

Spektralanalyse physiologischer Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 8

zum Übungsblatt

1.

$$g(t) = \alpha I_0 \sum_i e^{-\alpha(t-t_i)}$$

$$f(t) = \alpha e^{-\alpha t} \Theta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1 \quad \forall \alpha$$

$$\alpha \rightarrow \infty : f(t) \approx \alpha - \alpha^2 t \quad , \quad 0 \leq t \leq 1/\alpha$$

$$f(t) = 0 \quad , \quad t < 0 \quad , \quad t > 1/\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau \approx \int_0^{1/\alpha} (\alpha - \alpha^2 \tau) (h(t) - \tau \dot{h}(t)) d\tau$$

$$\alpha \rightarrow \infty \quad = h(t)$$



$$f(t) \rightarrow \delta(t) \quad , \quad \alpha \rightarrow \infty$$

2.

$$u(t) = -\gamma \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(f) \tilde{g}(f) e^{i2\pi f t} df$$

$$\beta \dot{G}(t) + G(t) = -\delta(t)$$

$$\tilde{G}(f) = \frac{-1}{1 + i2\pi\beta f}$$

$$E[u(t)u(t - \tau)] = \gamma^2 F \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{G}(f) \tilde{G}(f') E[\tilde{g}(f) \tilde{g}(f')] e^{i2\pi(f t + f' t - f' \tau)} df df'$$

$$E[\tilde{g}(f) \tilde{g}(f')] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{E[g(t)g(t')]}_{=I_0^2 F \delta(t-t')} e^{-i2\pi(f t + f' t')} dt dt'$$

$$= I_0^2 F \delta(f + f')$$

$$= I_0^2 \gamma^2 F \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{G}(f)|^2 e^{i2\pi f \tau} df$$

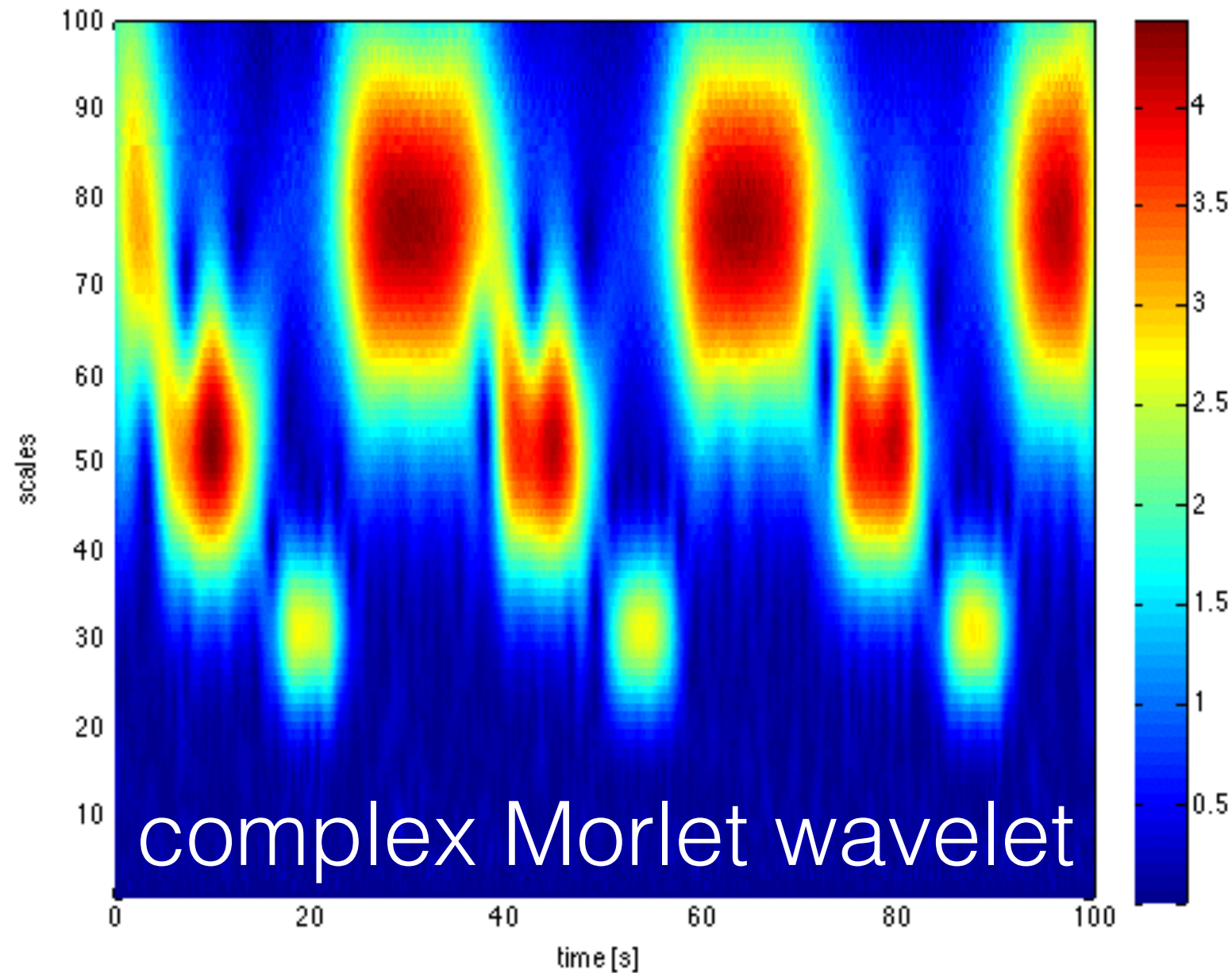
$$= \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{i2\pi f\tau} df$$

$$\longrightarrow S(f) = \frac{I_0^2 \gamma^2 F}{1 + 4\pi^2 \beta^2 f^2}$$

weiter mit Vorlesung 8

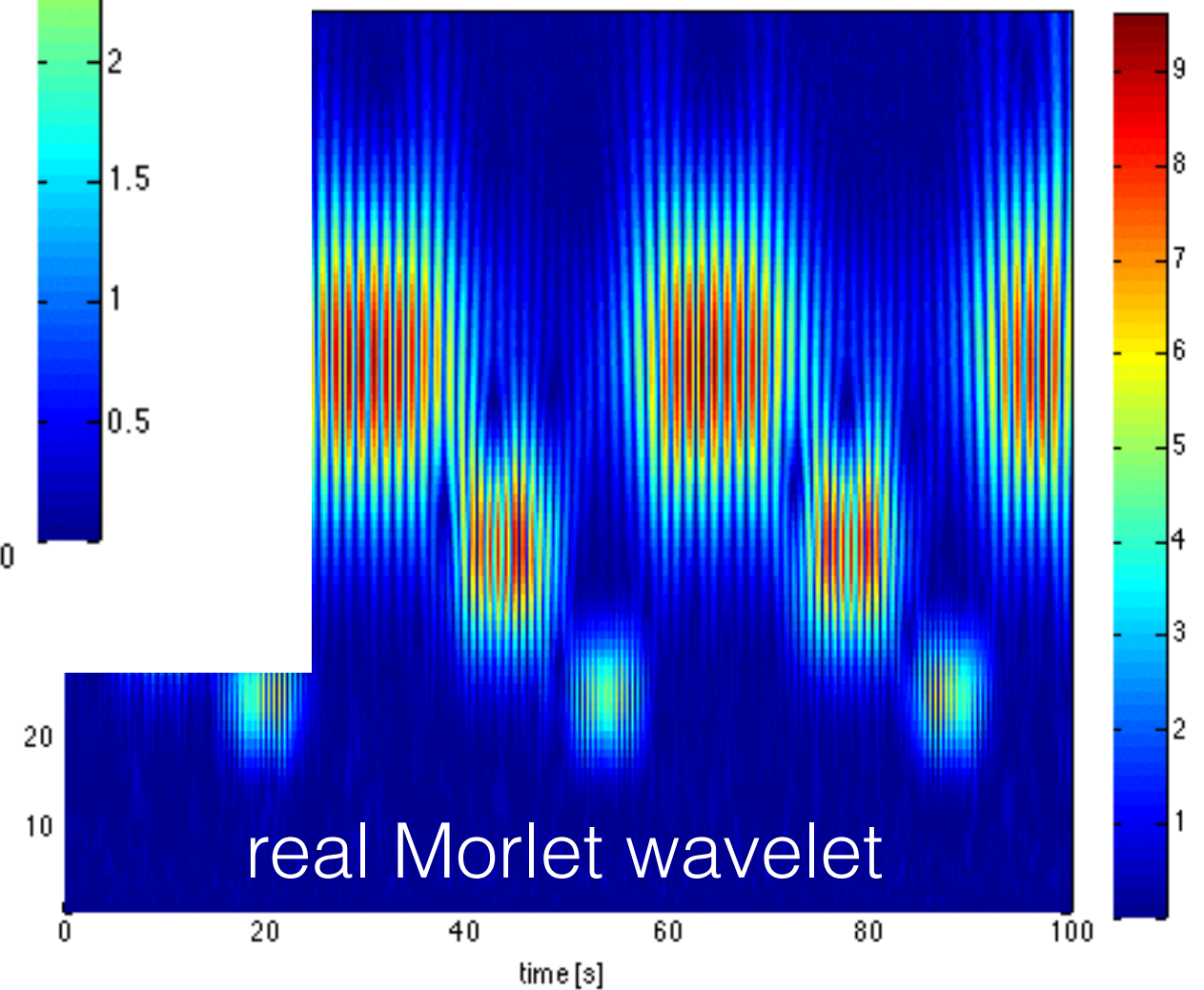
Verbesserungen:

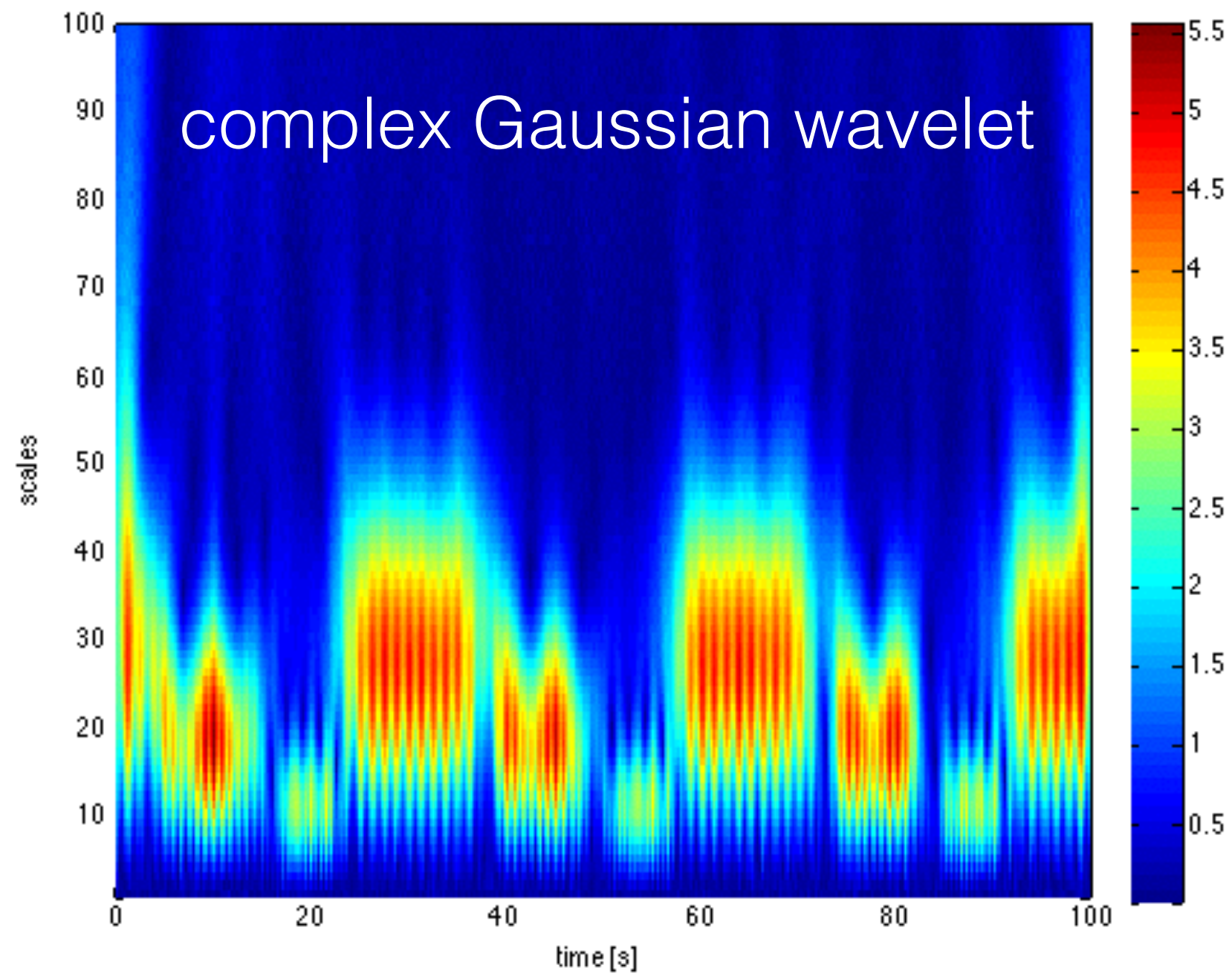
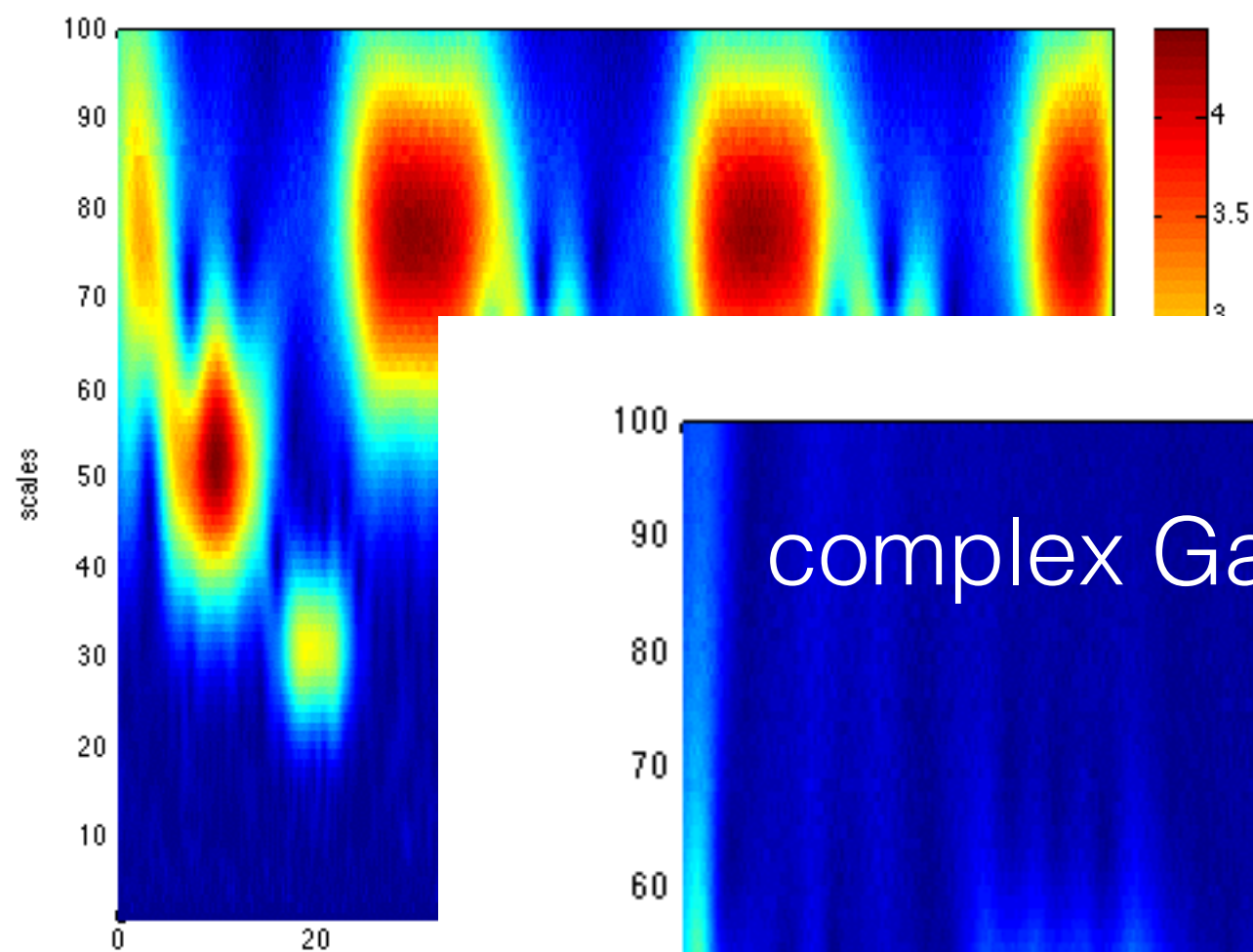
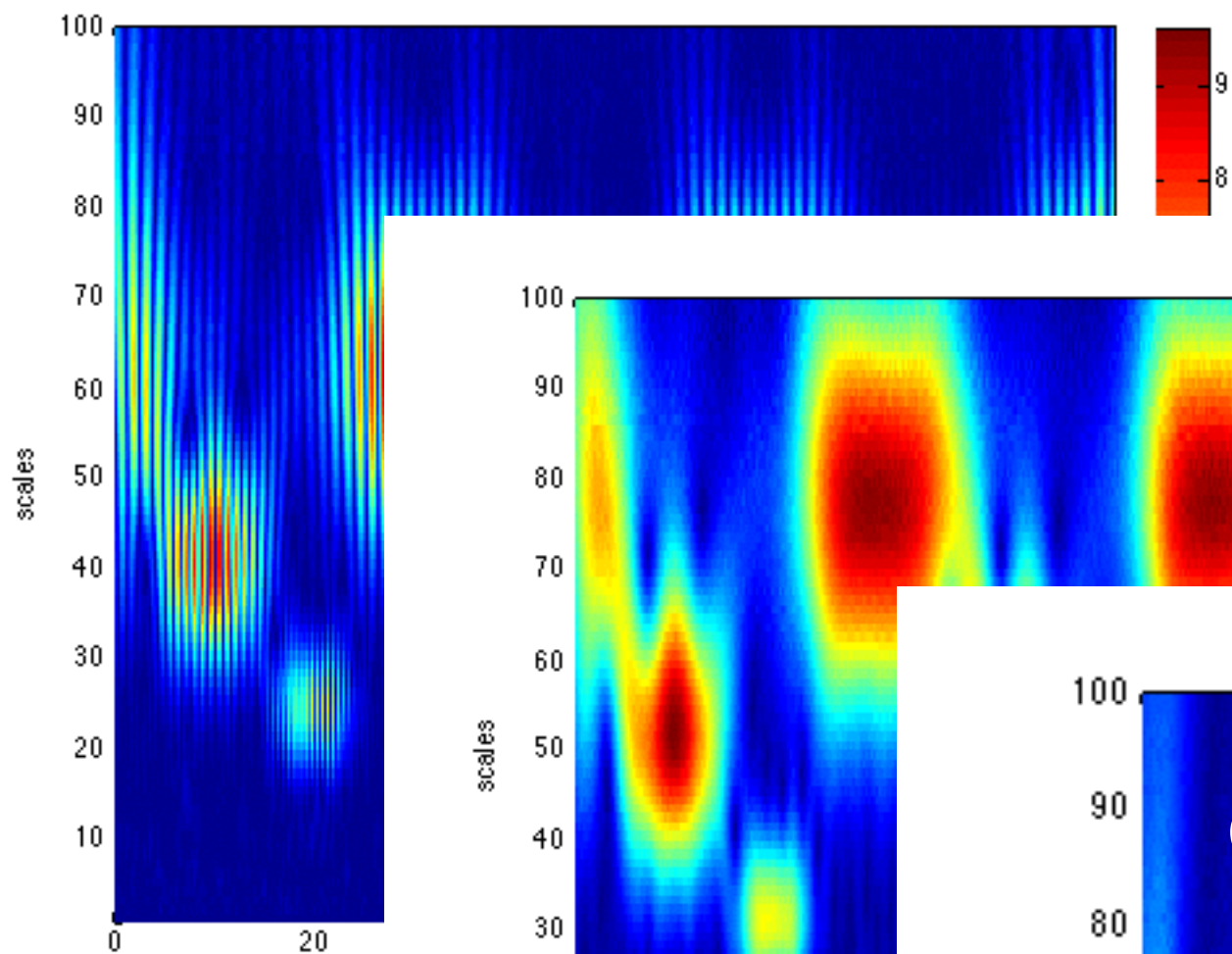
1. Unterstruktur



(TF_13.m)

bessere Wahl des
wavelets





(TF_13.m)

Beispiele für wavelets

Komplexwertiges Morlet wavelet

$$\Psi(t) = k_1 e^{-t^2} (e^{-i\sigma t} - k_2)$$

realwertiges Morlet wavelet

$$\Psi(t) = k e^{-\sigma t^2} \cos(5t)$$

komplexwertiges Gauss wavelet

$$\Psi(t) = k e^{-\sigma t^2} e^{it}$$

Verbesserungen:

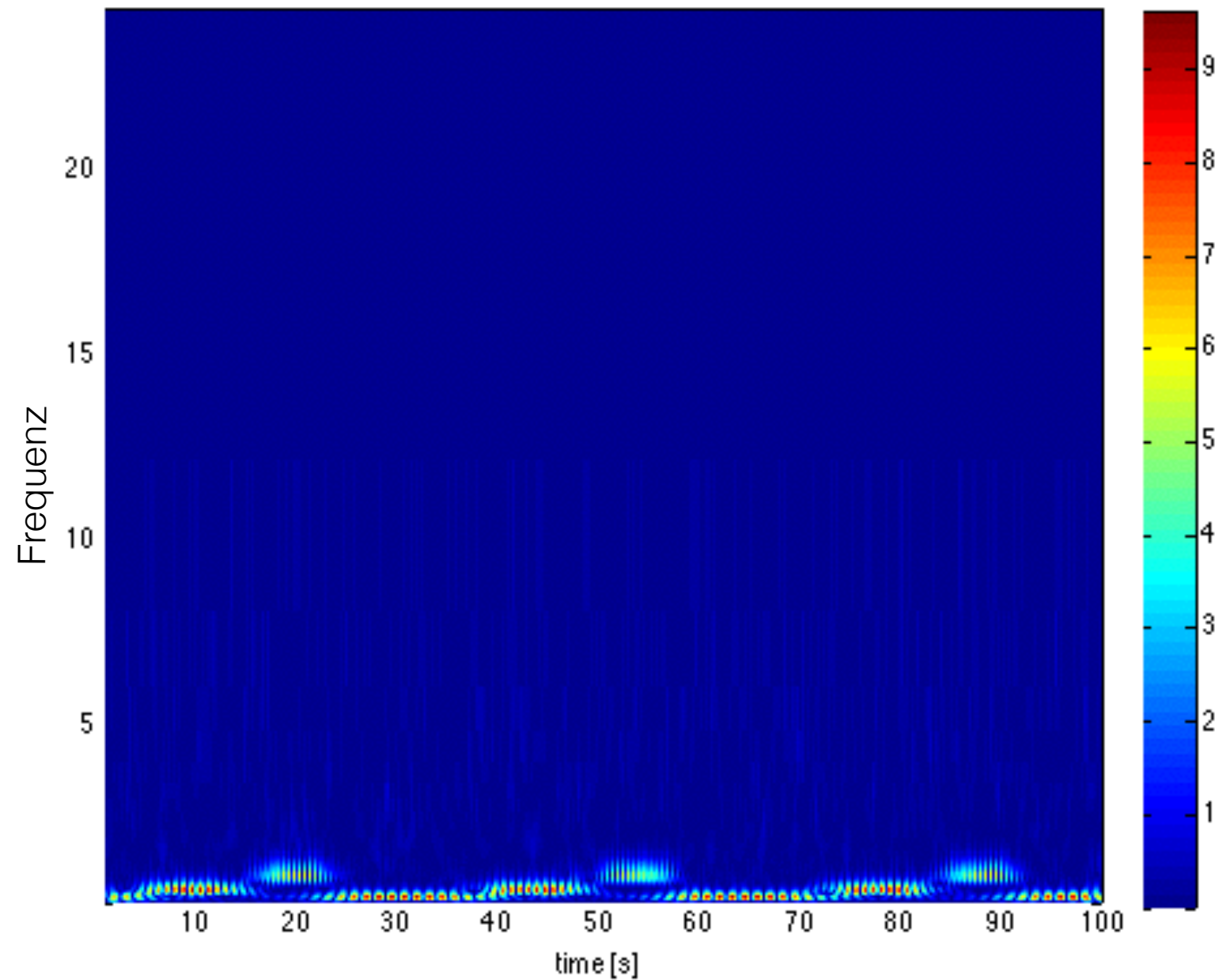
2. kleine Leistung bei kleinen Skalen

keine Verbesserung in klassischer Wavelet-Analyse

da Teil der Konstruktion !!!

Verbesserungen:

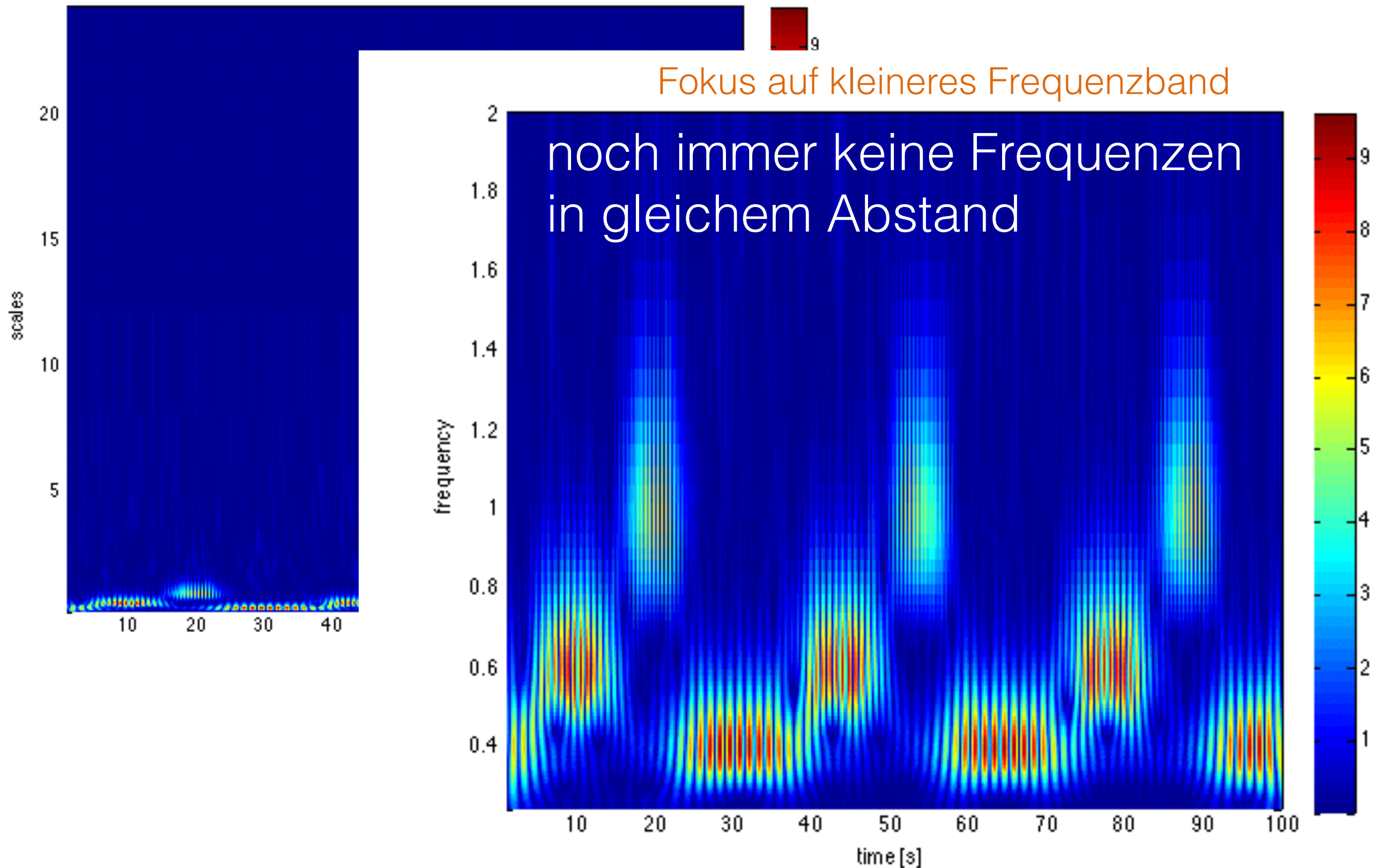
3. erweiterte Leistungsspitze

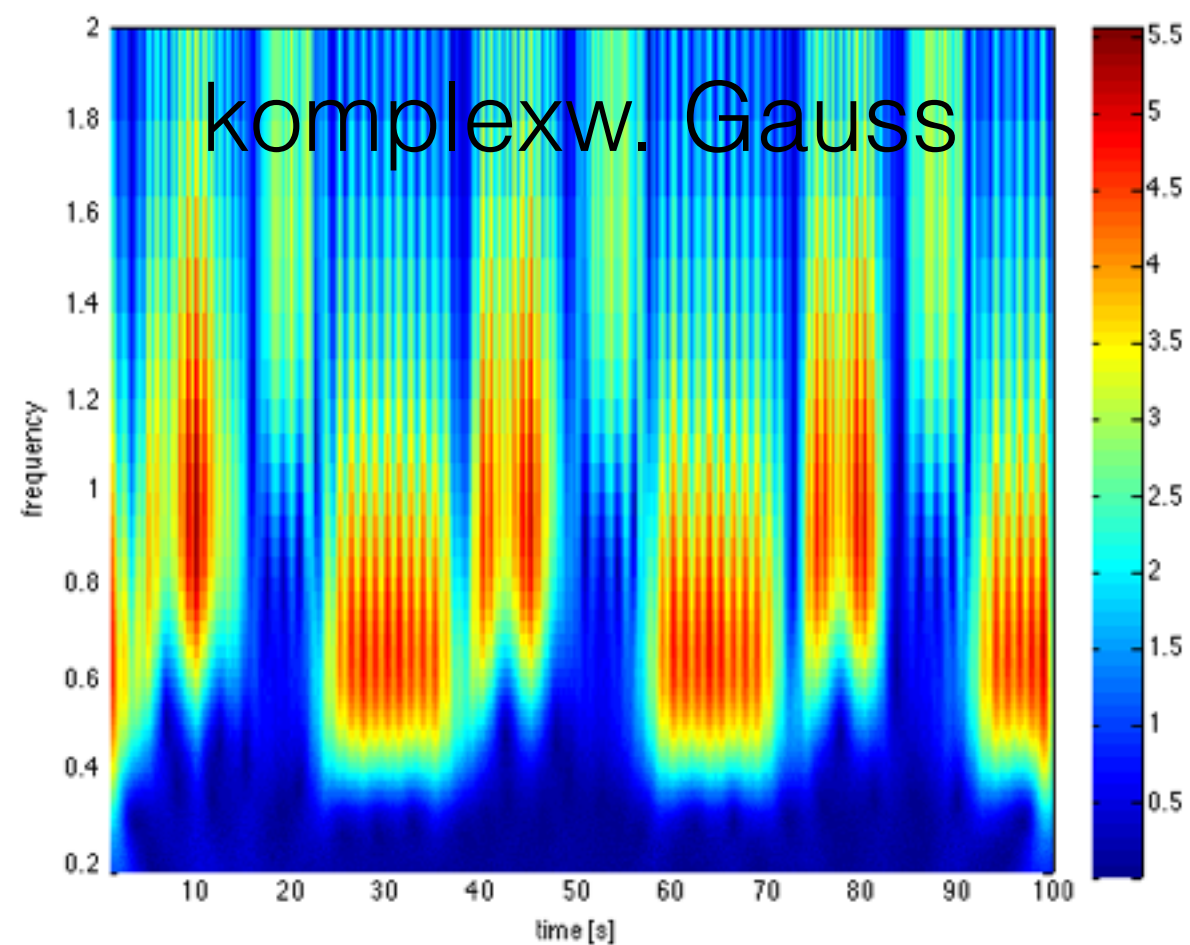
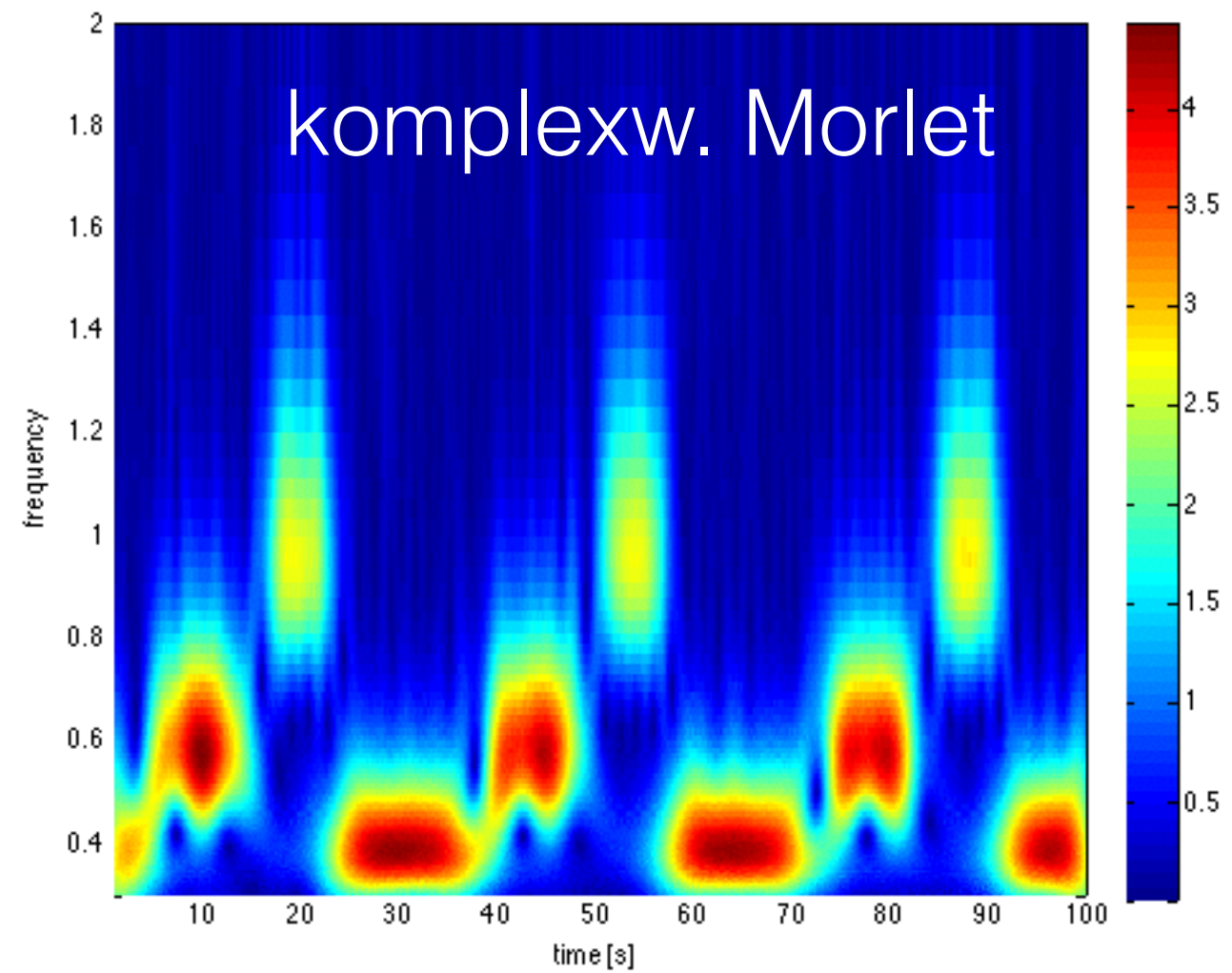
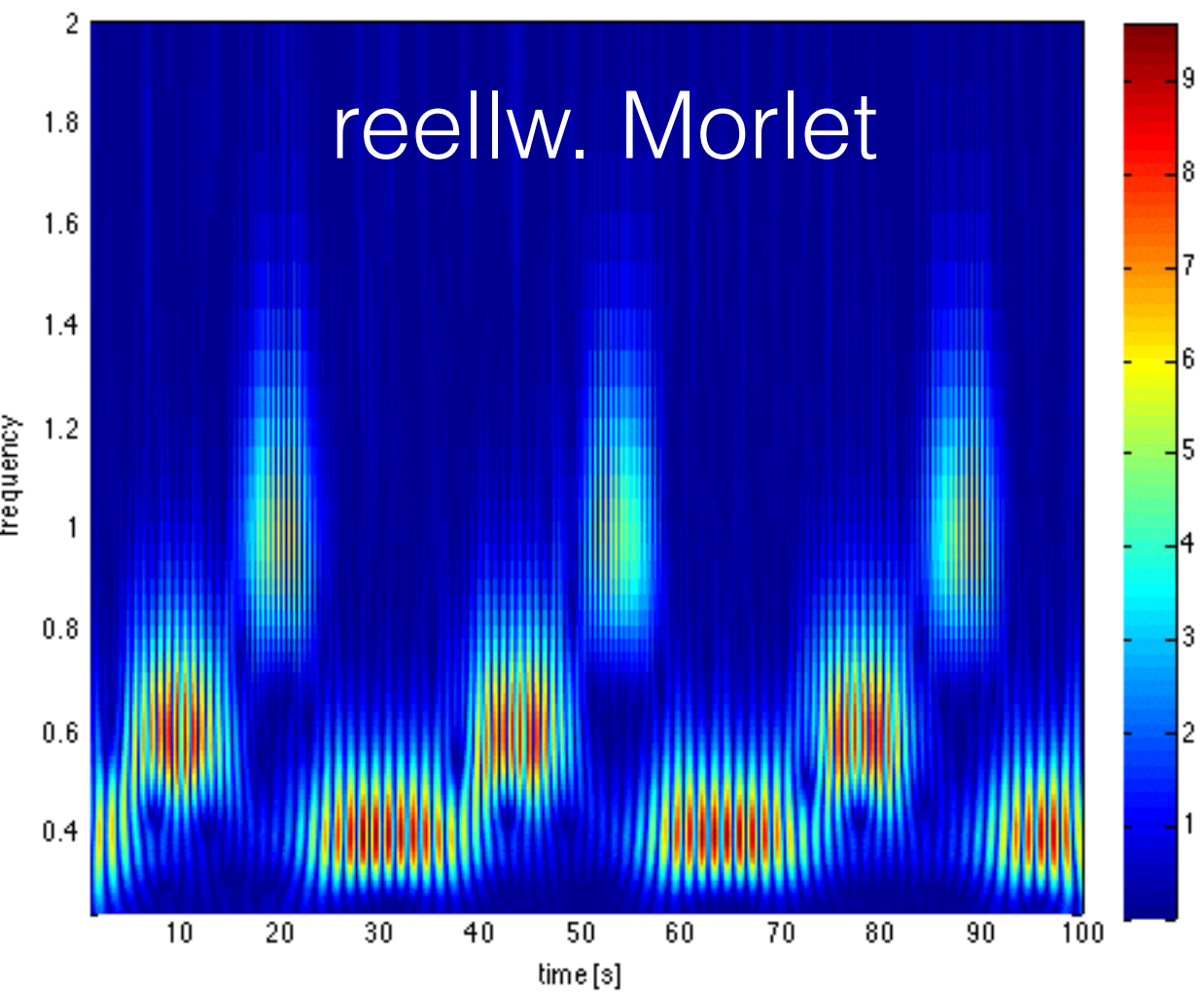


100 Skalen als
Frequenzen aufgetragen

Verbesserungen:

3. erweiterte Leistungsspitze

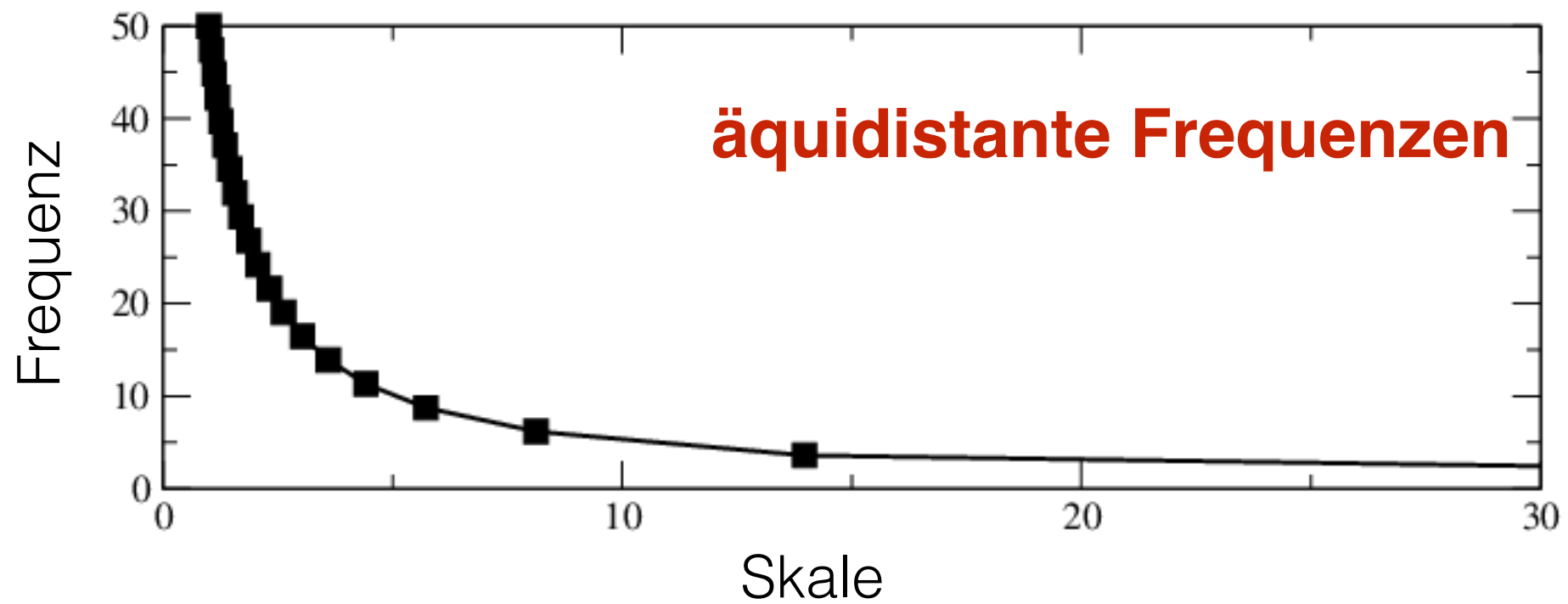
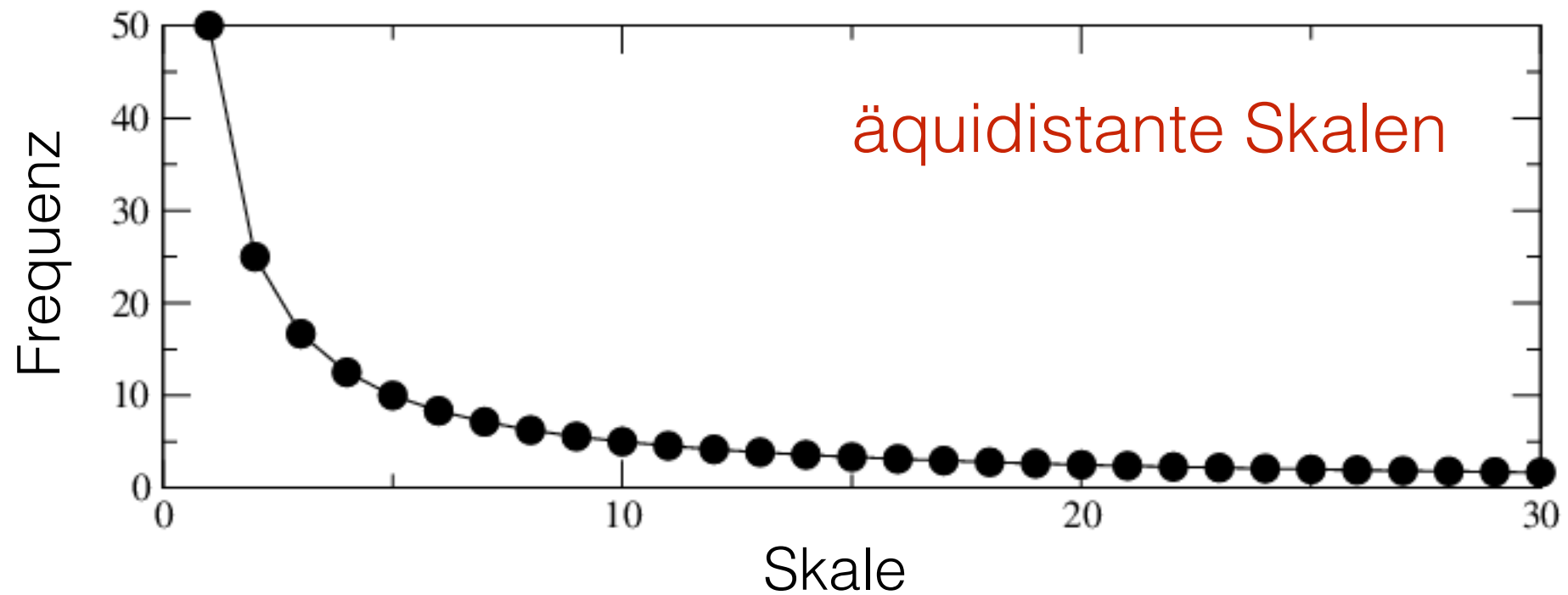




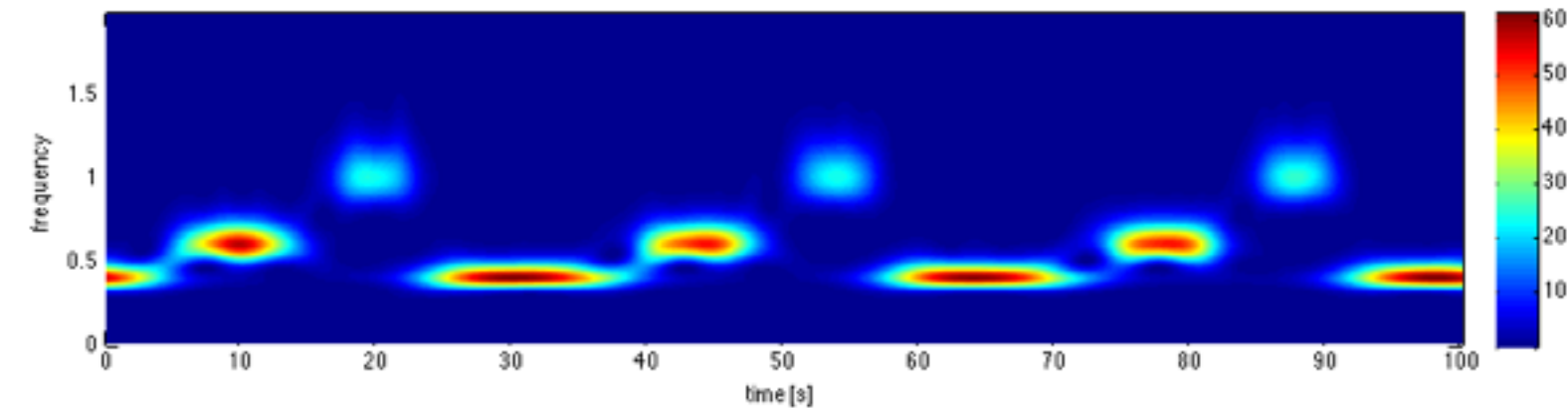
(TF_14.m)

- physikalische Welt der Messung:
Frequenzen sind interpretierbar
- Skalen eher nur für Theorie interessant
- Wahl:
Festlegung von Pseudo-Frequenzen, die von Interesse sind

Lösung:

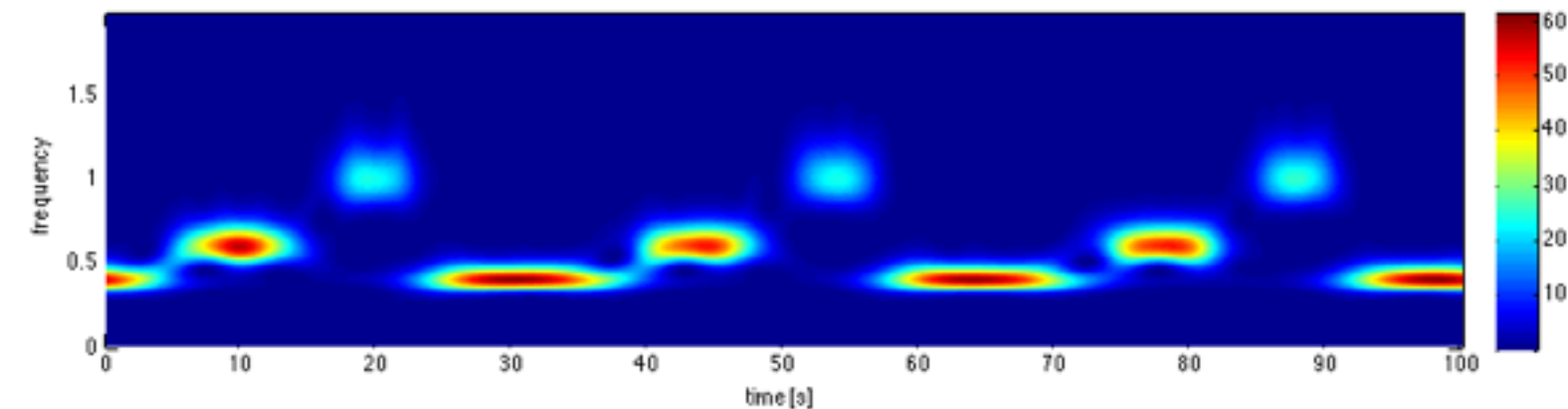


Nun mit regelmässigem Frequenzintervall



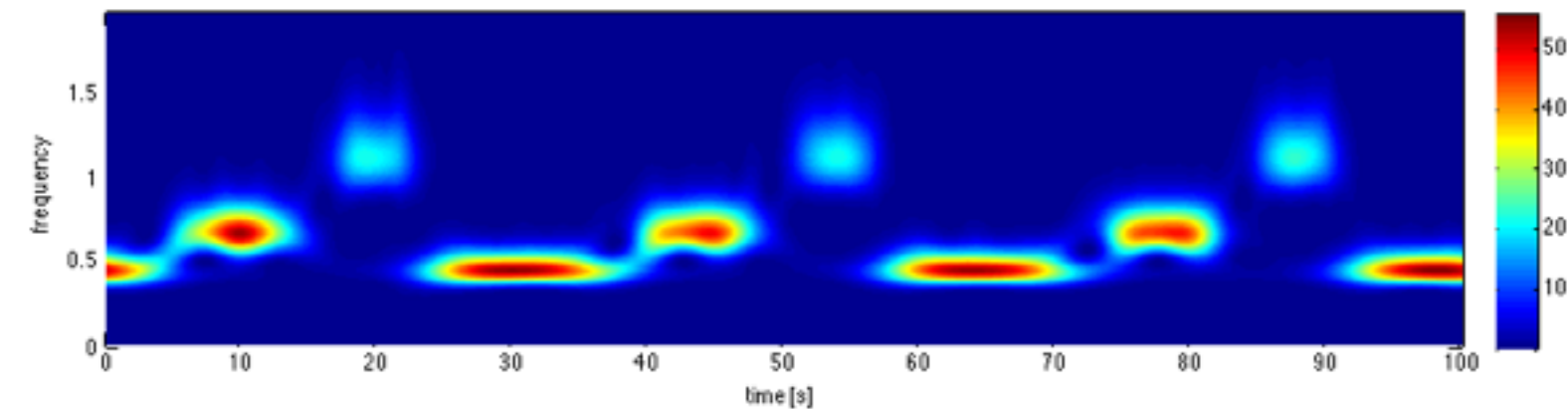
analytical Morlet

$$\tilde{\Psi}(f) = k e^{-(2\pi f - \omega_0)^2 / 2} \Theta(f)$$



nonanalytical Morlet

$$\tilde{\Psi}(f) = k e^{-(2\pi f - \omega_0)^2 / 2}$$



admissible Morlet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{Morlet}(t) dt = 0$$

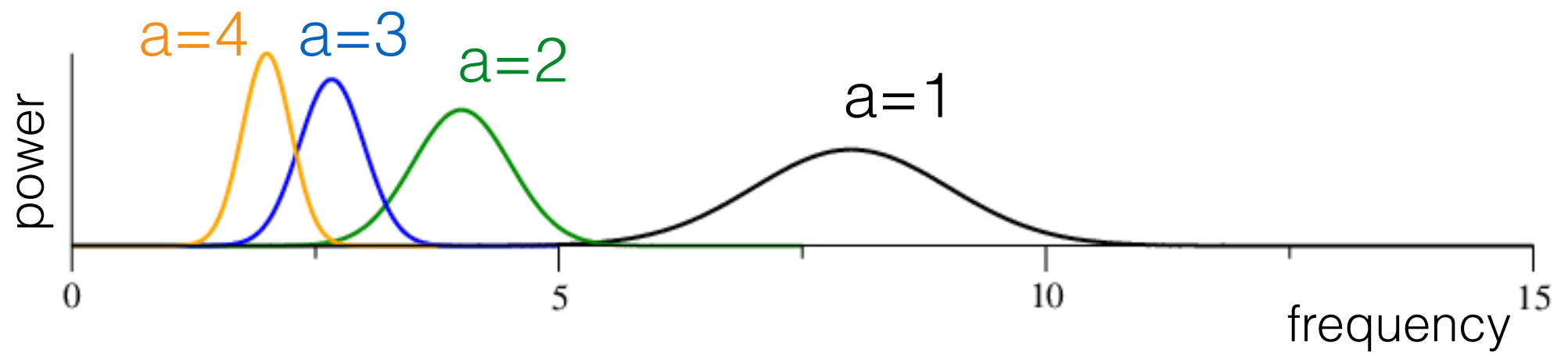
Diskrete Wavelet-Transformation

kontinuierliche W-Transformation

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{\Psi} \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

ist redundant, da a beliebig und ψ nicht orthogonal sind.

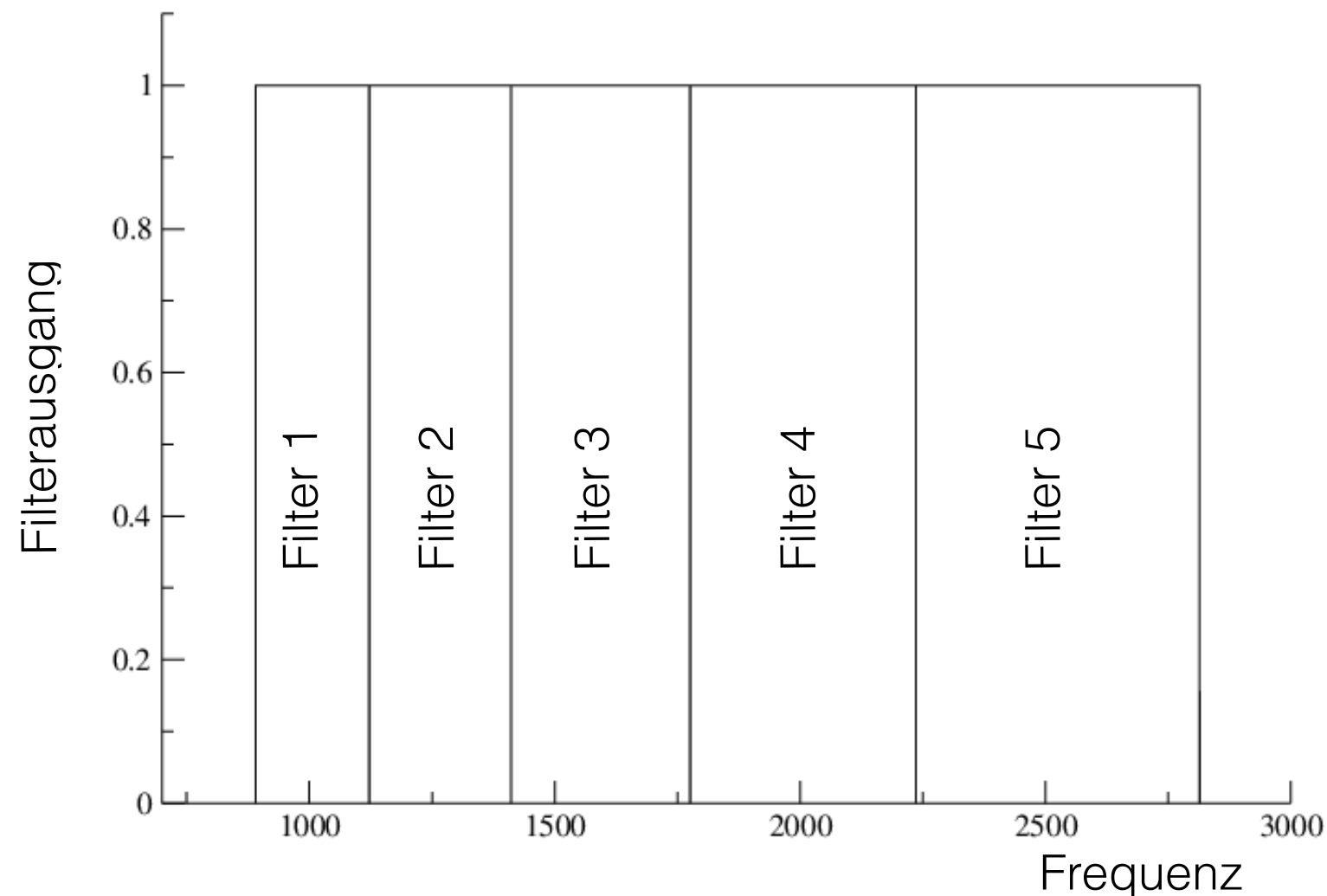
dies sieht man auch im Frequenzraum:



da Skalen beliebig:

CWT gut für Visualisierung, doch keine gute Analyse

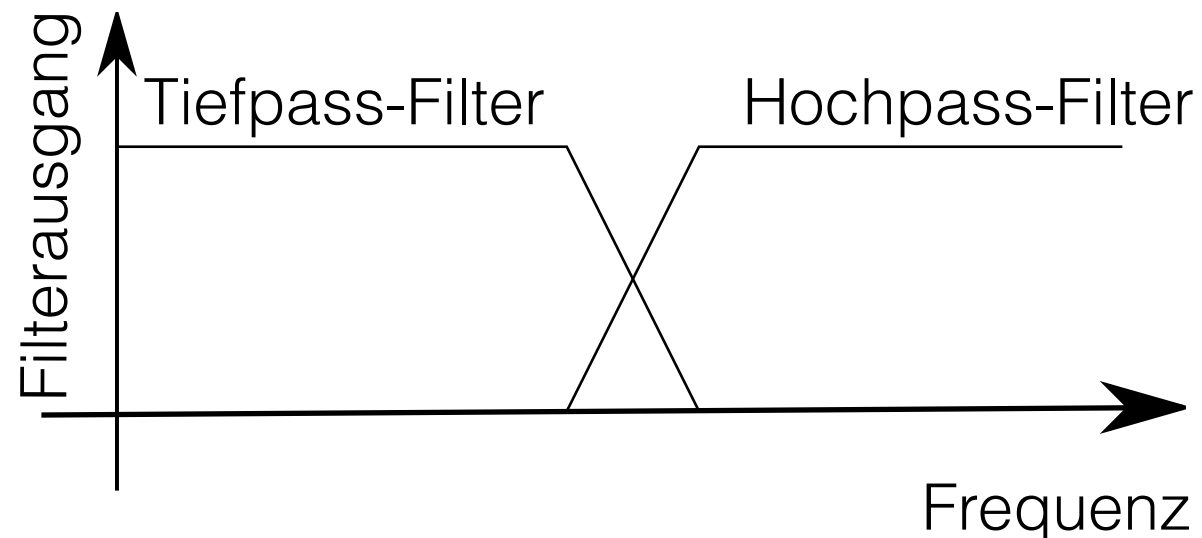
besser eine Analyse wie in Filterbanken



Filterbank

- System generiert Satz von Signalen $s_n(t)$ aus einem Signal $s(t)$
- Signale $s_n(t)$ entsprechen einem Frequenzbereich eines Bandpassfilters n
- Frequenzbereiche decken den Frequenzumfang des Signals vollständig ab.

Quadrature Mirror Filter:



$H_0(z)$, $H_1(z)$ sind Filterfunktionen

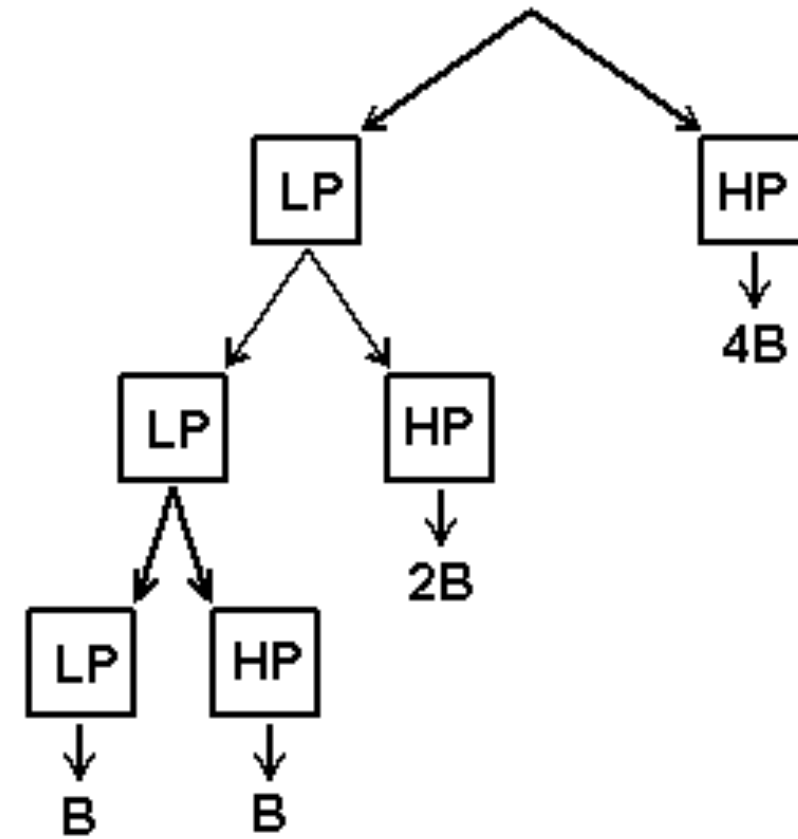
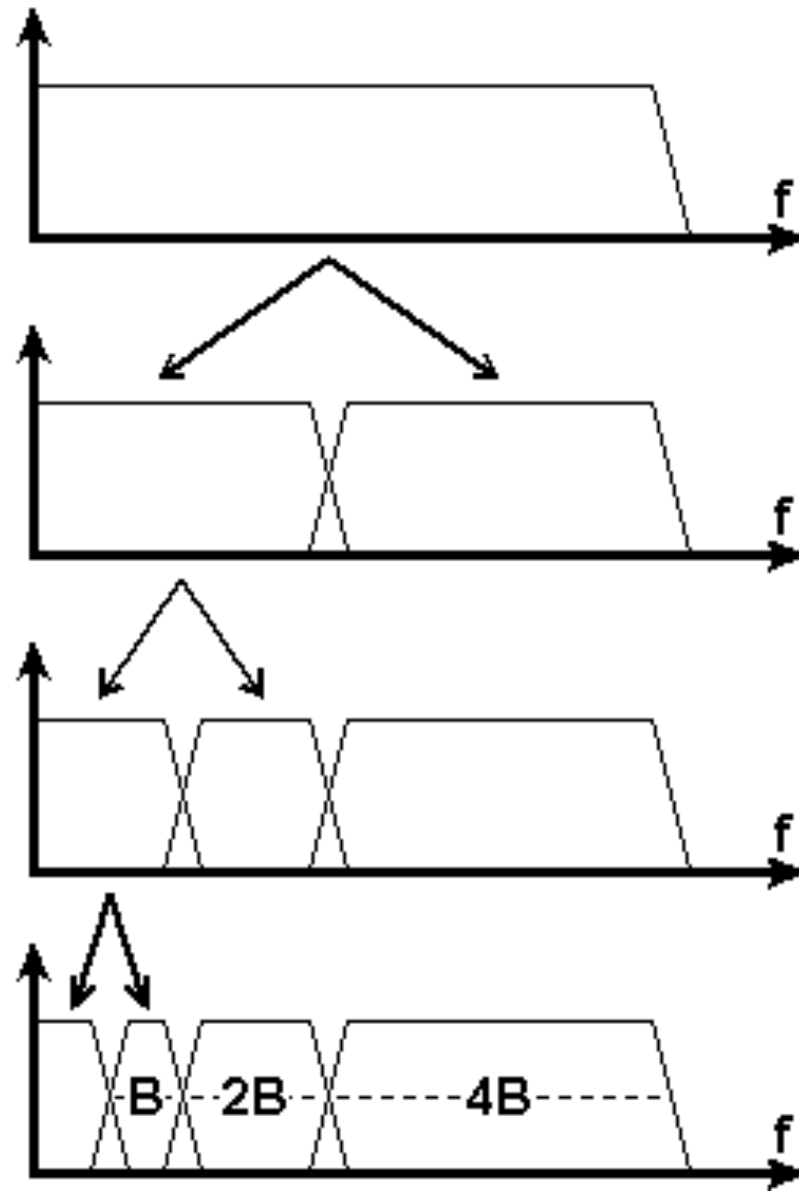
$$H_0(z) = H_1(-z)$$

$$|H_0(e^{i\omega})|^2 + |H_1(e^{i\omega})|^2 = 1$$

(Abtastrate auf 2π normiert)

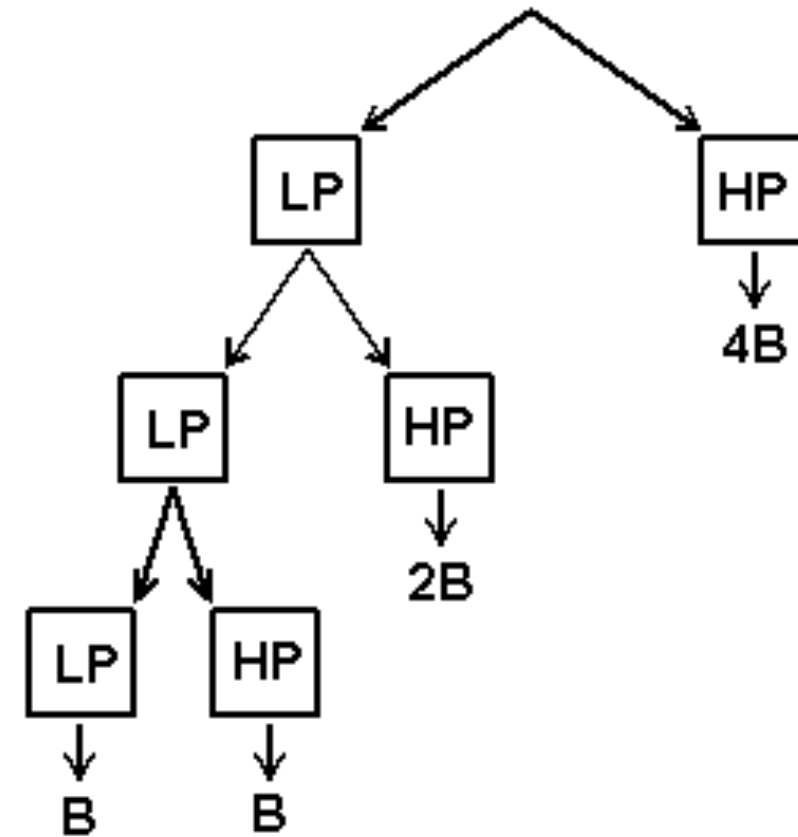
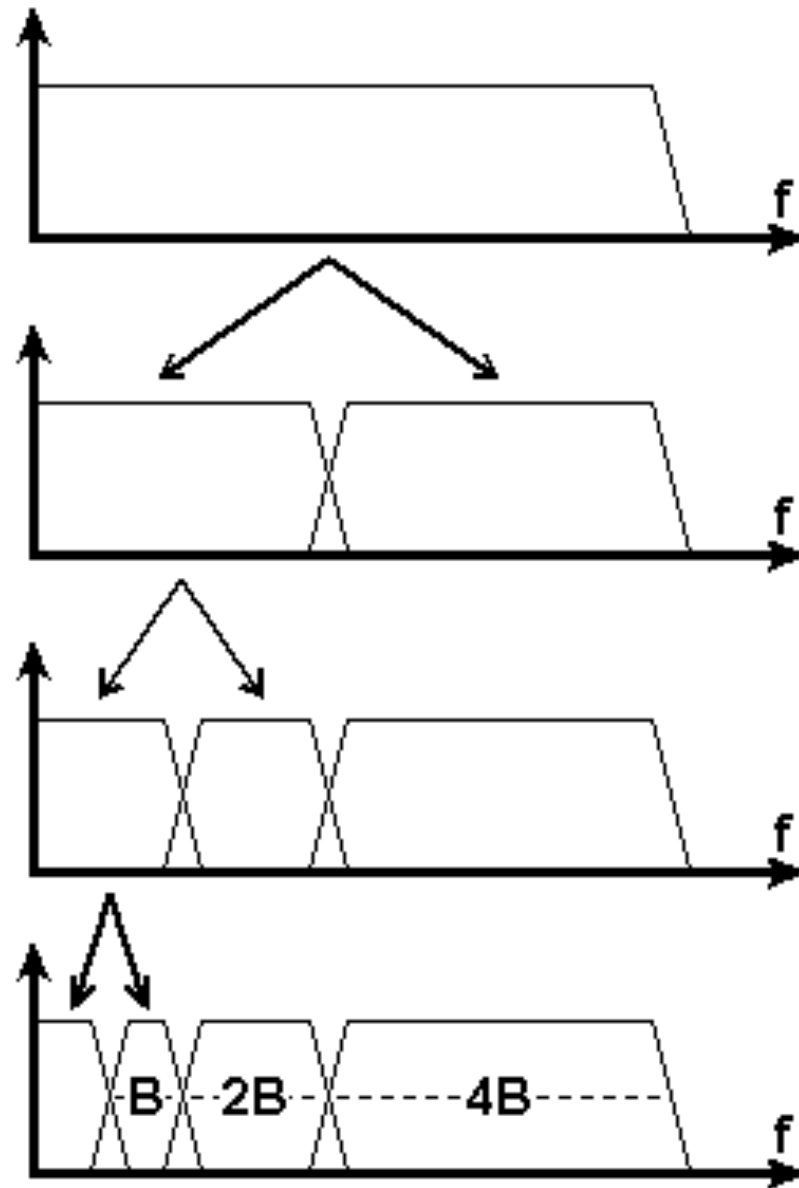
Idee:

Frequenzraum

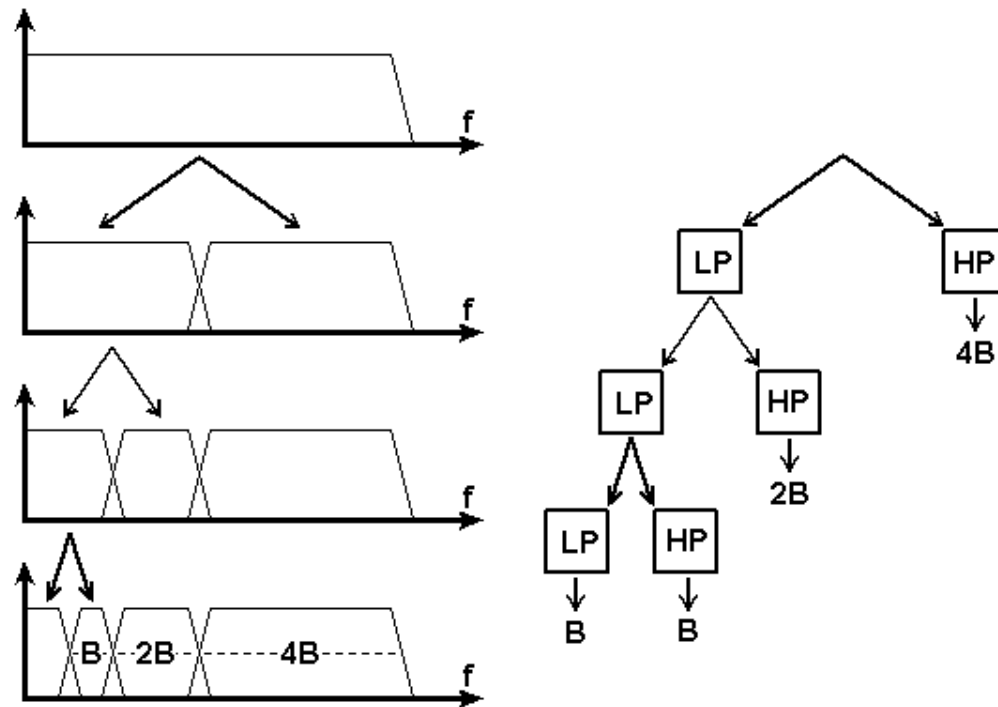


Idee:

Frequenzraum



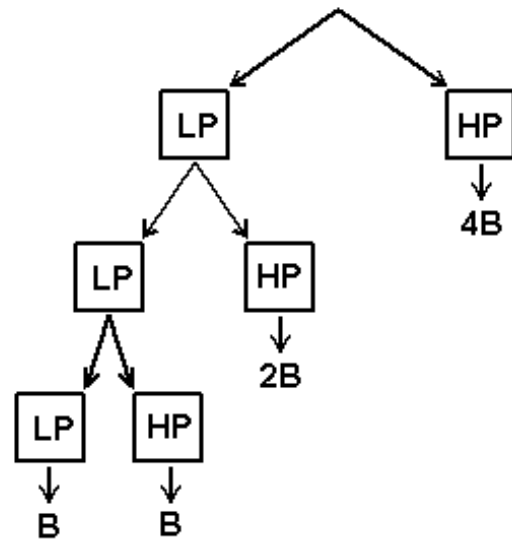
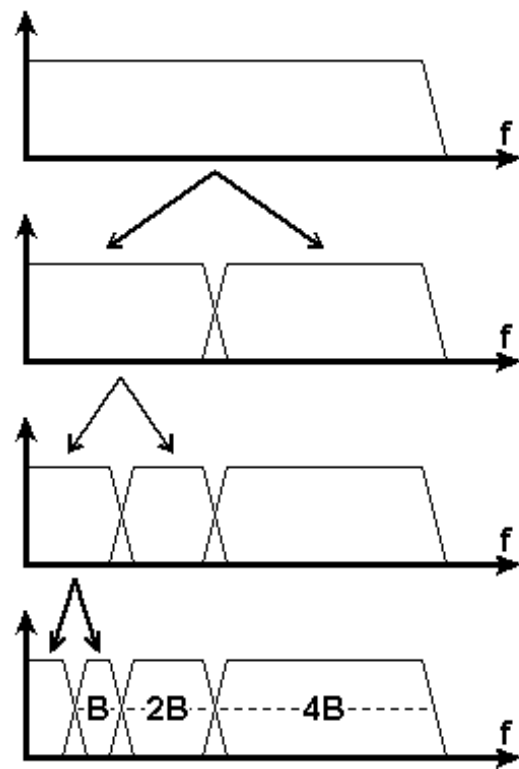
- man wendet *quadrature mirror filter* an
- nur Spektrum von Tiefpass-Signal wird halbiert



Filterbanken mit konstantem Q.

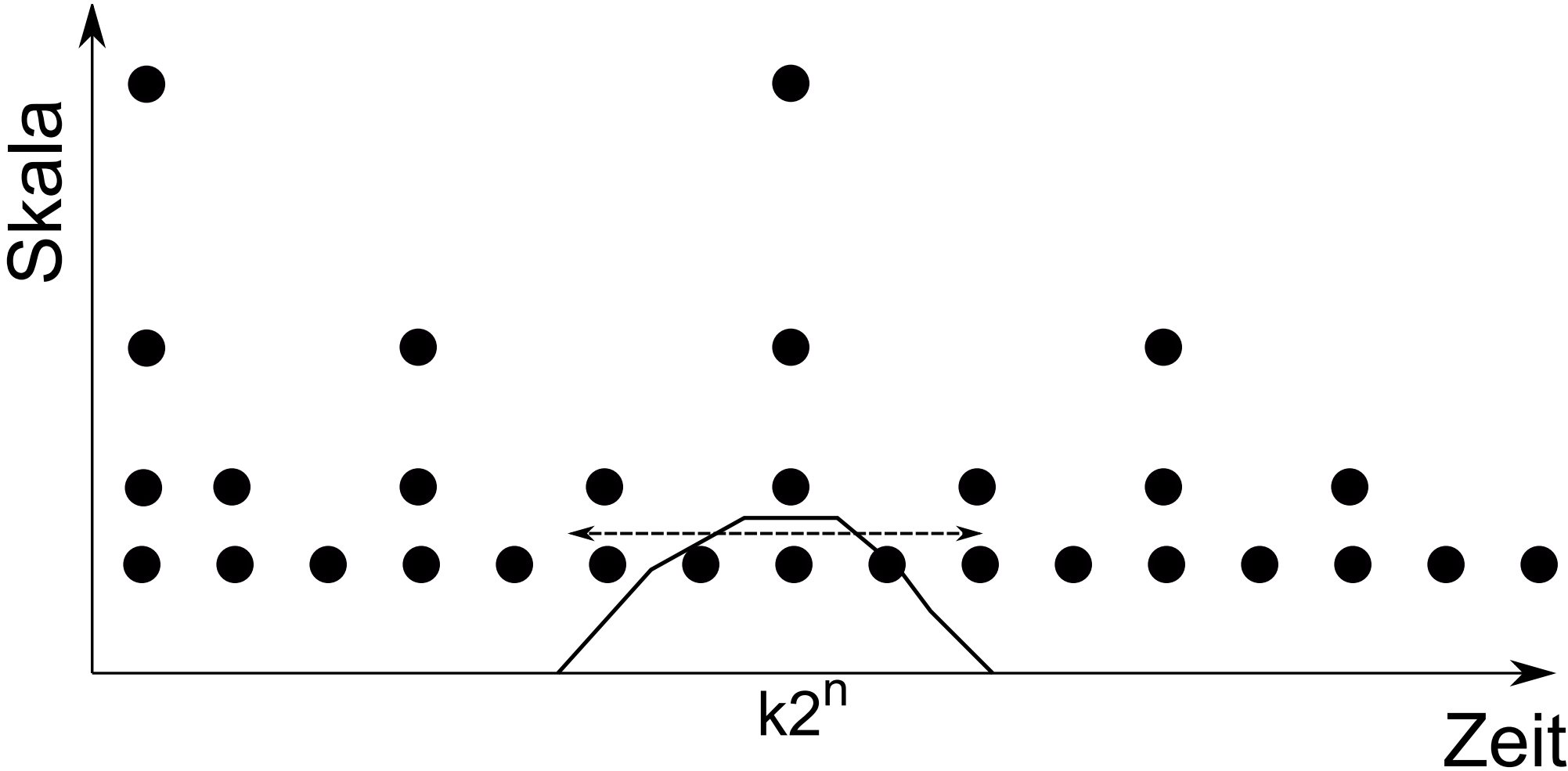
- man wendet *quadrature mirror filter* an
- nur Spektrum von Tiefpass-Signal wird halbiert
- konstantes Q der Filter als Konsequenz
- Tiefpass-Signal hat kleinere Nyquist-Frequenz
 - kann mit halb so vielen Punkten beschrieben werden
 - down-sampling des Signals ist effektiv

Frequenzraum

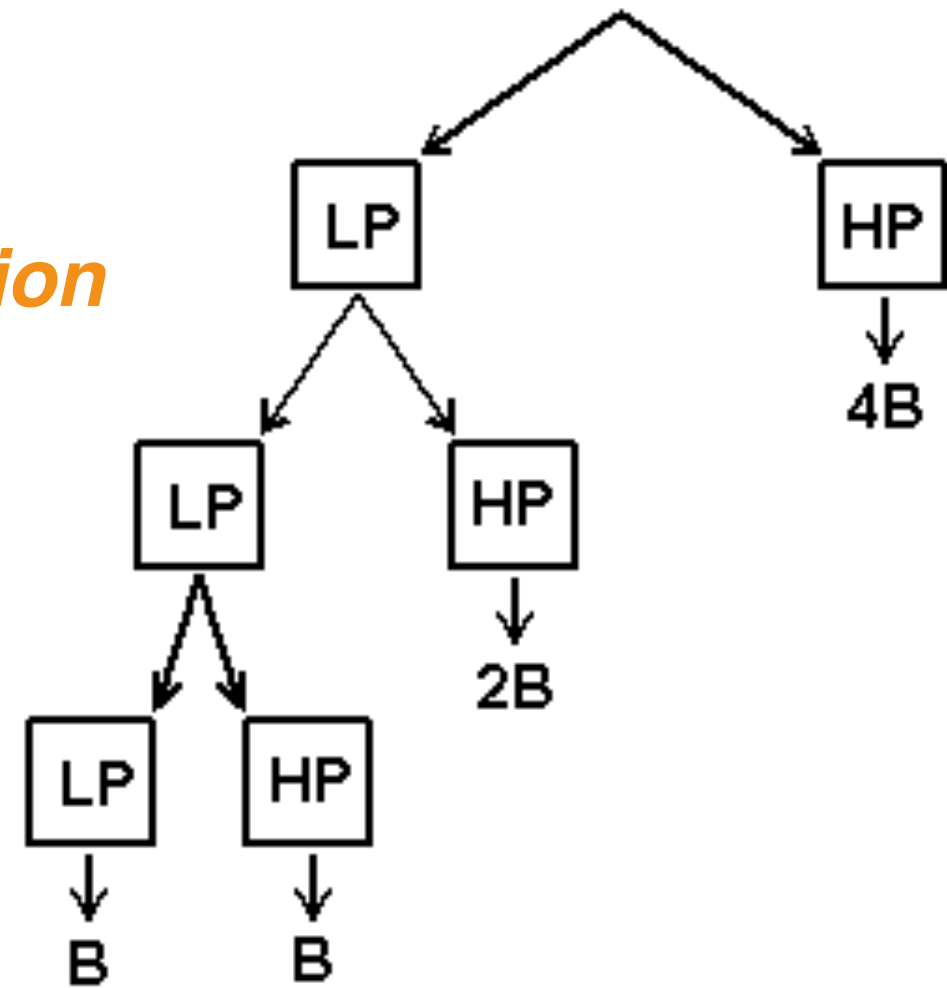
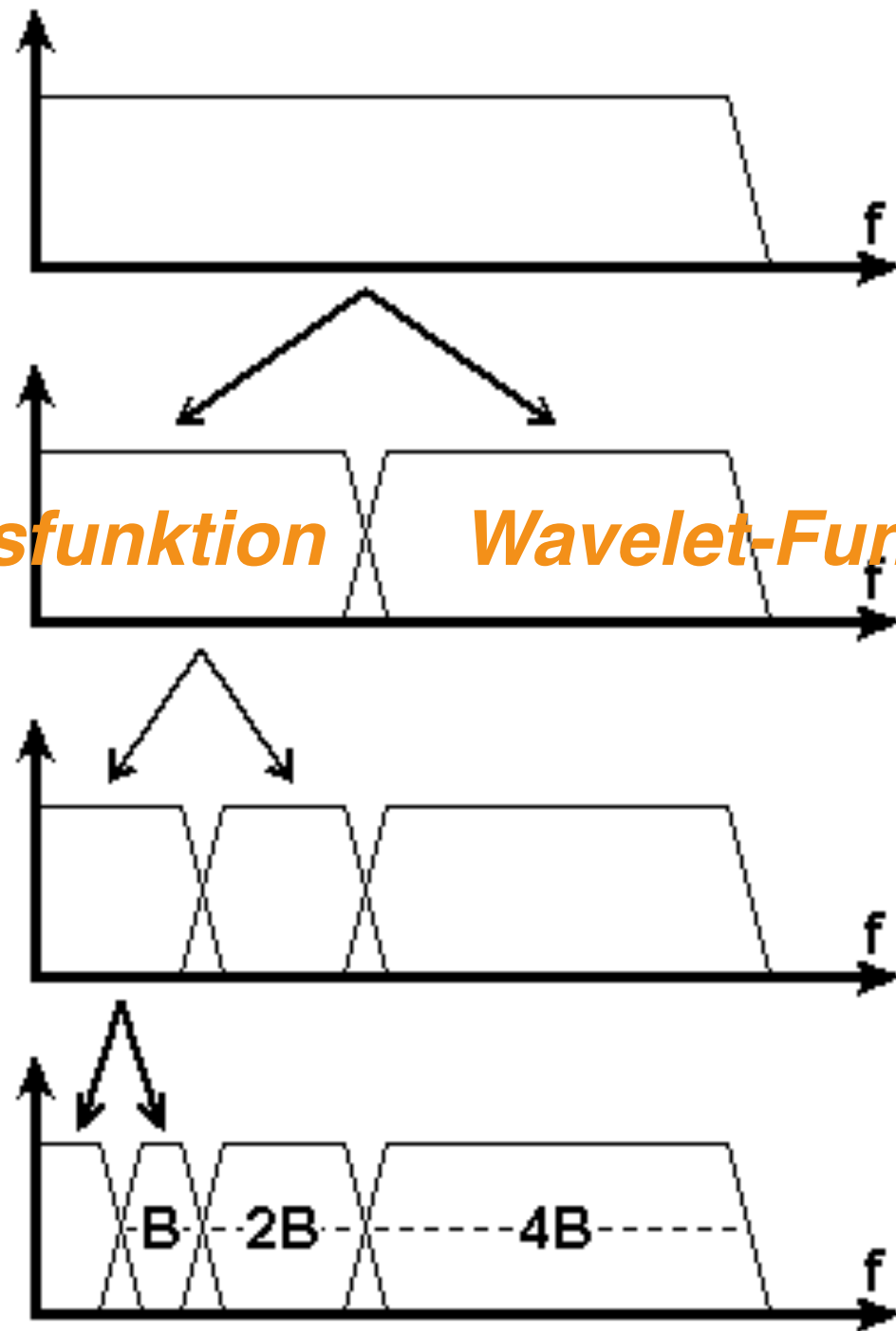


Filterbanken mit konstantem Q.

Zeitraum



Skalierungsfunktion *Wavelet-Funktion*



mathematische Umsetzung:

$$\begin{aligned}\Psi_{b,a} &= \frac{1}{\sqrt{b}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Psi^* \left(\frac{t-a}{b} \right) dt \\ &= \sqrt{b} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\nu) \tilde{\Psi}^*(b\nu) e^{i2\pi\nu a} d\nu\end{aligned}$$

b: Skala a: Dilatation

Variation der Wavelet-Transformation:

Diskretisierung der Skalen und Dilatationen:

$$b = s^n, \quad a = ks^n, \quad n, k \in \mathbb{N}_0$$

typischerweise:

$$s = 2$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{n,k} &= \frac{1}{\sqrt{s^n}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Psi^* \left(\frac{t - k2^n}{s^n} \right) dt \\ &= \sqrt{2^n} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\nu) \tilde{\Psi}^* (2^n \nu) e^{i2\pi \nu k 2^n} d\nu\end{aligned}$$

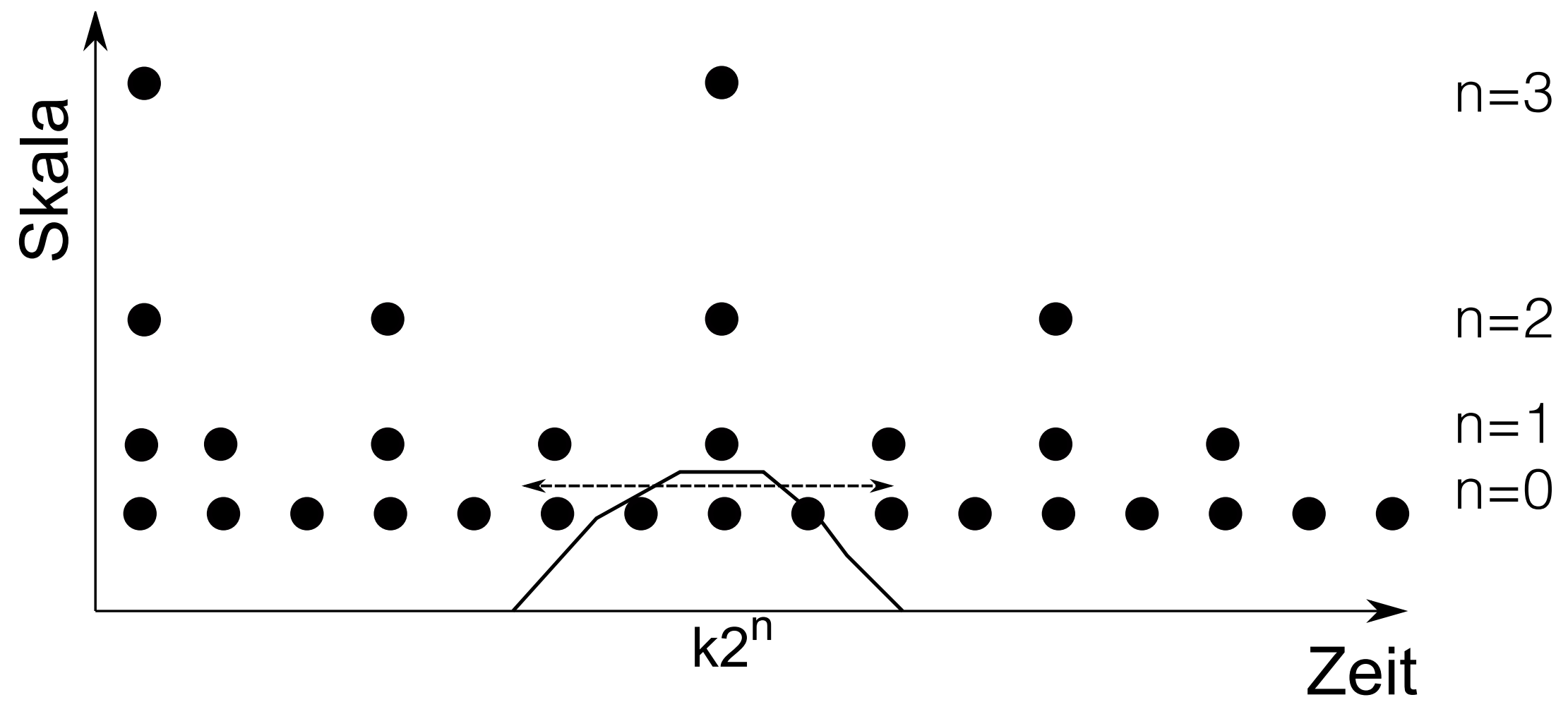
Maximum von *mother wavelet*: $t_{max} = k2^n$

$$n = 0 : t_{max} = 0, 1, 2, 3, 4, \dots N$$

$$n = 1 : t_{max} = 0, 2, 4, 6, 8, \dots N$$

$$n = 2 : t_{max} = 0, 4, 8, 12, 16, \dots N$$

“dyadisches Abtasten”



nochmal:

$$\Gamma_{n,k} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \Psi_{n,k}^*(t) dt$$

$$\Psi_{n,k}(t) = \frac{1}{\sqrt{s^n}} \Psi \left(\frac{t - k2^n}{s^n} \right) dt$$

diskrete Wavelets

da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{n,k}(t) \Psi_{m,l}^*(t) dt = \delta_{nm} \delta_{kl}$$

kann man mittels der DWT das Signal wieder rekonstruieren:

$$s(t) = \sum_{n,k} \Gamma_{n,k} \Psi_{n,k}(t)$$

somit ist $\{\Psi_{n,k}(t)\}$ eine Orthogonalbasis

Beispiel: *Haar* Transformation

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{s_n + s_{n+1}}{2} + \frac{s_n - s_{n+1}}{2} \\ &= a_n + d_n \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{s_n + s_{n+1}}{2}$$

$$d_n = \frac{s_n - s_{n+1}}{2}$$

$$s_n = a_n + d_n$$

$$s_{n+1} = a_n - d_n$$

Beispiel:

Signal s_n , $n=1,\dots,8$

Beispiel:

Signal s_n , $n=1,\dots,8$

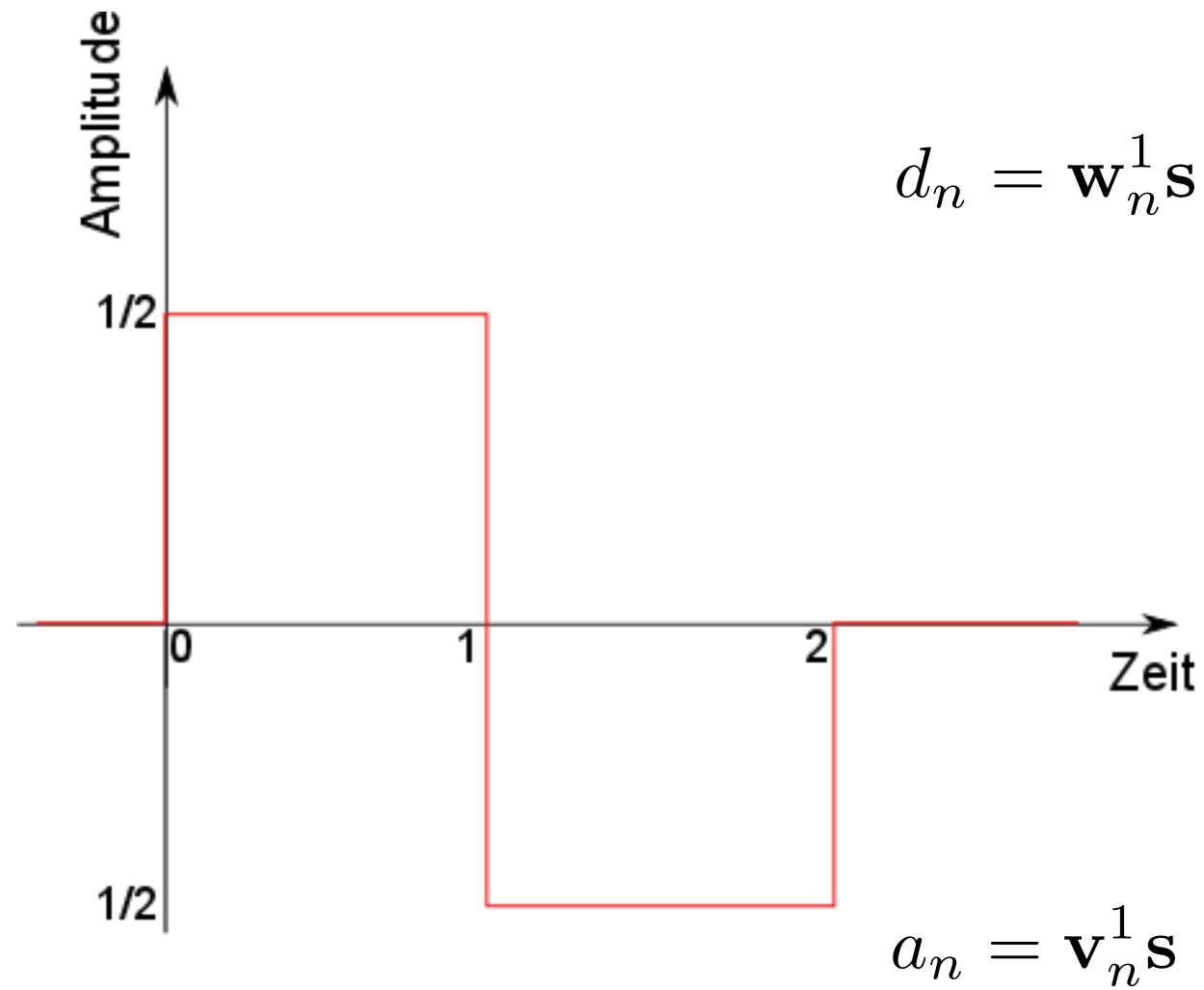
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

Signal s_n , $n=1,\dots,8$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \\ s_4 \\ s_5 \\ s_6 \\ s_7 \\ s_8 \end{pmatrix}$$

- 4 Koeffizienten a_n , 4 Koeffizienten d_n
- a_n : Tiefpassfilter , d_n : Hochpassfilter



$$\mathbf{w}_1^1 = (1/2, -1/2, 0, \dots) \mathcal{N}$$

$$\mathbf{w}_2^1 = (0, 0, 1/2, -1/2, 0, \dots) \mathcal{N}$$

Haar wavelets

$$\mathbf{w}_k^1 \mathbf{w}_l^1 = \delta_{kl} \text{ orthonormal}$$

$$\mathbf{v}_1^1 = (1/2, 1/2, 0, \dots) \mathcal{N}$$

$$\mathbf{v}_2^1 = (0, 0, 1/2, 1/2, 0, \dots) \mathcal{N}$$

Skalenfunktion

$$\mathbf{v}_k^1 \mathbf{v}_l^1 = \delta_{kl} \text{ orthonormal}$$

nächster Schritt:

- transformiere a_n , übernehme d_n

nächster Schritt:

- transformiere a_n , übernehme d_n

$$\begin{pmatrix} a_5 \\ a_6 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

und noch ein Schritt:

- transformiere a_n , übernehme d_n

und noch ein Schritt:

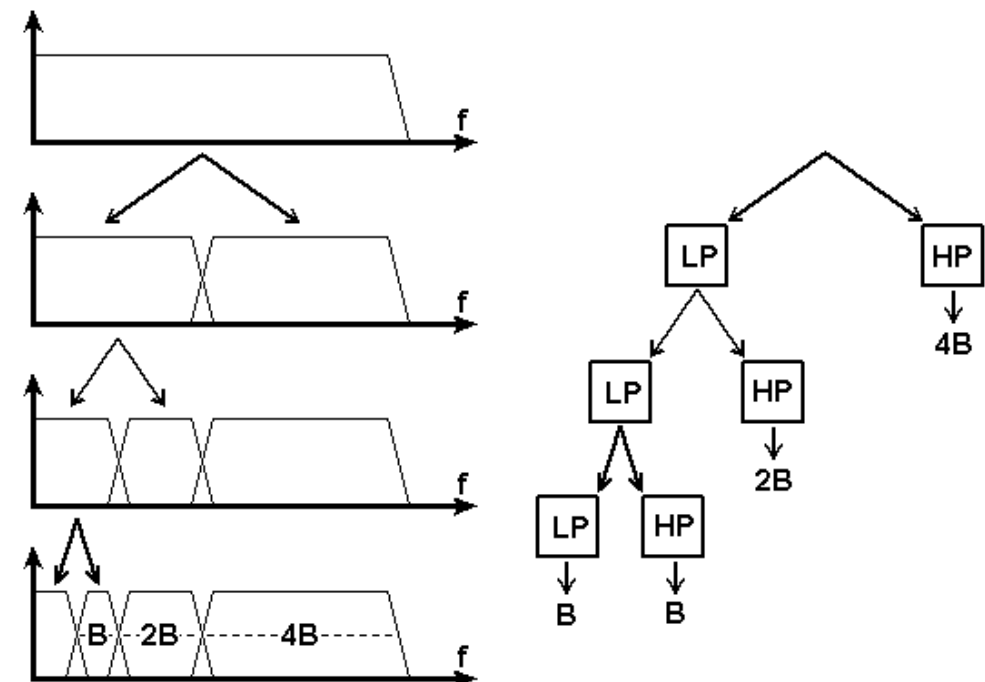
- transformiere a_n , übernehme d_n

$$\begin{pmatrix} a_7 \\ d_7 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_5 \\ a_6 \\ d_5 \\ d_6 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}$$

Skalierungsfunktion a_n

Wavelet-Funktion d_n

Multiresolution-Verfahren



Anwendungen:

- Beschreibung der auditorischen Filterbank
- file compression

Literatur:

- zur Fourier-Analyse und Lineare Antwort-Theorie:
K. Meyberg, P. Vachenauer, *Höhere Mathematik 2*, Springer (1997)
- zur Lineare Antwort-Theorie:
F. Kuypers, *Klassische Mechanik*, Wiley (1997)
- zu wavelets:
G. Kaiser, *A friendly guide to wavelets*, Birkhäuser (2011)
- Internet: *A wavelet tour of Signal Processing* by S. Mallat

III. Zeit-Frequenz Analyse

Short-time Fourier Transform

Gabor Transformation

Lineare Filter

Wavelet Transformation

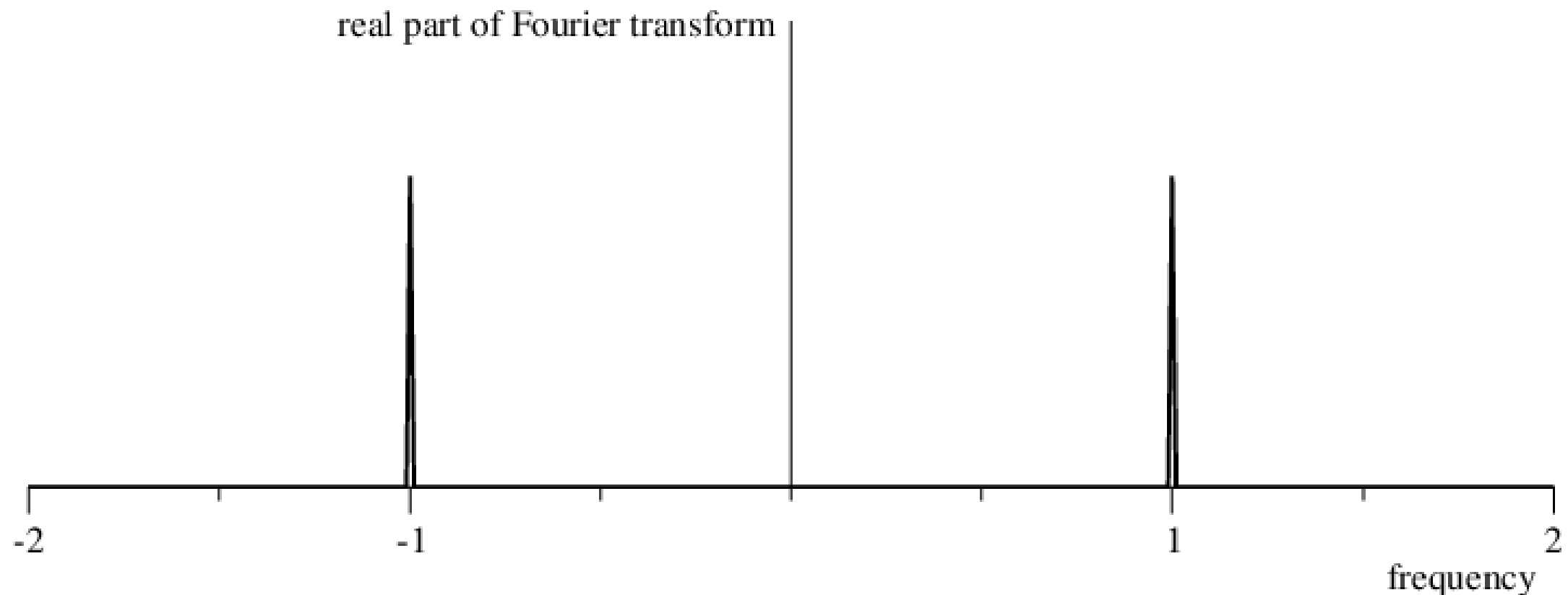
Konzept des Analytischen Signals

Reassignment Methoden

gegeben: Signal mit einer Frequency f:

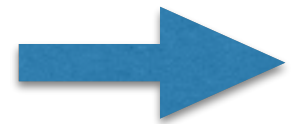
$$s(t) = \cos(2\pi f t)$$

Fourier Transformation ergibt positive and negative Frequenz:



das versteht man, da

$$s(t) = \cos(2\pi ft) = \frac{1}{2} (e^{i2\pi ft} + e^{-i2\pi ft})$$

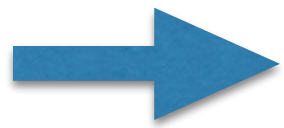


zwei Frequenzen da das Signal reellwertig ist

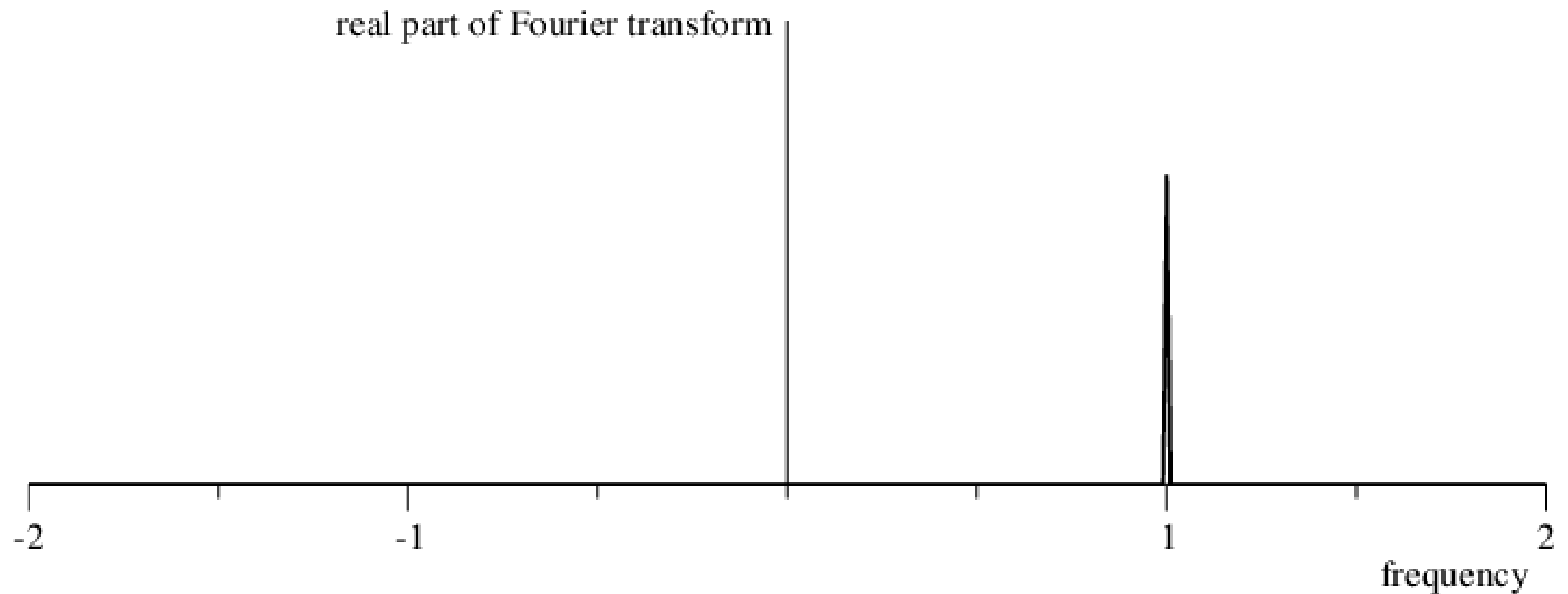
Aber: man braucht die negativen Frequenzen nicht.

Frage: Kann man ein Signal mit den selben Eigenschaften konstruieren, das aber nur positive Frequenzen hat ?

ja, das **analytische Signal**



$$s_a(t) = \cos(2\pi f t) + i \sin(2\pi f t) = e^{i2\pi f t}$$



Wie konstruiert man das analytische Signal ?

$$\tilde{s}_A(\nu) = \tilde{s}(\nu) + T[\tilde{s}(\nu)]$$

$$\nu < 0 : \tilde{s}_A(\nu) = 0$$

$$\nu < 0 : T[\tilde{s}(\nu)] = -\tilde{s}(\nu)$$

$$\nu = 0 : \tilde{s}_A(\nu) = \tilde{s}(\nu)$$

$$\nu = 0 : T[\tilde{s}(\nu)] = 0$$

$$\nu > 0 : \tilde{s}_A(\nu) \sim \tilde{s}(\nu)$$

$$\nu > 0 : T[\tilde{s}(\nu)] = \tilde{s}(\nu)$$

$$T[\tilde{s}(\nu)] = \text{sgn}(\nu)\tilde{s}(\nu)$$

$$\text{sgn}(\pm\nu) = \pm 1 \ , \ \text{sgn}(0) = 0$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\text{sgn}(\nu)](t) = \frac{i}{\pi t}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[T[\text{sgn}(\nu)\tilde{s}(\nu)](t) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

für allgemeine Signale $s(t)$:

$$s_a(t) = s(t) + i\mathcal{H}[s](t)$$

mit der Hilbert transform $\mathcal{H}[s](t) = \frac{1}{\pi} P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\tau)}{t - \tau} d\tau$

analytisches Signal ist eine andere Darstellung des Signals,

jedoch mit **grossen Vorteilen**

im Allgemeinen:

$$\text{für alle } x(t) \in \mathcal{C} \rightarrow x(t) = Re^{i\phi}$$

R: amplitude
 Φ : phase

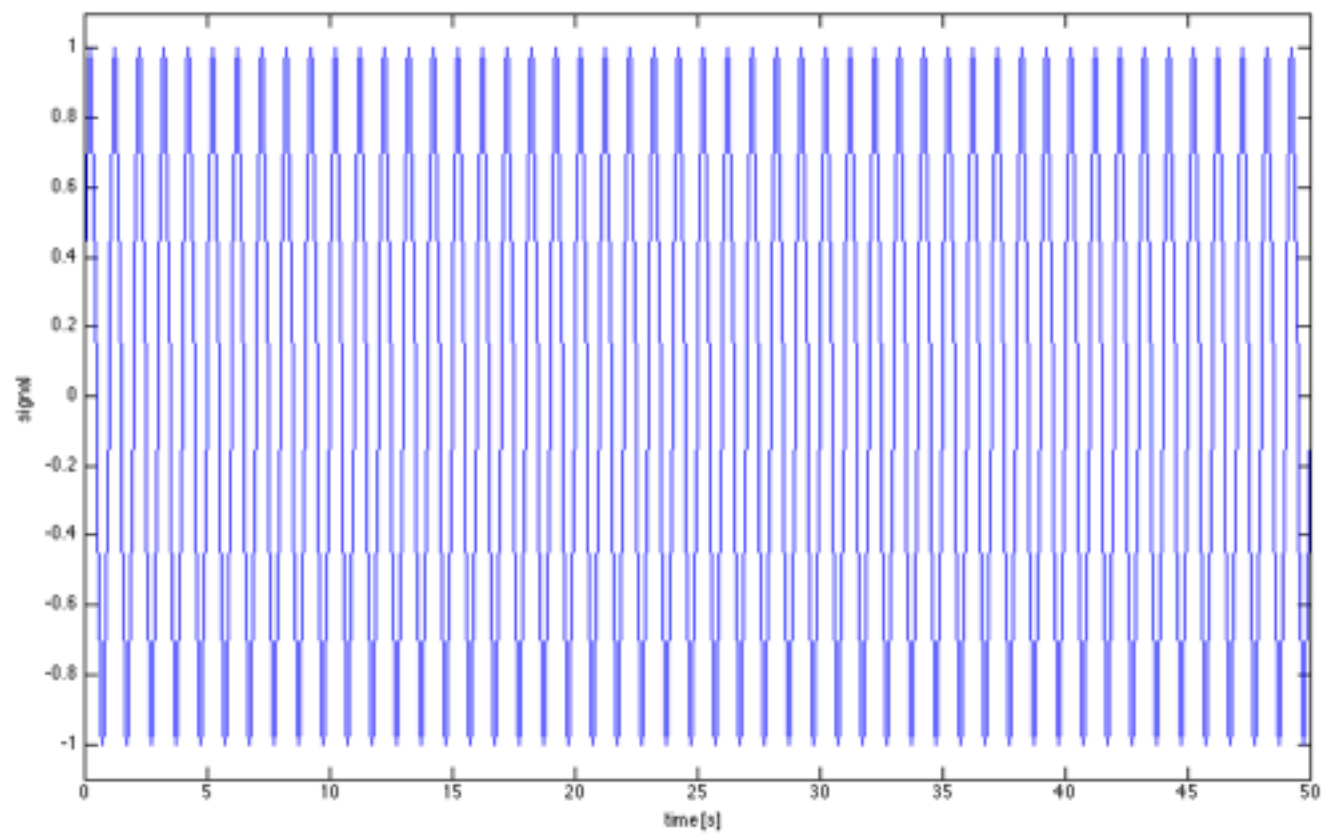
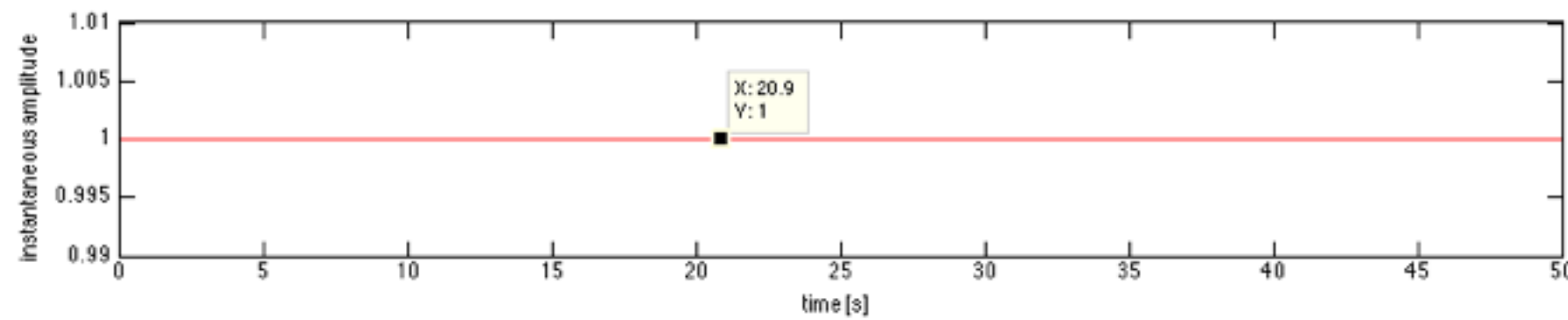
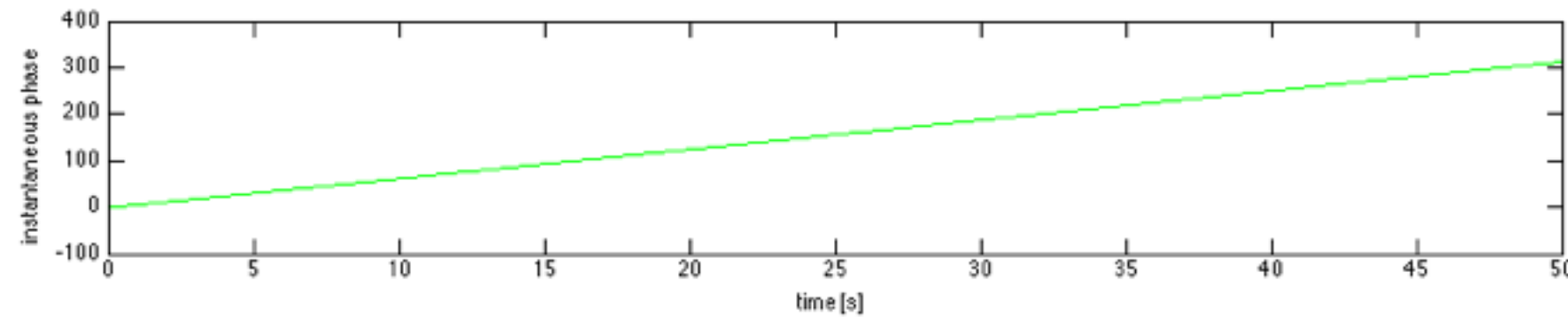
$$s_a(t) = R(t)e^{i\phi(t)}$$

$R(t)$: instantane Amplitude

Φ : instantane Phase für $R \neq 0$



instantane Frequenz $f_a(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$

Beispiel $R(t)$  $\Phi(t)$  $f_a(t)$ 