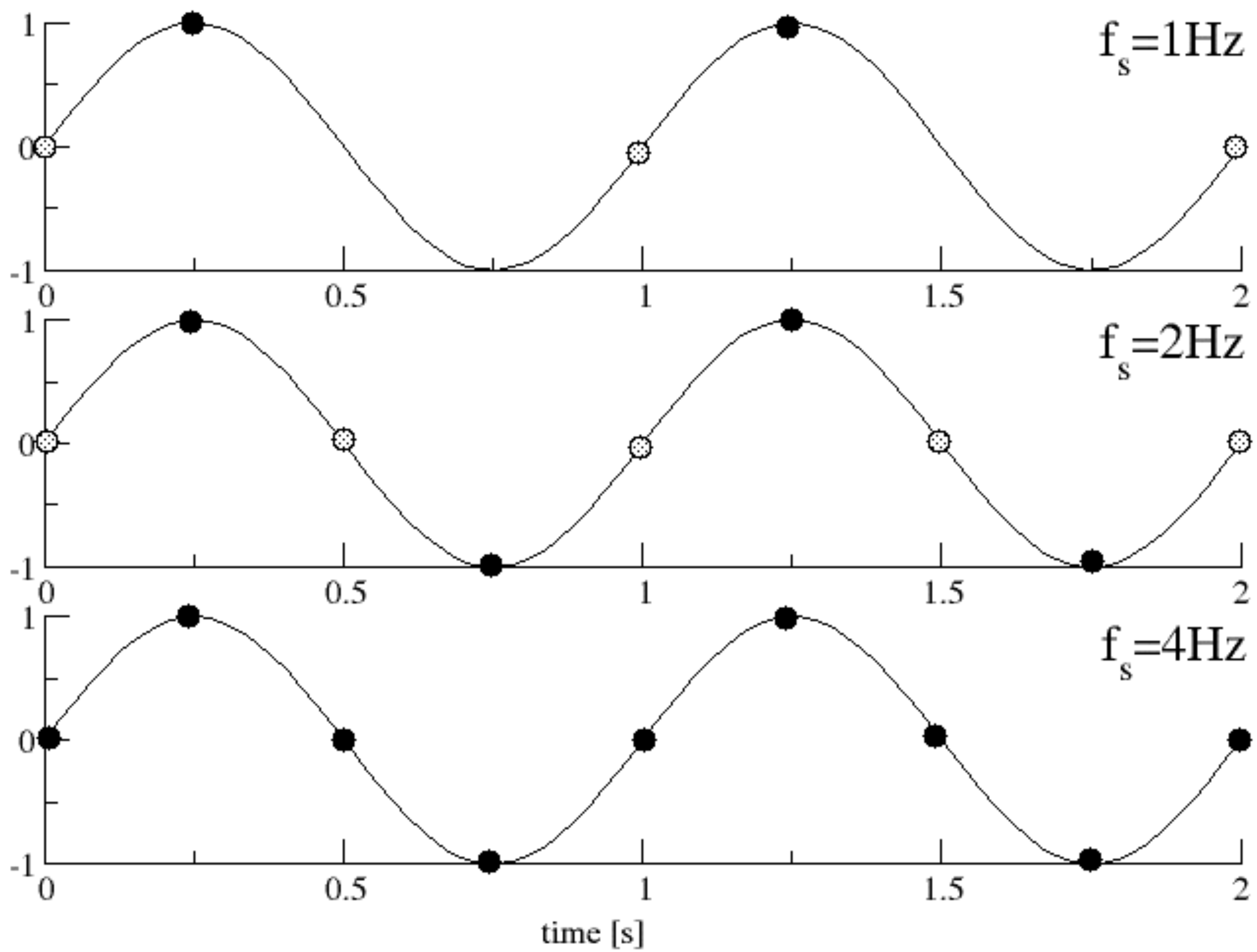
Nyquistfrequenz $\boxed{f_{Nyquist} = 2f_m}$

oder: falls f_s gegeben, dann

$$f_m < f_s/2$$

Kommentar aus der Praxis

$$f_{signal} < f_s/4$$



I. Einleitung

II. Fourier Analyse

III. Zeit-Frequenz Analyse

II. Fourier Analyse

II.1. Grundlagen

a) Koeffizienten

b) Fourier Theorem

II.2. Mögliche Fehler in der Fourier Analyse

Aliasing

Periodizität

Spectral leakage

II.3. Berechnung von Spektren

II. Fourier Analyse

II.1. Grundlagen

a) Koeffizienten

b) Fourier Theorem

II.2. Mögliche Fehler in der Fourier Analyse

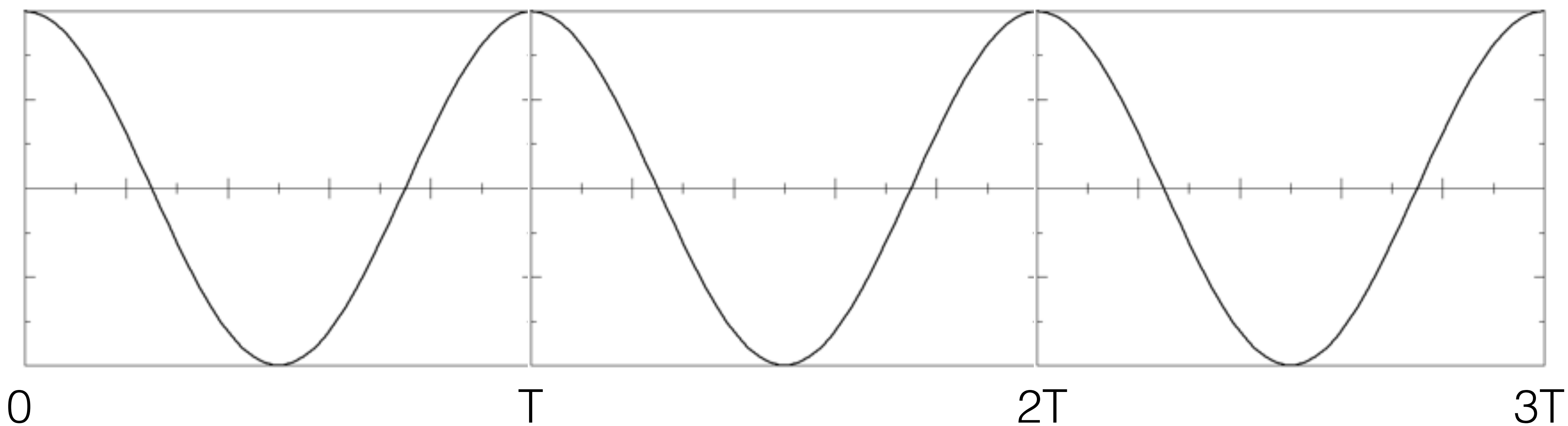
Aliasing

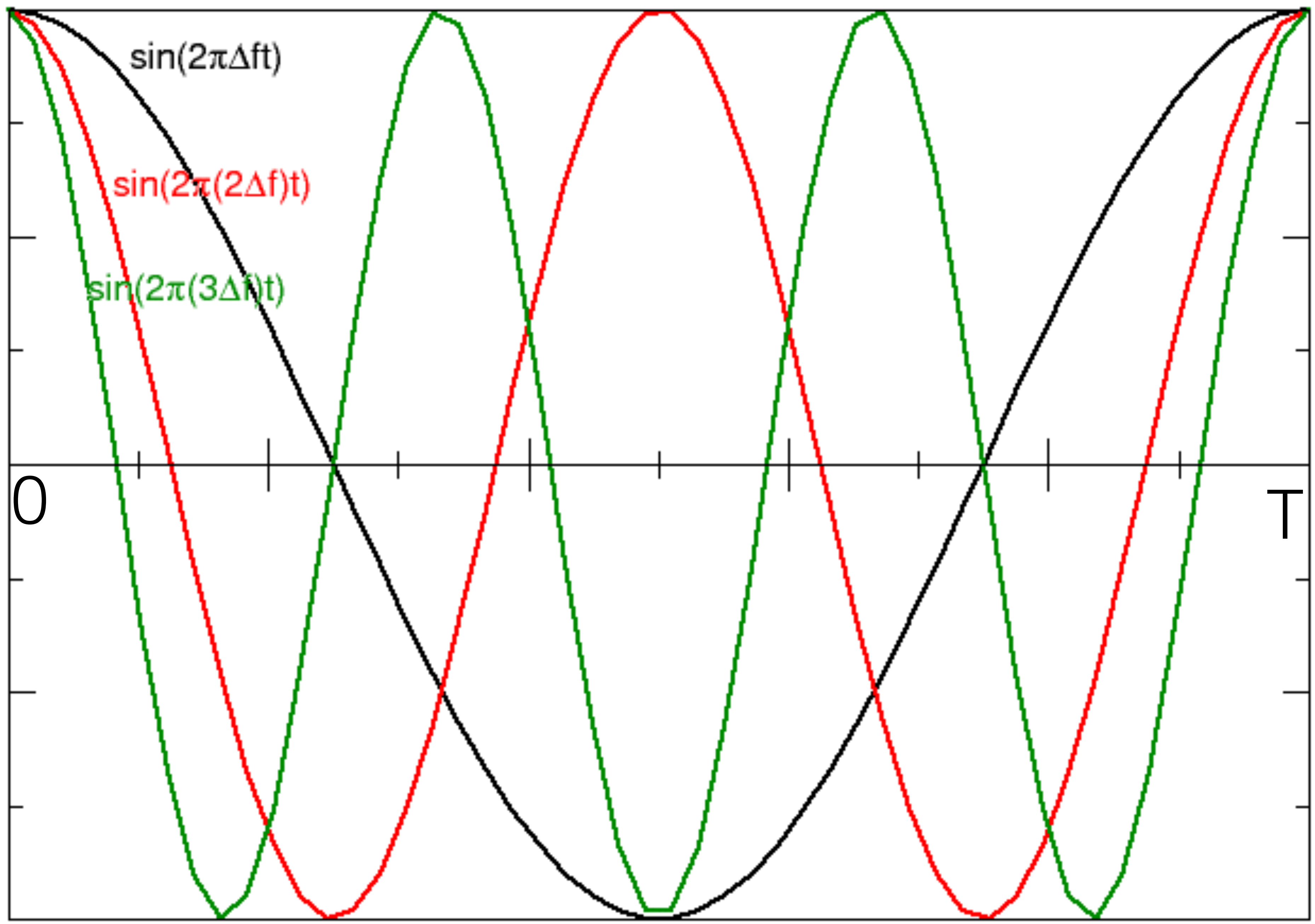
Periodizität

Spectral leakage

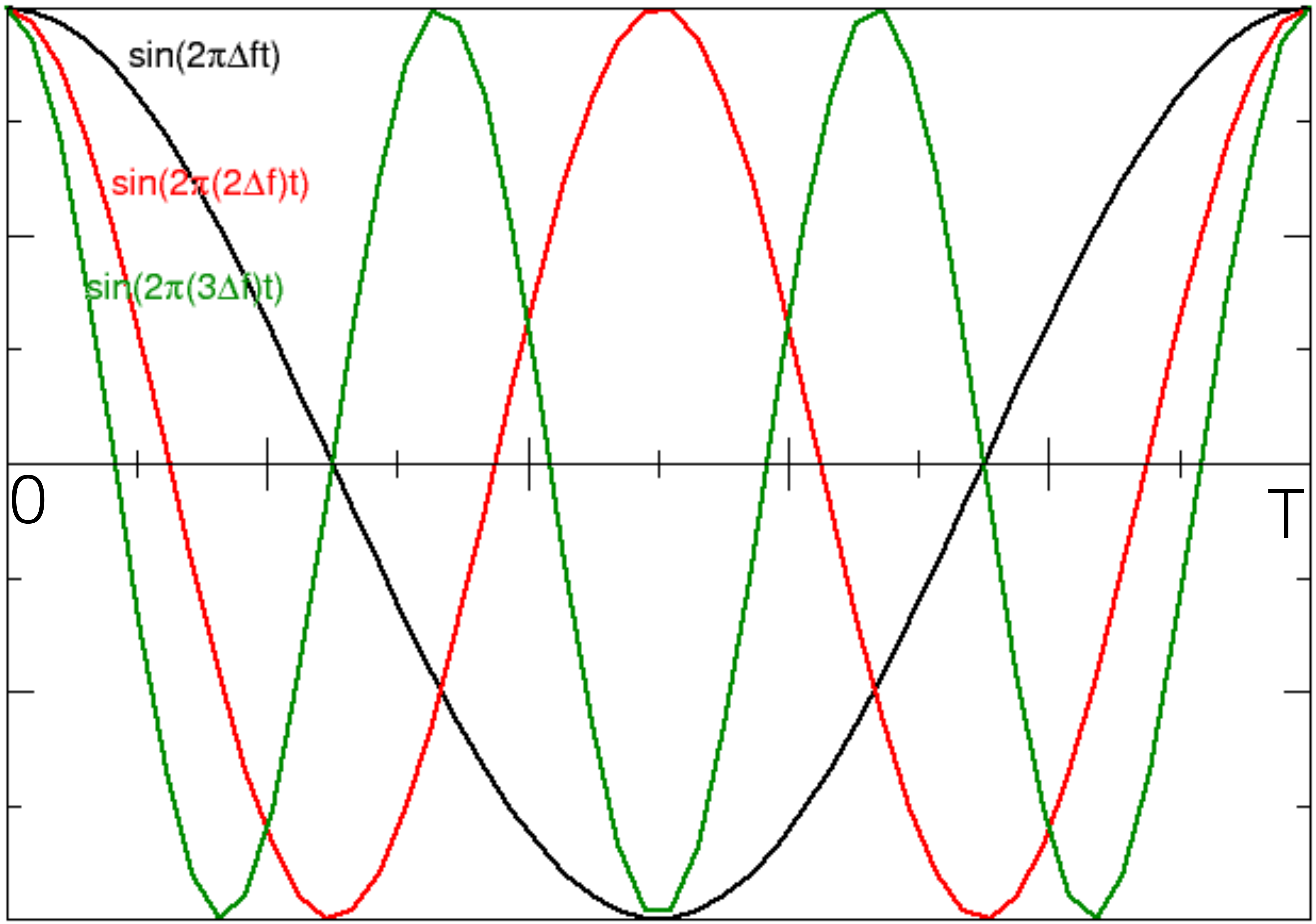
II.3. Berechnung von Spektren

periodisches Signal

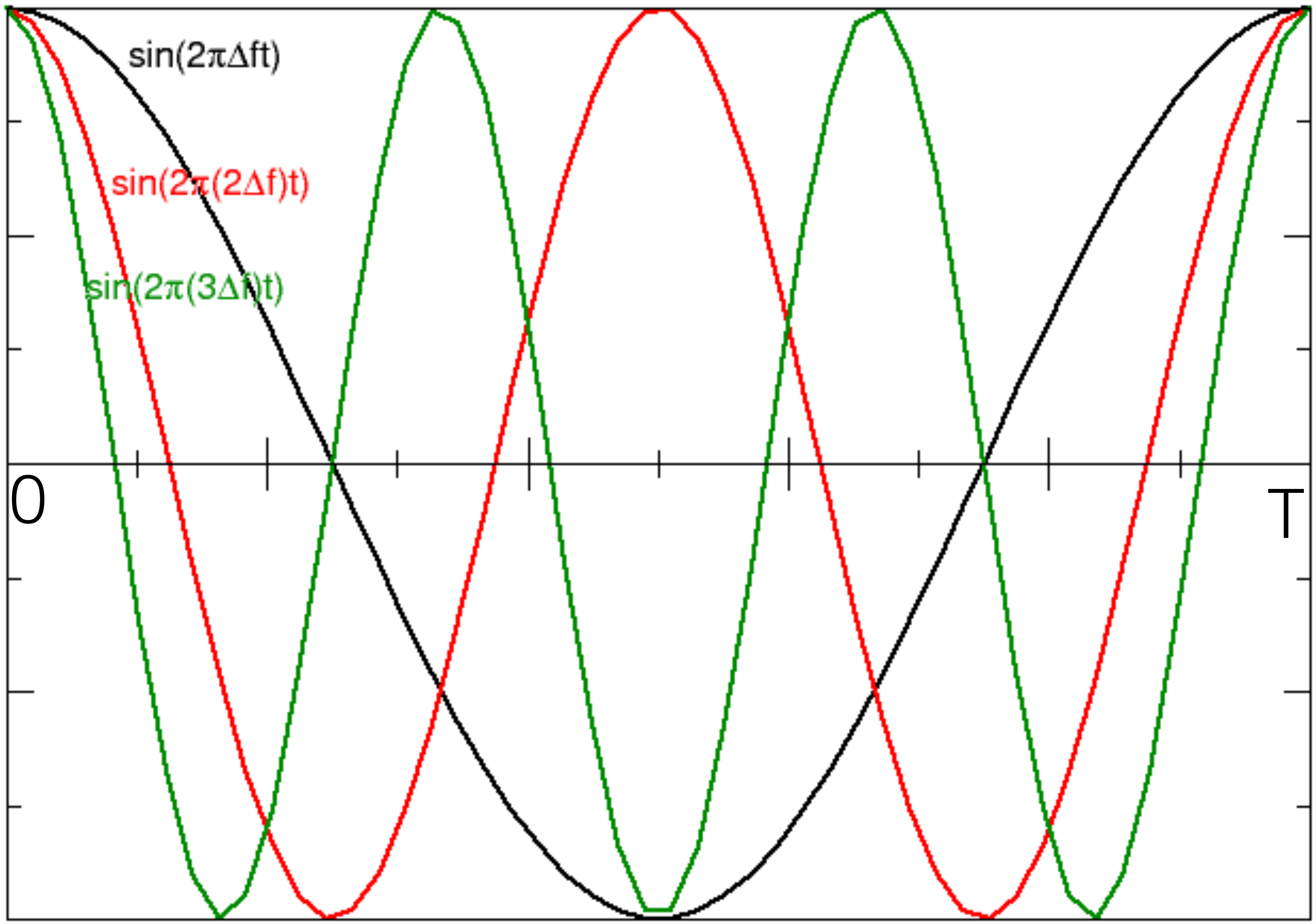




sin(2πΔft)
sin(2π(2Δf)t)
sin(2π(3Δf)t)
0
T



kleinste Frequenz: $\Delta f = 1/T$



kleinste Frequenz: $\Delta f = 1/T$

$f_n = n\Delta f \qquad n \in \mathbf{N}_0$

Fourieranalyse

Jedes Signal,
das periodisch in der Zeit ist mit Periode T,
kann durch N *Fouriermoden* beschrieben werden

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t + \phi_n\right)$$

mit den Koeffizienten a_n und den Phasen ϕ_n

Fourieranalyse

Jedes Signal,
das periodisch in der Zeit ist mit Periode T,
kann durch N *Fouriermoden* beschrieben werden

$$s(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t + \phi_n\right)$$

$=2\pi f_n = 2\pi n \Delta f$

mit den Koeffizienten a_n und den Phasen ϕ_n

mit $$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t):$$

mit $$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t):$$

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}}, \;\; c_n = \frac{a_n}{2}\left(\cos(\phi_n) + i\sin(\phi_n)\right)$$

mit $\quad e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$:

$$\boxed{s(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{i\frac{2\pi n}{T}t}}, \quad c_n = \frac{a_n}{2}\left(\cos(\phi_n) + i\sin(\phi_n)\right)$$

mit Koeffizienten $\quad c_n = \frac{1}{T}\int_t^{t+T} s(t')e^{-i\frac{2\pi n}{T}t'}\,dt' \qquad c_{-n} = c_n^*$

(siehe Übungsblatt)

Beispiel:

$$s(t) = a \sin(2\pi\nu t) \qquad t \in [0,T]$$

Beispiel:

$$s(t) = a\sin(2\pi\nu t) \qquad t \in [0,T]$$

$$= \frac{a}{2i}(e^{i2\pi\nu t} - e^{-i2\pi\nu t})$$

Beispiel:

$$s(t) = a\sin(2\pi\nu t) \qquad\qquad t\in[0,T]$$

$$= \frac{a}{2i}(e^{i2\pi\nu t} - e^{-i2\pi\nu t})$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{a}{2i}\left(e^{i2\pi\nu t'} - e^{-i2\pi\nu t'}\right) e^{-i2\pi n t'/T} dt'$$

Beispiel:

$$s(t) = a\sin(2\pi\nu t) \qquad \text{t}\in[0,\text{T}]$$

$$= \frac{a}{2i}(e^{i2\pi\nu t} - e^{-i2\pi\nu t})$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{a}{2i}\left(e^{i2\pi\nu t'} - e^{-i2\pi\nu t'}\right) e^{-i2\pi n t'/T} dt'$$

$$= \frac{}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2}\left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'}\right) dt'$$

Beispiel:

$$s(t) = a\sin(2\pi\nu t) \qquad t\in[0,T]$$

$$= \frac{a}{2i}(e^{i2\pi\nu t} - e^{-i2\pi\nu t})$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \frac{a}{2i}\left(e^{i2\pi\nu t'} - e^{-i2\pi\nu t'}\right) e^{-i2\pi n t'/T} dt'$$

$$= \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2}\left(e^{i2\pi(\nu-n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu+n/T)t'}\right) dt'$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = ?$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n} \left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2} \right)$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n} \left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2} \right)$$

$$= \frac{2i}{i2\pi f_n} \sin(2\pi f_n T/2)$$

$$
\begin{aligned}
\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt &= \frac{1}{i2\pi f_n} \left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2} \right) \\
&= \frac{2i}{i2\pi f_n} \sin(2\pi f_n T/2) \\
&= \frac{\sin(2\pi f_n T/2)}{\pi f_n}
\end{aligned}
$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n} \left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2} \right)$$

$$= \frac{2i}{i2\pi f_n} \sin(2\pi f_n T/2)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_n T/2)}{\pi f_n}$$

$$2\pi f_n T/2 = 2\pi(n/T)T/2 = \pi n$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n} \left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2} \right)$$

$$= \frac{2i}{i2\pi f_n} \sin(2\pi f_n T/2)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_n T/2)}{\pi f_n}$$

$$2\pi f_n T/2 = 2\pi (n/T) T/2 = \pi n$$

$$= 0 \quad , \quad n \neq 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n}\left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2}\right)$$

$$= \frac{2i}{i2\pi f_n}\sin(2\pi f_n T/2)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_n T/2)}{\pi f_n}$$

$$2\pi f_n T/2 = 2\pi(n/T)T/2 = \pi n$$

$$= 0 \quad , \quad n \neq 0$$

$$= \lim_{f_n \to 0} \frac{\pi T \cos(\pi f_n T)}{\pi} = T \quad , \quad n = 0$$

$$\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \frac{1}{i2\pi f_n}\left(e^{i2\pi f_n T/2} - e^{-i2\pi f_n T/2}\right)$$

$$= \frac{2i}{i2\pi f_n}\sin(2\pi f_n T/2)$$

$$= \frac{\sin(2\pi f_n T/2)}{\pi f_n}$$

$$2\pi f_n T/2 = 2\pi(n/T)T/2 = \pi n$$

$$= 0 \quad , \quad n \neq 0$$

$$= \lim_{f_n \to 0} \frac{\pi T \cos(\pi f_n T)}{\pi} = T \quad , \quad n = 0$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2}\left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'}\right)dt'$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2}\left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'}\right)dt'$$

$\nu = m/T, a = 1 :$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2} \left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'} \right) dt'$$

$\nu = m/T, a = 1 :$

$$= \frac{1}{2i}\left(\delta_{n,m} - \delta_{n,-m}\right)$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2} \left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'}\right) dt'$$

$\nu = m/T, a = 1:$

$$= \frac{1}{2i}\left(\delta_{n,m} - \delta_{n,-m}\right)$$

$$c_m = \frac{1}{2i}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t}dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2}\left(e^{i2\pi(\nu-n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu+n/T)t'}\right)dt'$$

$\nu = m/T, a = 1:$

$$= \frac{1}{2i}\left(\delta_{n,m} - \delta_{n,-m}\right)$$

$$c_m = \frac{1}{2i} \longrightarrow \frac{1}{i} = a_m(\cos(\phi_m) + i\sin(\phi_m))$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i2\pi f_n t} dt = \delta_{n,0}$$

$$c_n = \frac{a}{2iT}\int_{-T/2}^{T/2} \left(e^{i2\pi(\nu - n/T)t'} - e^{-i2\pi(\nu + n/T)t'}\right) dt'$$

$\nu = m/T, a = 1:$

$$= \frac{1}{2i}\left(\delta_{n,m} - \delta_{n,-m}\right)$$

$$c_m = \frac{1}{2i} \longrightarrow \frac{1}{i} = a_m(\cos(\phi_m) + i\sin(\phi_m))$$

$$a_m = 1\ ,\ \ \phi_m = \frac{3\pi}{2}$$

$$c_{-m} = -\frac{1}{2i} \longrightarrow a_{-m} = 1 \; , \; \phi_{-m} = \pi/2$$

$$c_{-m} = -\frac{1}{2i} \longrightarrow a_{-m} = 1\ ,\ \phi_{-m} = \pi/2$$

oder

$$Re(c_m) = Re(c_{-m}) = 0$$

$$Im(c_m) = -Im(c_{-m}) = -1$$

$$c_{n \neq m} = 0 \quad , \quad n = -N, \cdots N$$

$$c_{-m} = -\frac{1}{2i} \longrightarrow a_{-m} = 1\ ,\ \phi_{-m} = \pi/2$$

oder

$$Re(c_m) = Re(c_{-m}) = 0$$

$$Im(c_m) = -Im(c_{-m}) = -1$$

$$c_{n\neq m} = 0 \quad , \quad n = -N, \cdots N$$

für zeitlich kontinuierliche Signale: N beliebig