3. Übung der Vorlesung *Verfahren der Datenanalyse gemessener Signale*

Wintersemester 2017/2018, Universität Frankfurt am Main

Dozent: PD Axel Hutt (axel.hutt@dwd.de)

abzugeben bis 9. November 2017, auf Papier oder per email

1. Betrachten Sie ein zeitlich kontinuierliches Signal $x(t) = \sin(6\pi t)$ der Dauer T.

   (a) Geben Sie den analytischen Ausdruck für dessen Fouriertransformierte für T=5s an. Bei welchen Frequenzen hat die Fouriertransformierte Nullstellen ?

   (b) Wie verändert sich die Transformierte, wenn man die Dauer zu T=1s bzw. T=0.333s wählt ?

2. Nehmen Sie das Modellsignal *TransienteOszillationen.dat* (liegt auf der Vorlesungshomepage), das in der Vorlesung vorgestellt wurde. Berechnen Sie numerisch den Real- und Imaginärteil der Fouriertransformierten. Wie gross ist der *spectral leakage*-Effekt ?

3. Das **Wiener-Khinchin Theorem** stellt eine Beziehung zwischen der Autokorrelationsfunktion $C(\tau)$ und der *power spectral density* (PSD) her. Dies soll im Folgenden gezeigt werden.
   Für ein *im weiteren Sinn stationäres* Signal $x(t) \in \mathcal{R}$ in einem Zeitinterval $t \in [-T/2; T/2]$ der Länge T gilt $C(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$ mit der Zeitverschiebung τ. Hier ist $E[\cdot]$ der Erwartungswert. Nach Definition ist die Energiedichte des Signals gegeben als $\rho(\nu) = E[X_T^*(\nu)X_T(\nu)]$ mit Frequenz ν, wobei

$$X_T(\nu) = \int_{-T/2}^{T/2} x(t)e^{-i2\pi\nu t}\,dt$$

   die Fouriertransformierte von $x(t)$ ist.

   (a) Zeigen Sie, dass

$$\rho(\nu) = \int_{-T/2}^{T/2}\int_{-T/2}^{T/2} E[x(t)x(s)]e^{-i2\pi(t-s)}dtds\ .$$

(b) Es gilt ausserdem allgemein fuer jede Funktion $g(t)$

$$\int_{-T/2}^{T/2} dt \int_{-T/2-t}^{T/2-t} d\tau g(\tau) = \int_{-T}^{T} (T - |\tau| g(\tau)) d\tau. \tag{1}$$

Zeigen Sie dies.

(c) Zeigen Sie weiterhin, dass mittels der Koordinatentransformation $\tau = s - t$

$$\rho(\nu) = T \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) C(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} \, d\tau.$$

Hierführ können Sie den Ausdruck (1) verwenden.

(d) Nun ist PSD definiert als Leistungsdichte, d.h. man kann definieren

$$S_T(\nu) = \frac{\rho(\nu)}{T} = \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\tau|}{T}\right) C(\tau) e^{-i2\pi\nu\tau} \, d\tau \ .$$

Leiten Sie hieraus die bekannte Beziehung zwischen Autokorrelationsfunktion und PSD $S(\nu)$ für unendlich lange Signale ab, i.e. $T \to \infty$. Zeigen Sie ausserdem, wie sich aus einer gegebenen Funktion $S(\nu)$ die Autokorrelationsfunktion berechnen lassen kann und dass $C(0)$ der statistischen Varianz des Signals gleich ist. Wir nehmen dabei an, dass der zeitliche Mittelwert des Signals verschwindet.

(e) Für unendlich lange Signale gemessen in ergodischen Systemen gilt nun zusätzlich

$$C(0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt. \tag{2}$$

Leiten Sie diese Beziehung ab. Zeigen Sie, wie sich hieraus direkt die *Parseval-Identität*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} S(\nu) d\nu$$

ergibt.