

Spektralanalyse physiologischer Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 7

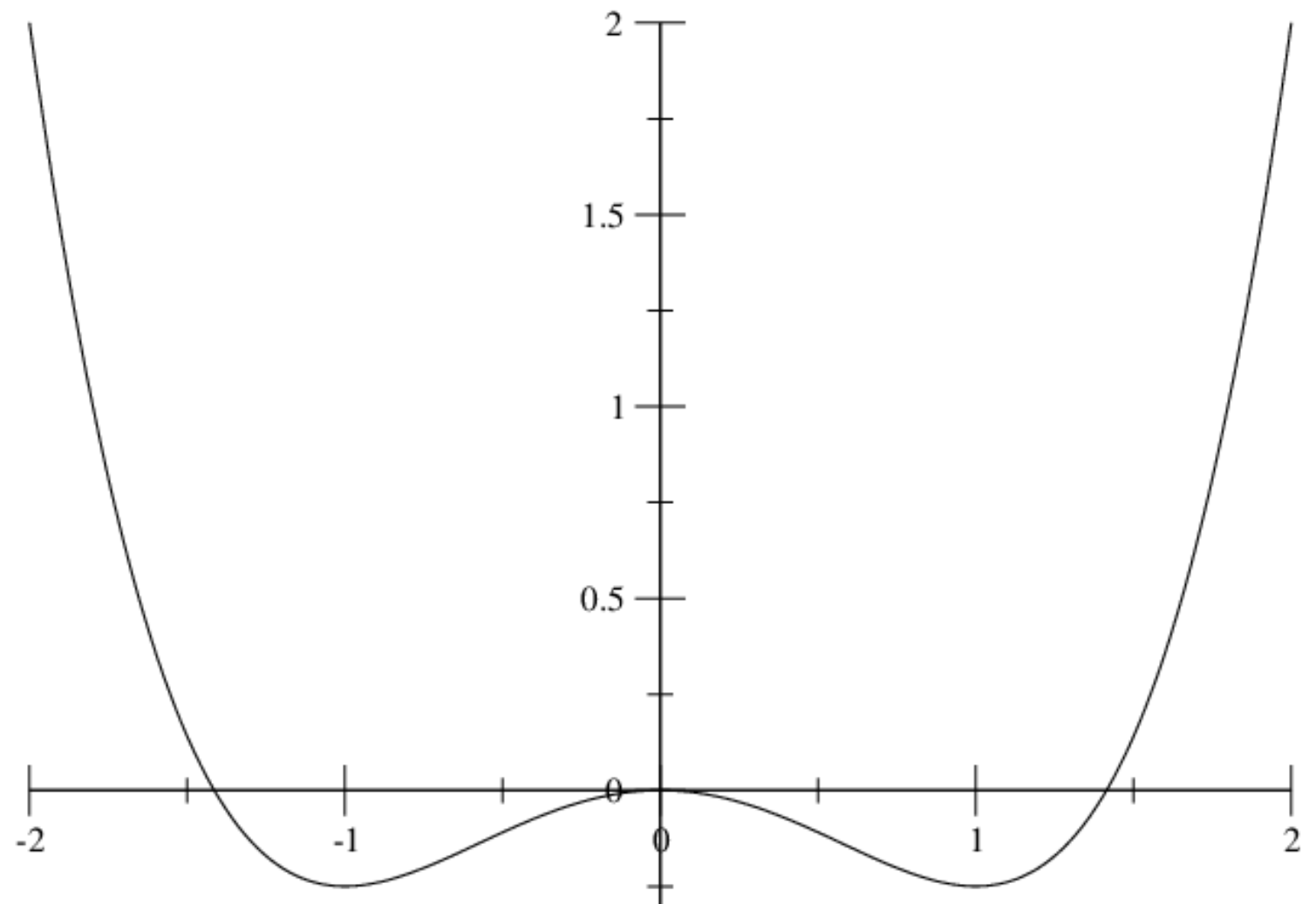
zum Übungsblatt

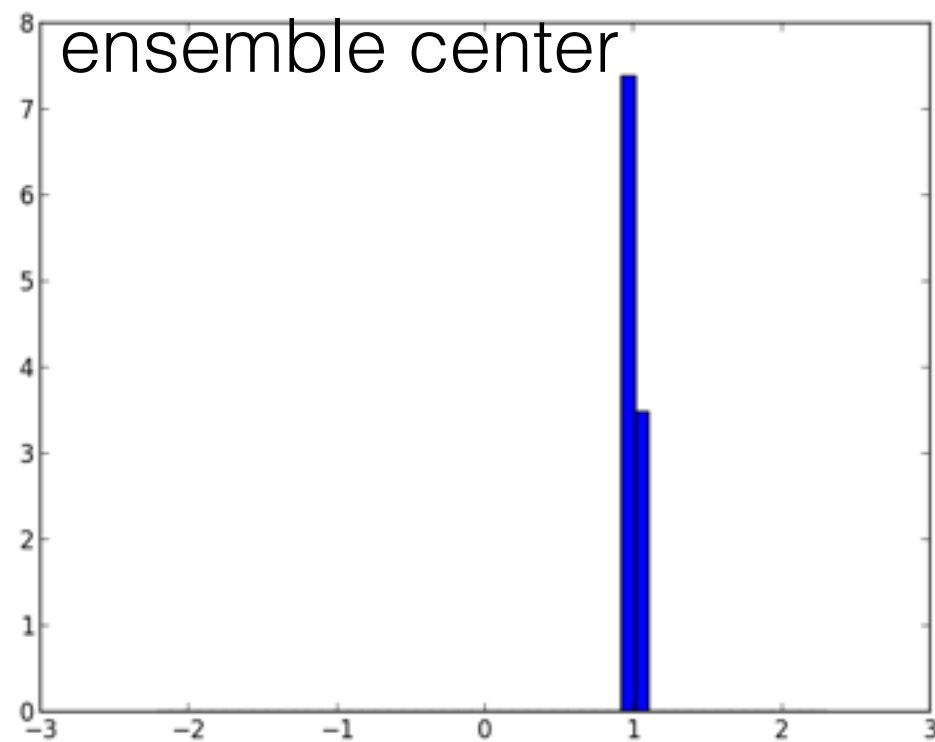
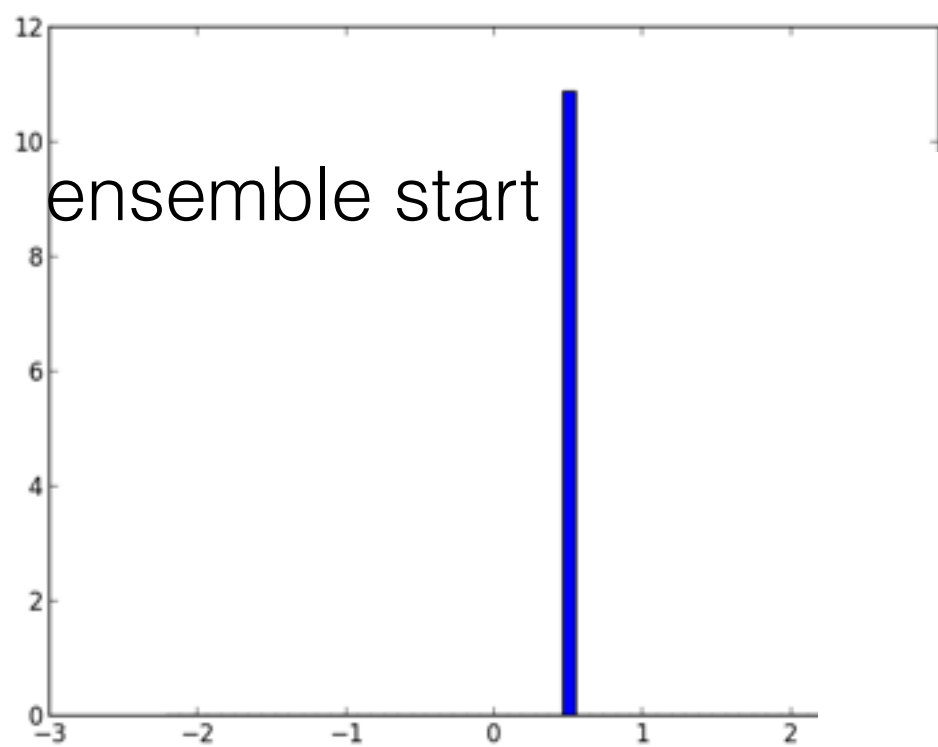
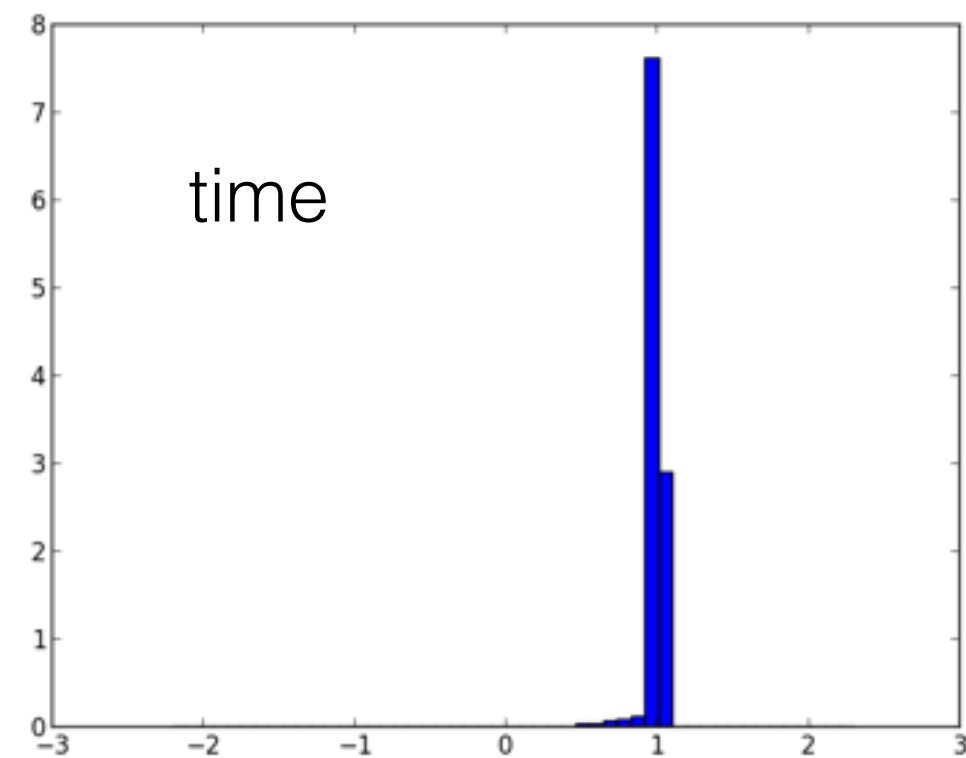
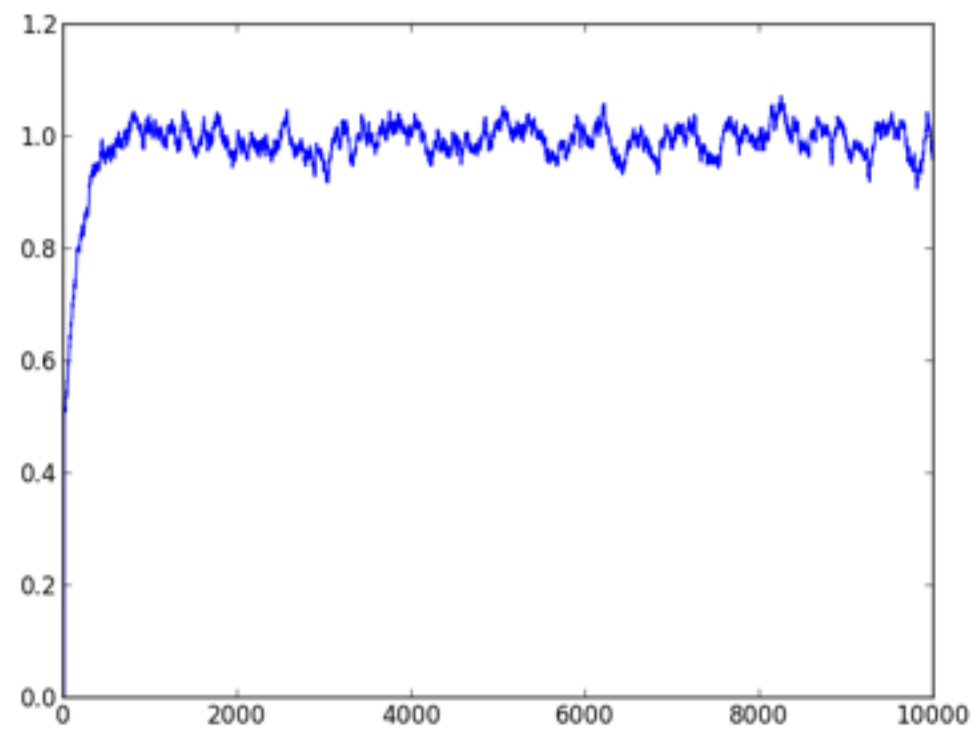
Stochastischer Prozess im bistabilen System

$$\dot{x} = x - x^3 + \kappa \xi(t)$$

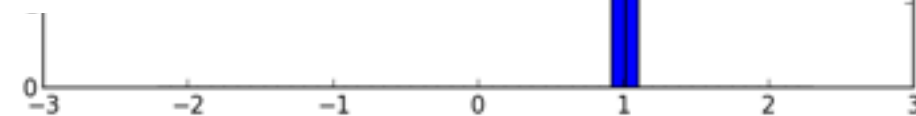
$$\dot{x} = -\frac{dV(x)}{dx} + \kappa \xi(t)$$

$$V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$$

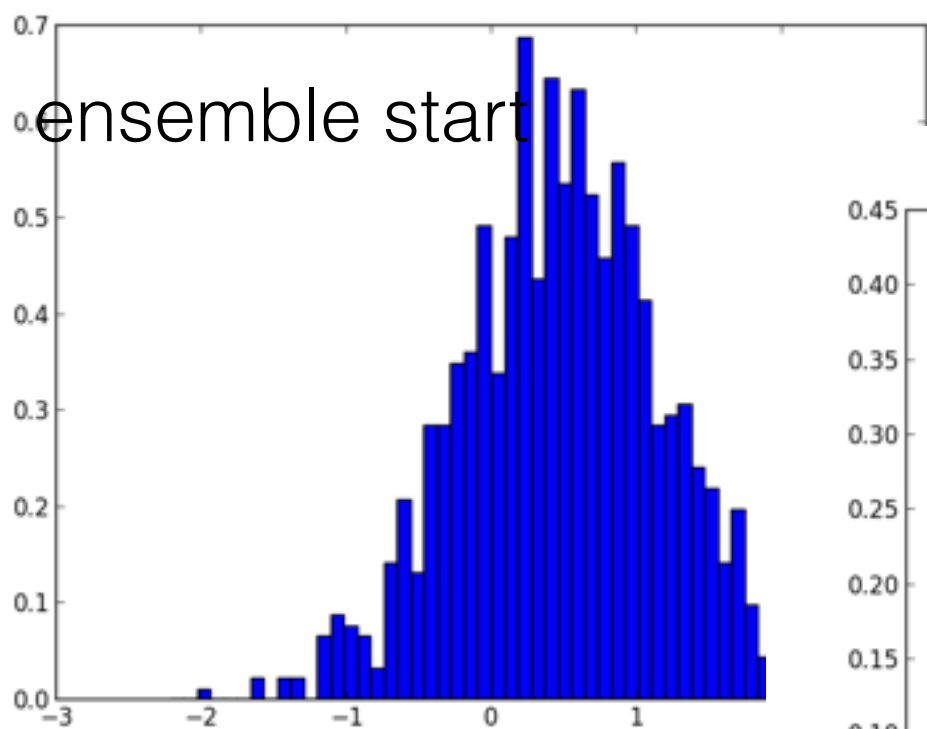
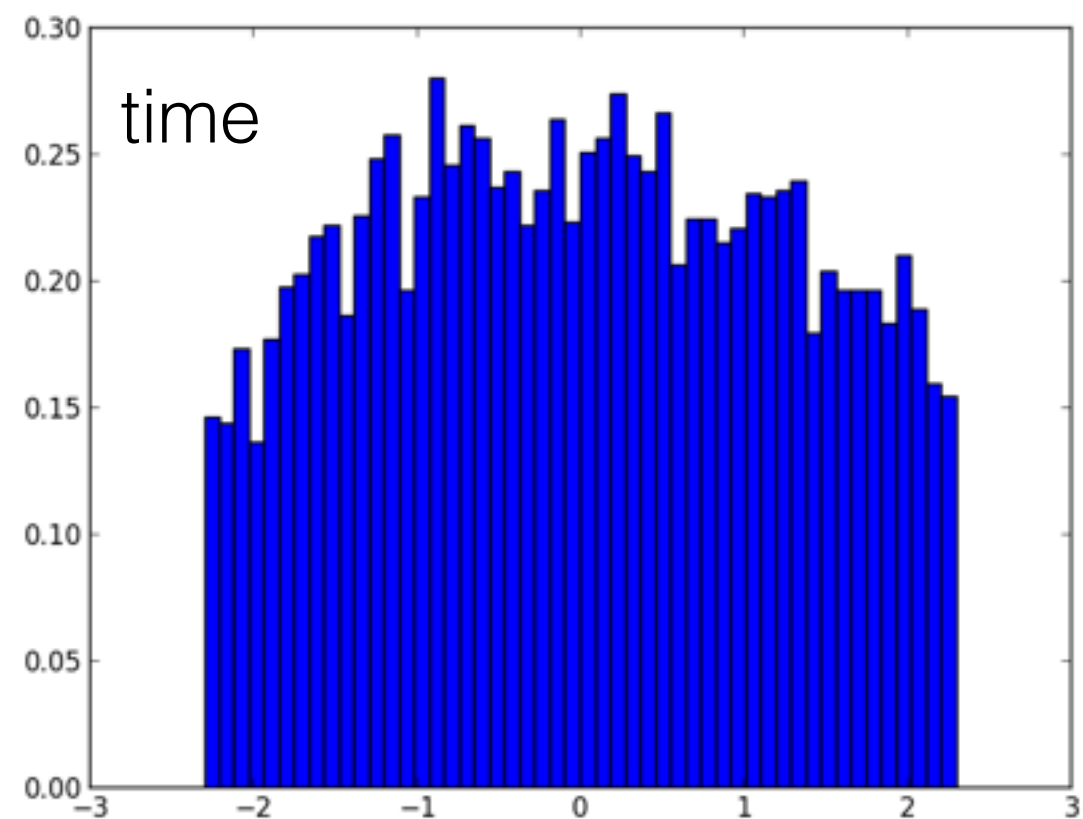
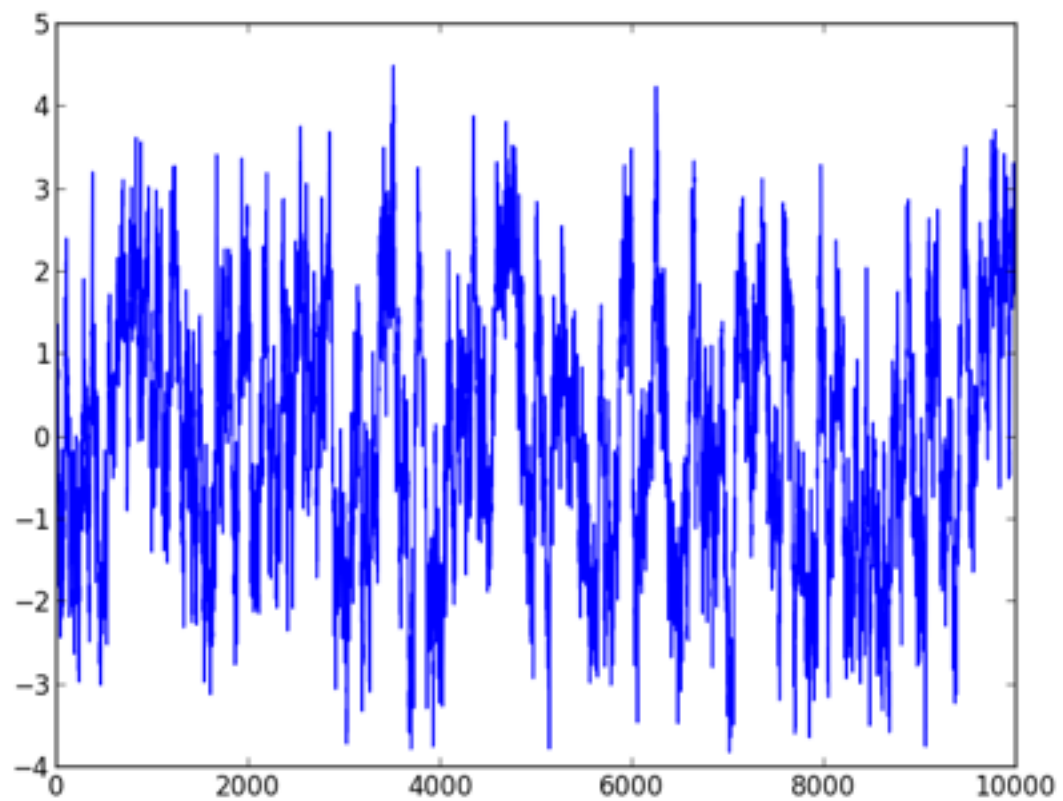




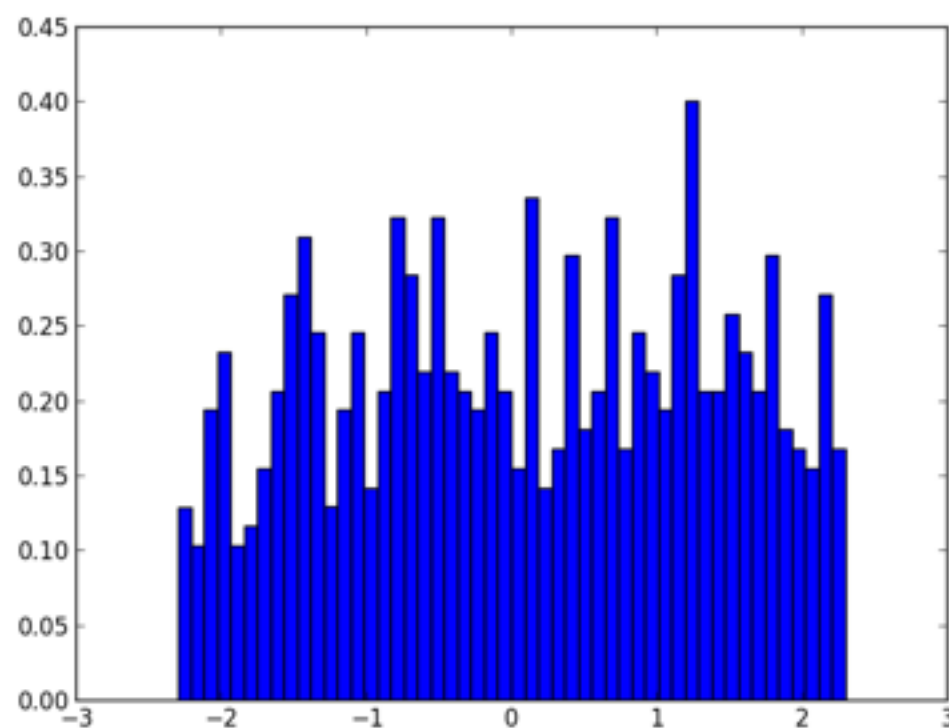
ensemble end



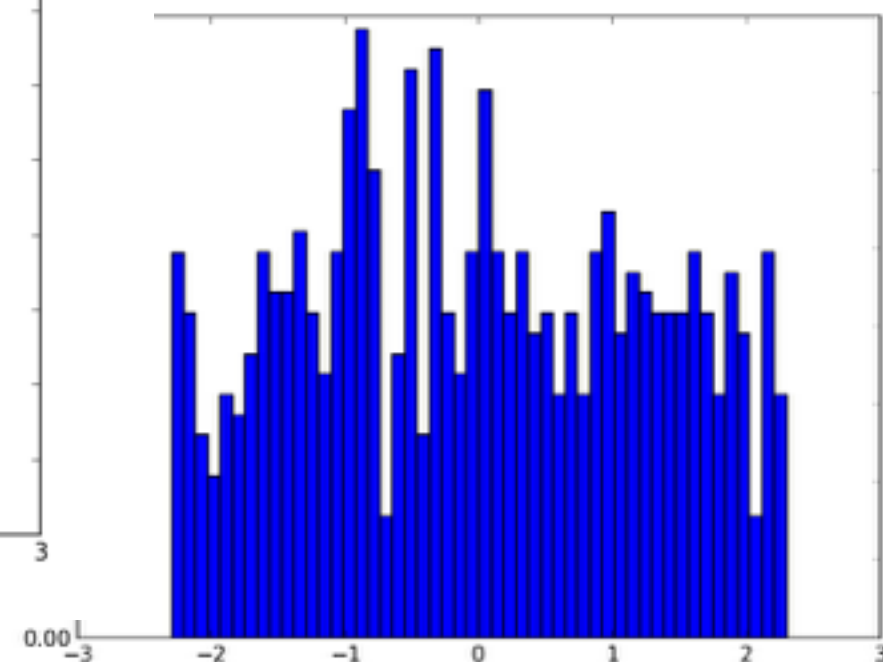
low noise



ensemble center



ensemble end



high noise

$$E_t[X] = 0.991889228924$$

$$E_{\text{Anfang}}[X] = 0.507499637099$$

$$E_{\text{Mitte}}[X] = 1.00011335527$$

$$E_{\text{Ende}}[X] = 1.00002756002$$

$$\kappa = 0.05$$

$$\text{Var}_t[X] = 0.0023618827719$$

$$\text{Var}_{\text{Anfang}}[X] = 5.07327947216e-07$$

$$\text{Var}_{\text{Mitte}}[X] = 6.11022635275e-06$$

$$\text{Var}_{\text{Ende}}[X] = 5.89205109023e-06$$

$$E_t[X] = -0.375313285666$$

$$E_{\text{Anfang}}[X] = 0.515946204093$$

$$E_{\text{Mitte}}[X] = 0.0143110942072$$

$$E_{\text{Ende}}[X] = 0.101237933098$$

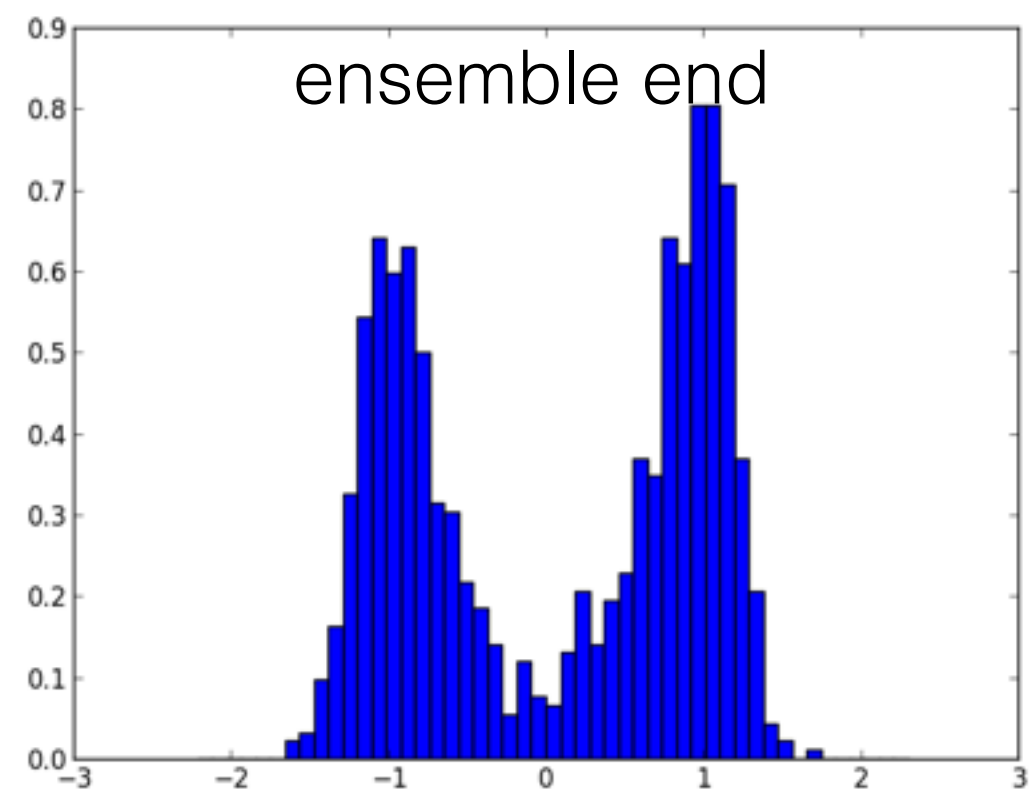
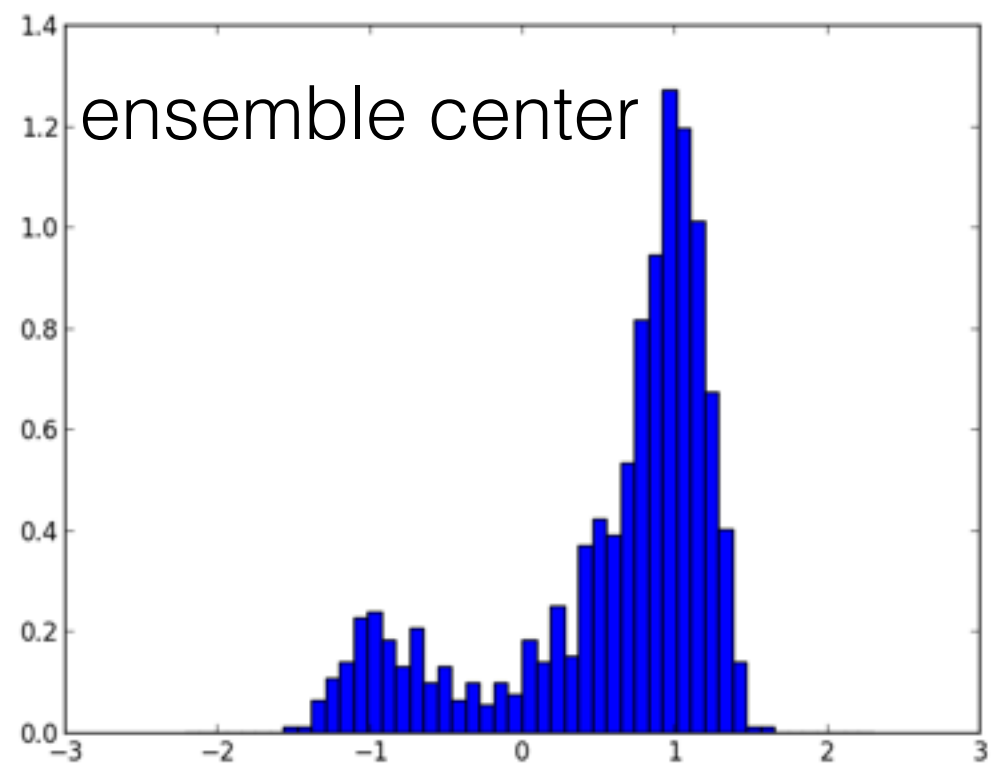
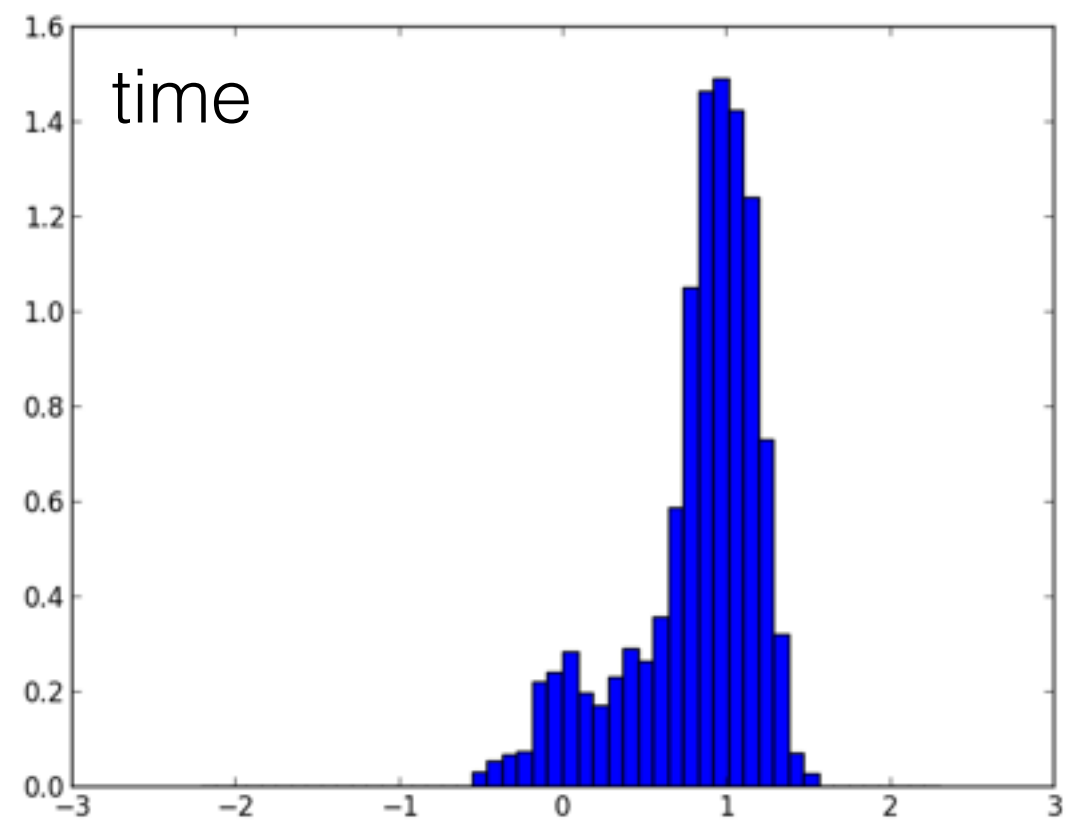
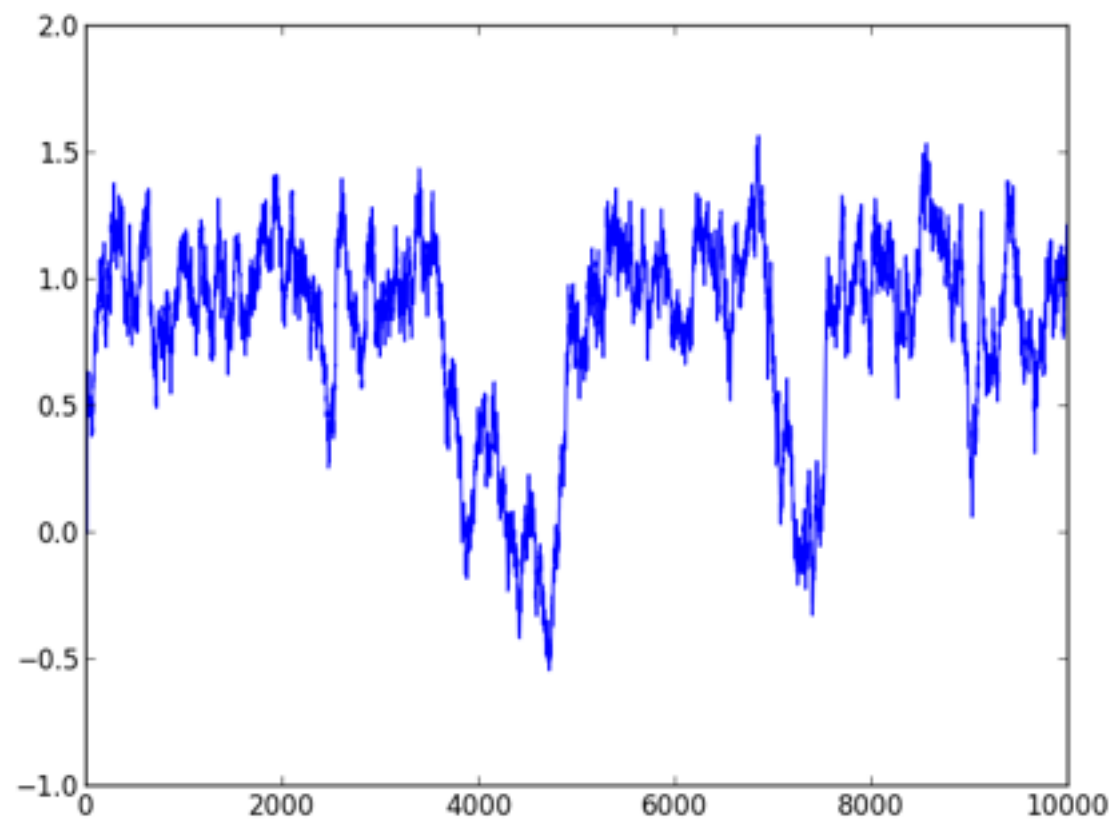
$$\kappa = 5.0$$

$$\text{Var}_t[X] = 2.47209763351$$

$$\text{Var}_{\text{Anfang}}[X] = 0.498823691088$$

$$\text{Var}_{\text{Mitte}}[X] = 2.82536010687$$

$$\text{Var}_{\text{Ende}}[X] = 2.70558318264$$



medium noise ($\kappa=0.5$)

weiter mit Vorlesung 7

I. Abtast-Theorem

II. Fourier-Analyse

III. Zeit-Frequenz Analyse

III. Zeit-Frequenz Analyse

Short-time Fourier Transform

Gabor Transformation

Lineare Filter

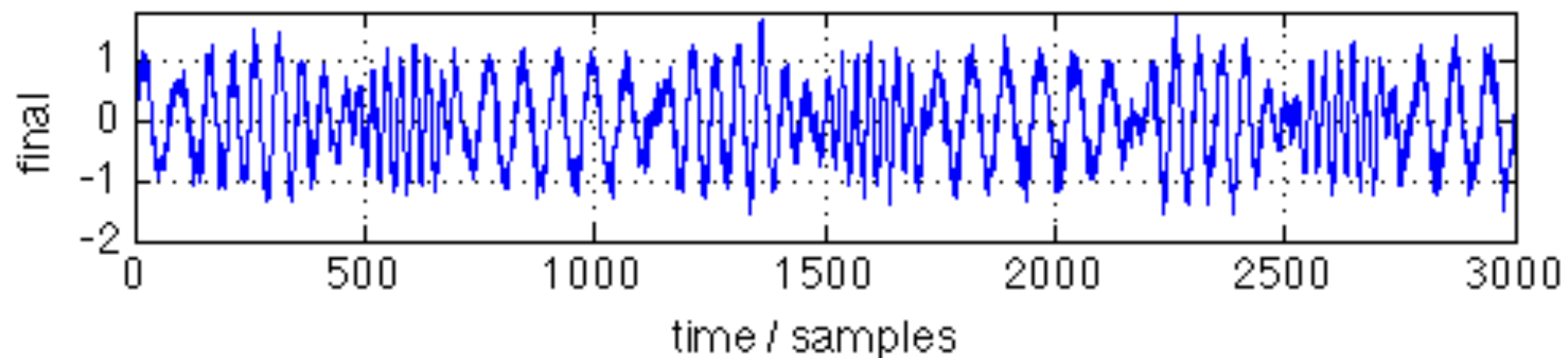
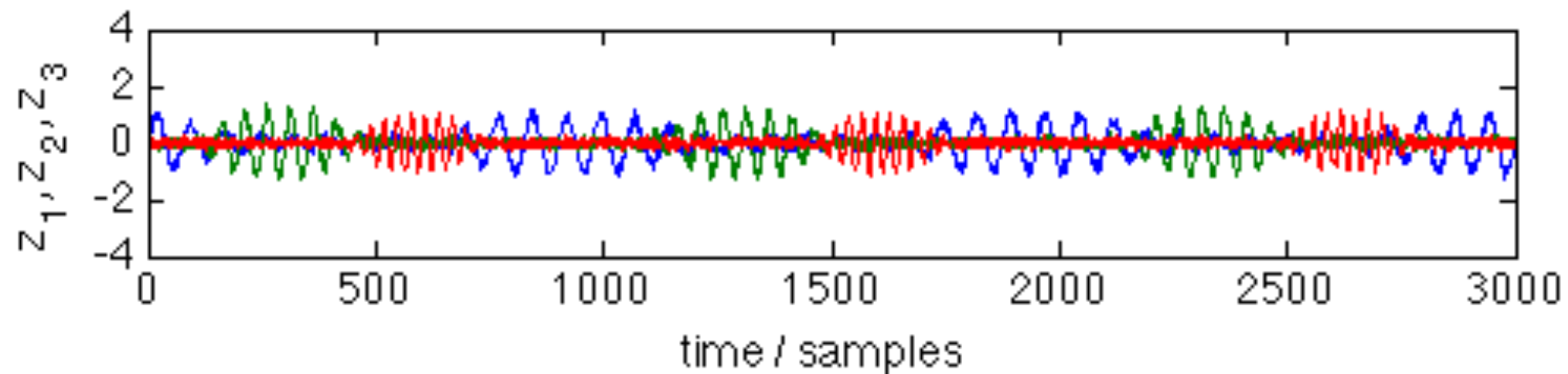
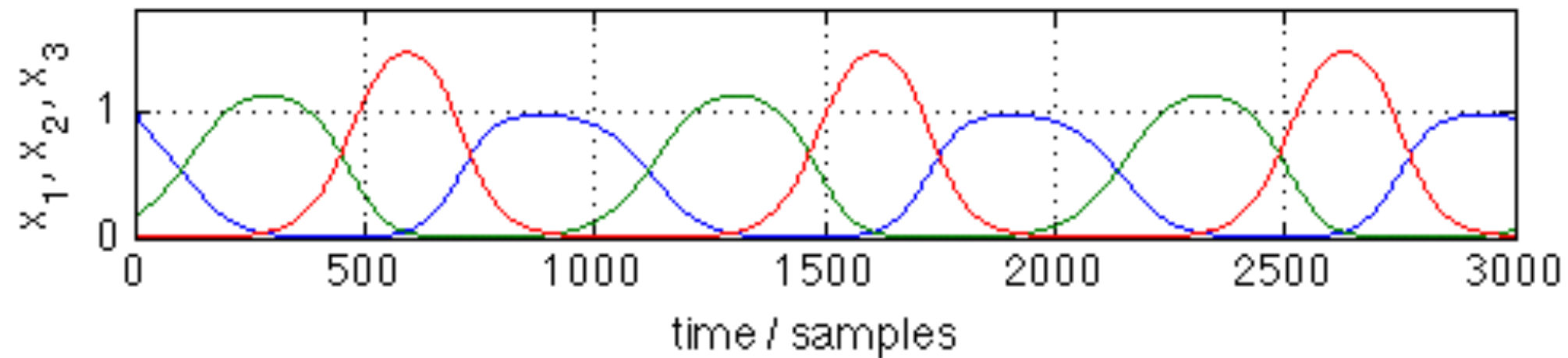
Wavelet Transformation

Konzept des Analytischen Signals

Reassignment Methoden

nocheinmal:

Struktur des Beispiels von drei transiente Oszillatoren

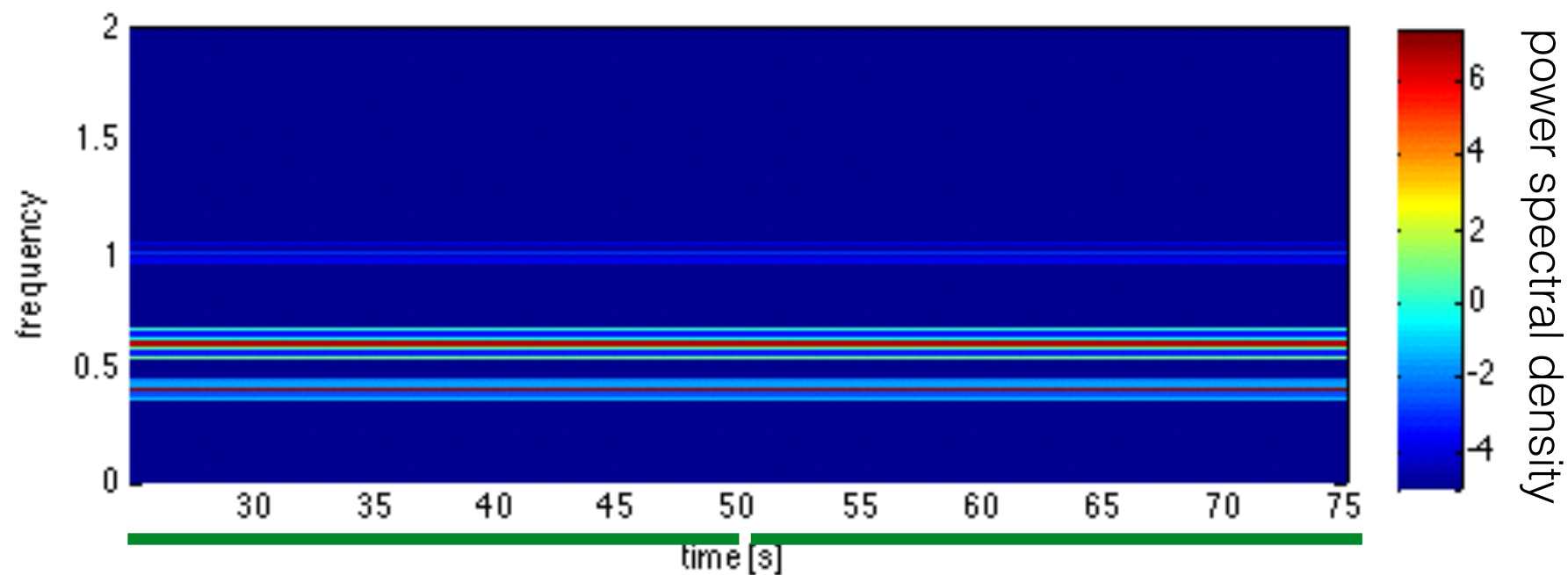
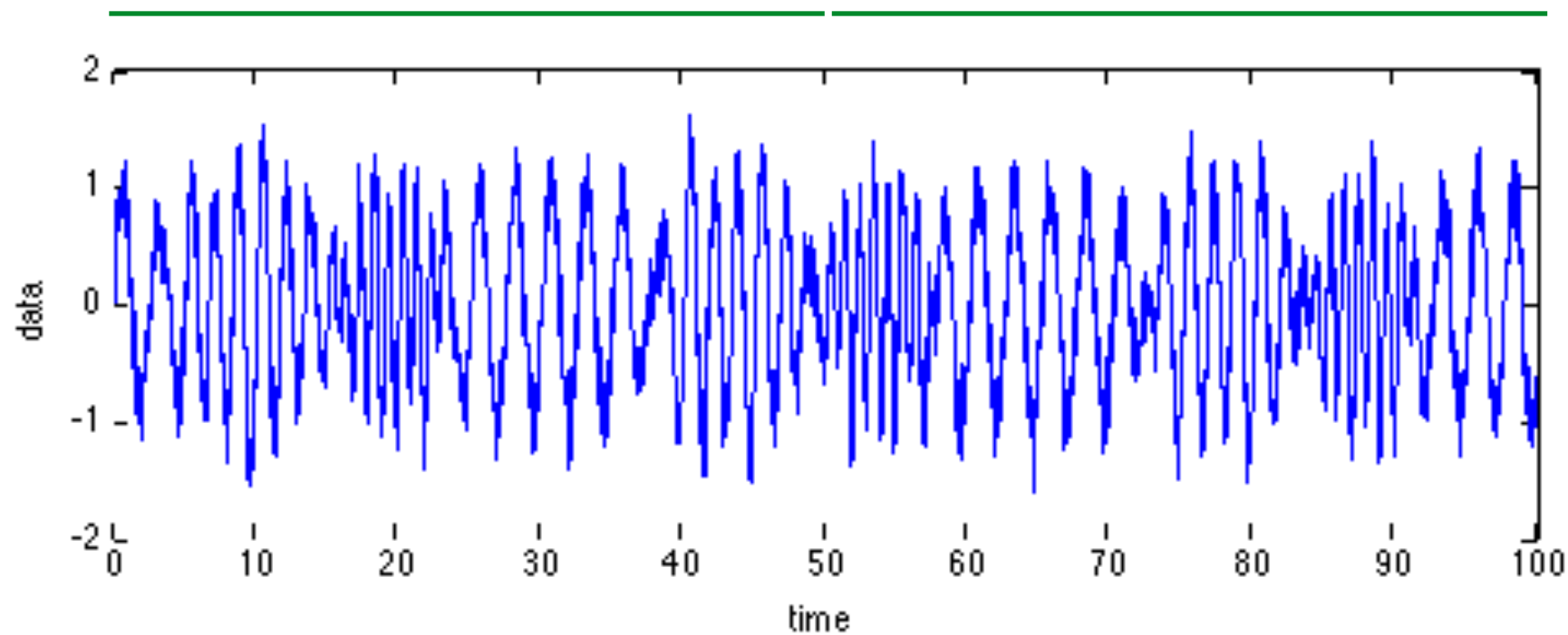


gemittelt

gemittelt

Zeitfenster
50s

Frequenzauflösung
0.02Hz

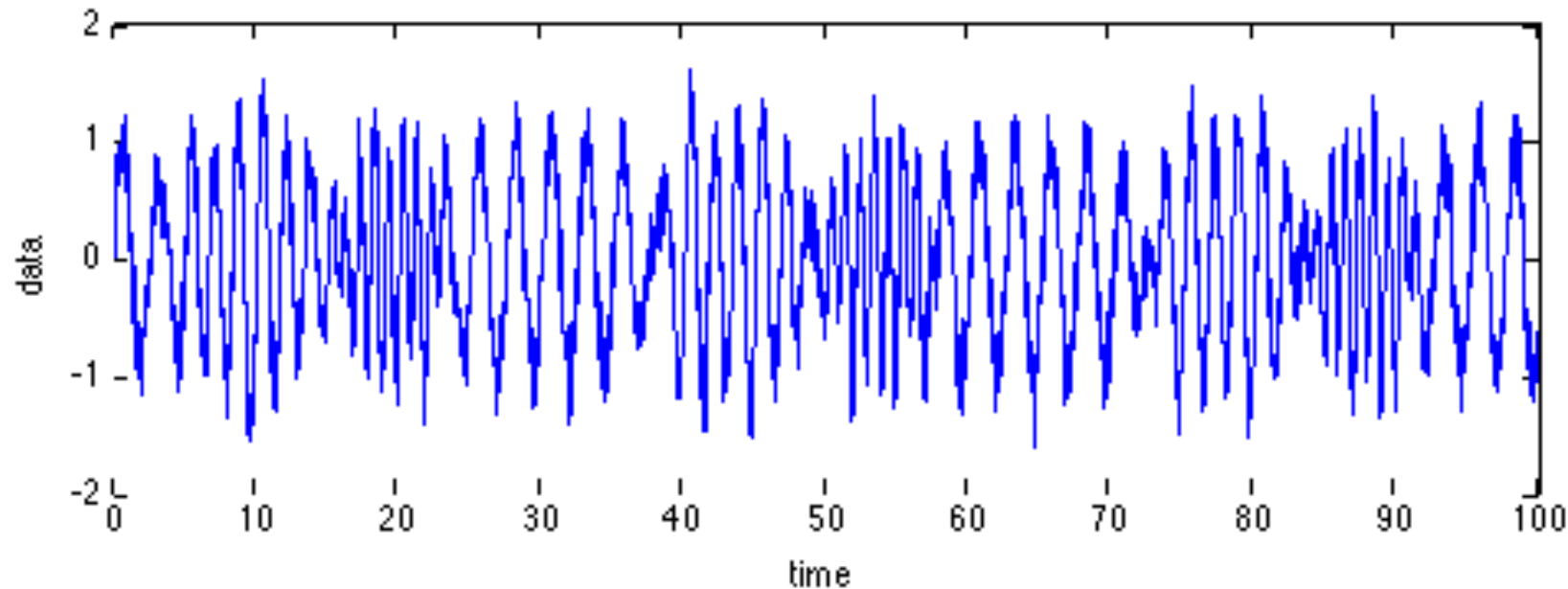


kein Überlapp
Rechteck-Fenster

beide Signalabschnitte zeigen identische PSD.

(TF_1.m)

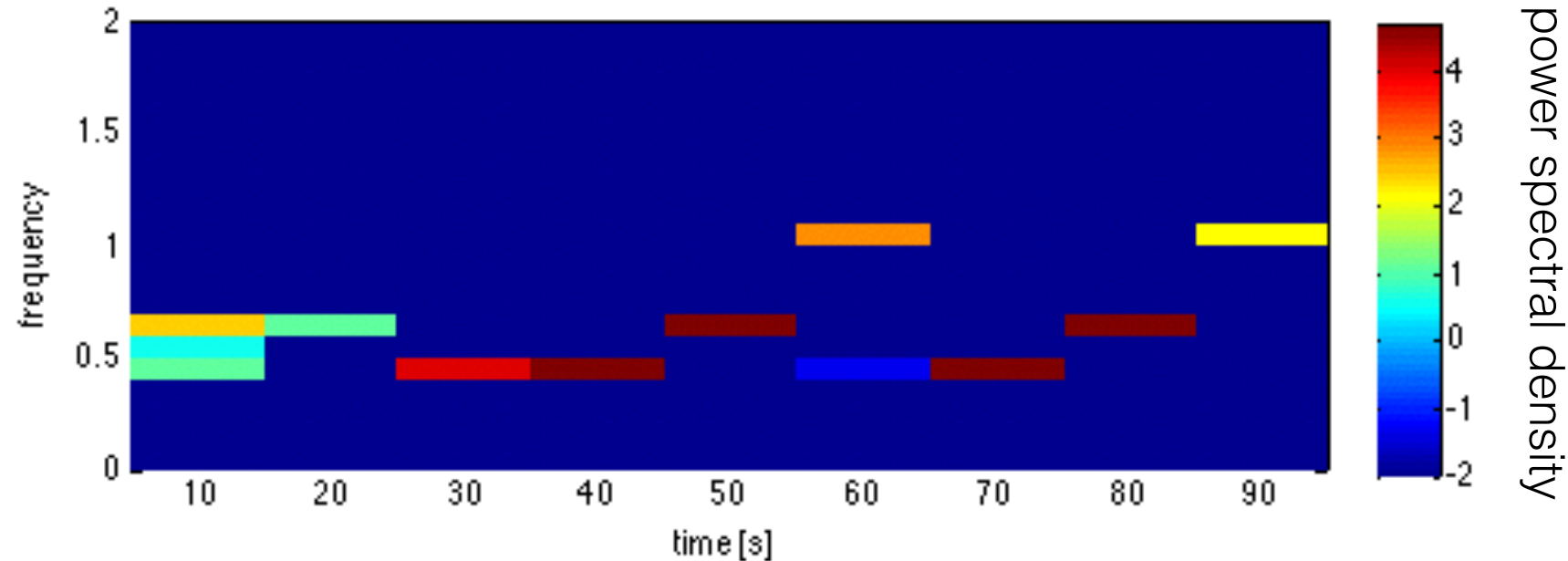
gemittelte Fenster



Zeitfenster:
10s

Frequenzauflösung
0.1Hz

kein Überlapp,
Rechteckfenster



Zeitfenster zeigen zeitabhängige PSD

(TF_2.m)

man kann
eine **Frequenz**
in **jedem Fenster**
definieren

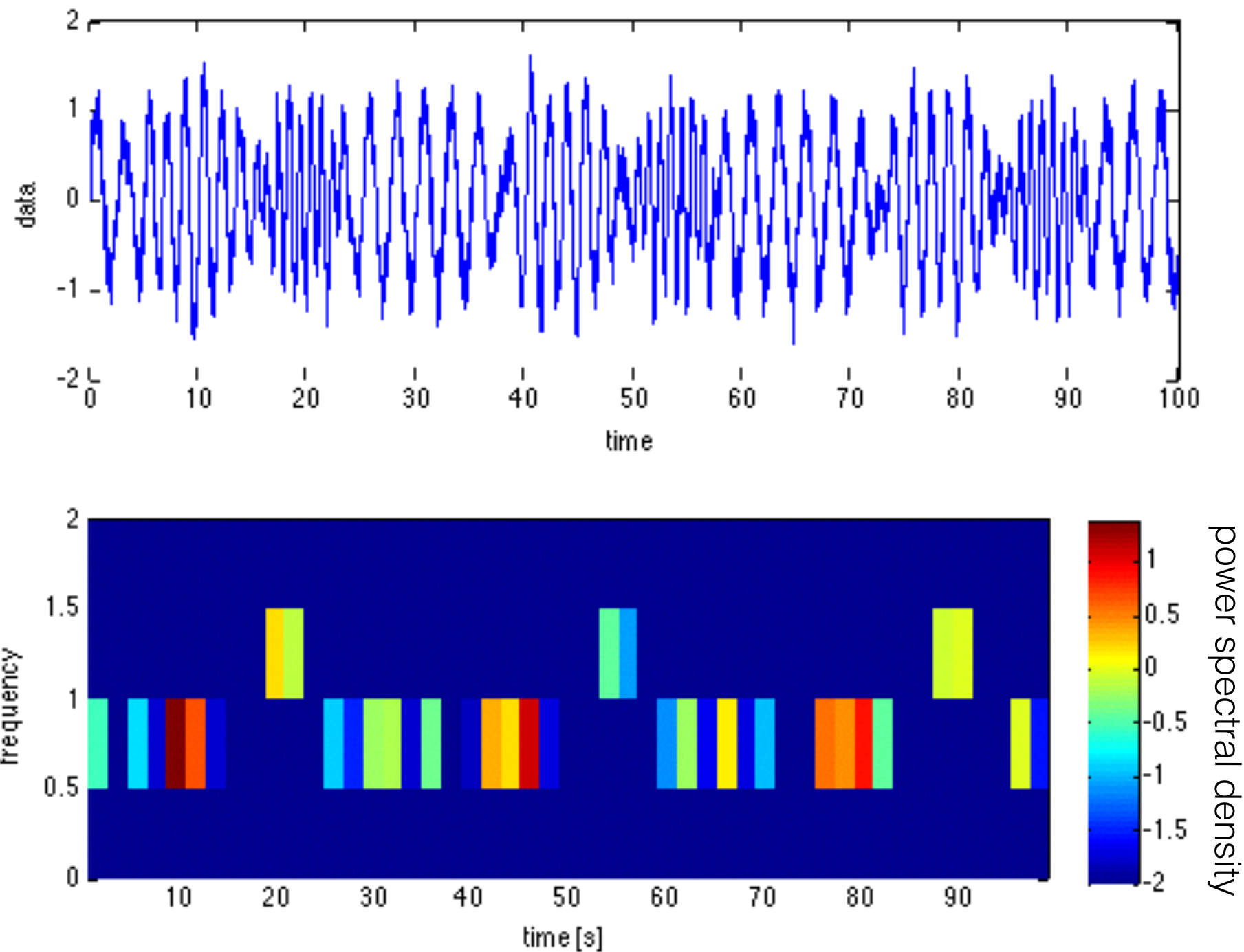


zeitabhängige Frequenz

Zeitfenster:
2s

Frequenzauflösung
0.5Hz

kein Überlapp
Rechteckfenster



schlechte Frequenzauflösung durch kurzes Zeitfenster
(TF_3.m)

man muss

Zeitauflösung

and

Frequenzauflösung

abwägen

da

$$\Delta T \sim \frac{1}{\Delta f}$$

im Detail:

es sei $x(t)$ ein Signal mit

Mittelwerte: $\bar{t} = \int_{\mathcal{R}} t |x(t)|^2 dt = 0$

$$\bar{f} = \int_{\mathcal{R}} f |X(f)|^2 df = 0$$

Varianzen: $\sigma_t^2 = \int_{\mathcal{R}} t^2 |x(t)|^2 dt$ $\sigma_f^2 = \int_{\mathcal{R}} f^2 |X(f)|^2 df$

dann gilt:

$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{4}$$

folgt aus Fourier-Transformation

Frage:

wie kann man eine instantane Frequenz definieren
mit seiner Zeit-Frequenz Unschärfe ?

$$\Delta T \Delta f = \textit{const}$$

(Heisenberg-Relation)

III. Zeit-Frequenz Analyse

Short-time Fourier Transform

Gabor Transformation

Lineare Filter

Wavelet Transformation

Konzept des Analytischen Signals

Reassignment Methoden

Short-time Fourier Transformation (STFT)

zeitkontinuierliches Signal

$$X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t - \tau) e^{-i2\pi f t} dt$$

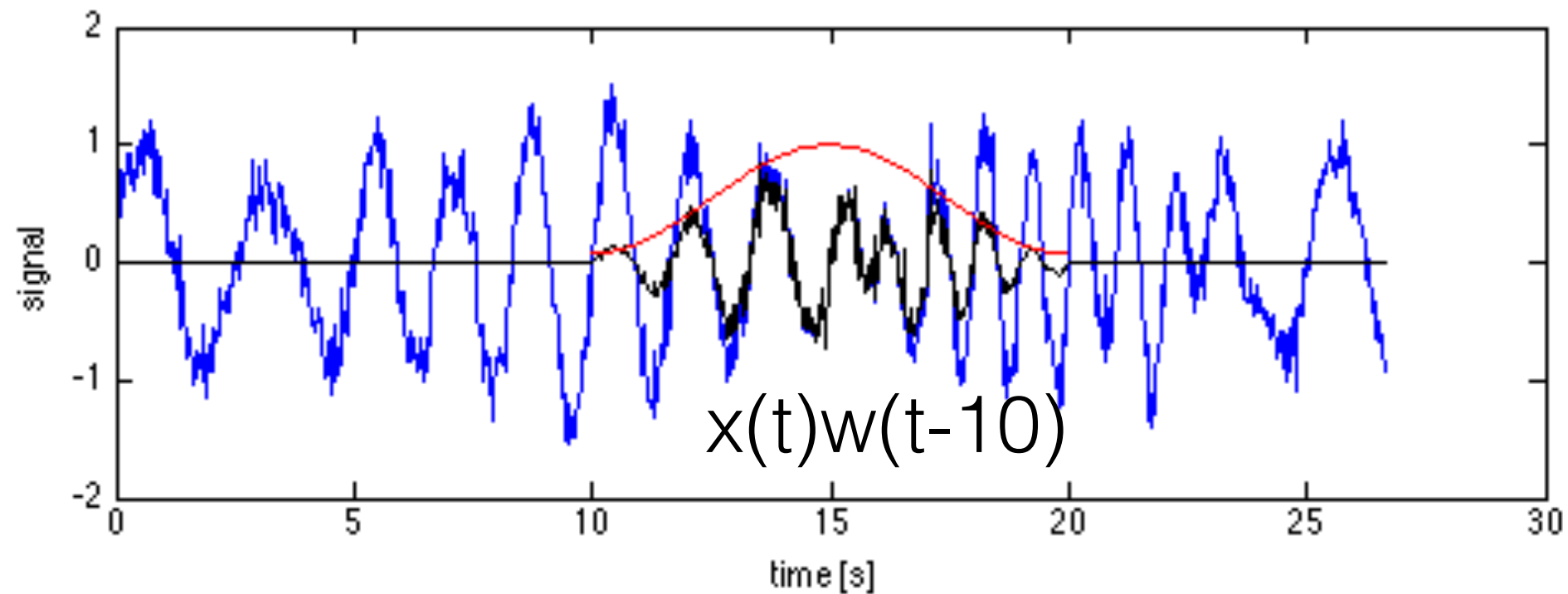
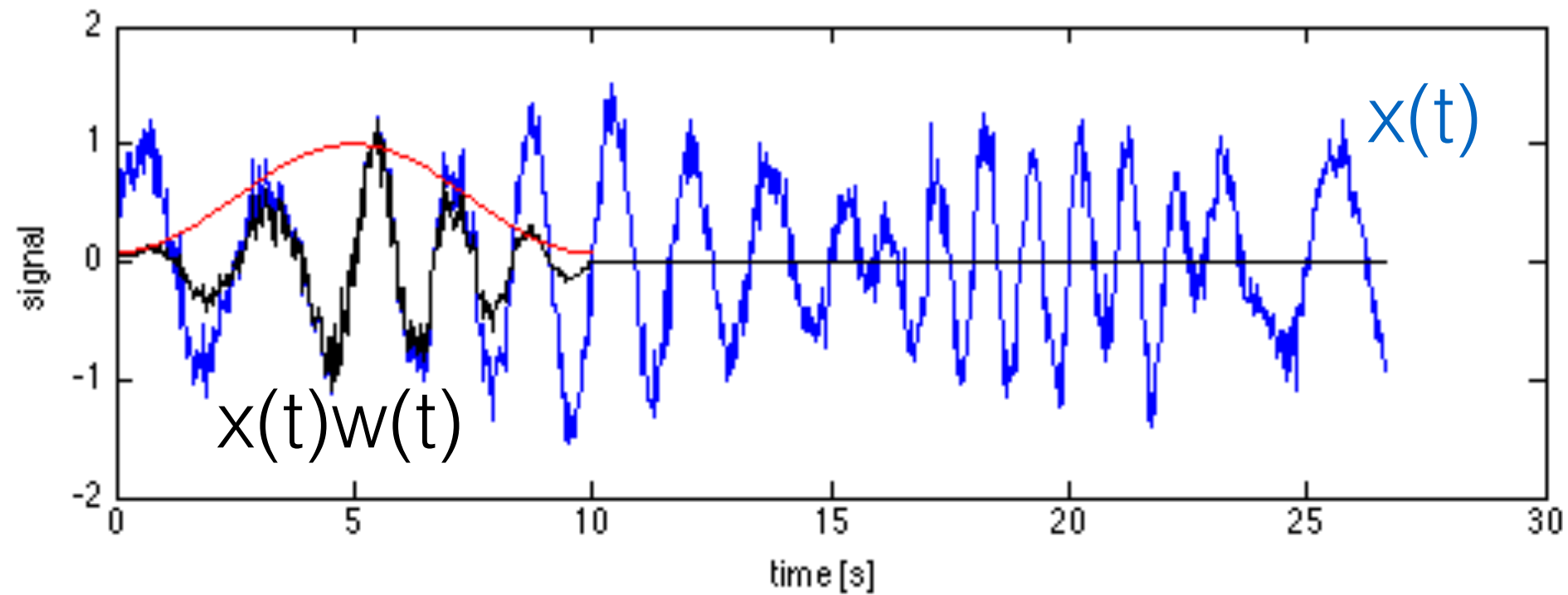
Fensterfunktion

zeitlich abgetastetes Signal

$$X(\tau_n, f) = \Delta t \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t_k) w(t_k - \tau_n) e^{-i2\pi f t_k}$$

FT von gefensterterem Signal verschoben um Zeit τ

oder: FT eines neuen Signals $x(t)w(t - \tau)$



STFT ist die Fourier Transformation

eines **Signalstücks** (**gewichtet** durch eine Fensterfunktion)

die entlang des Signals **gleitet**

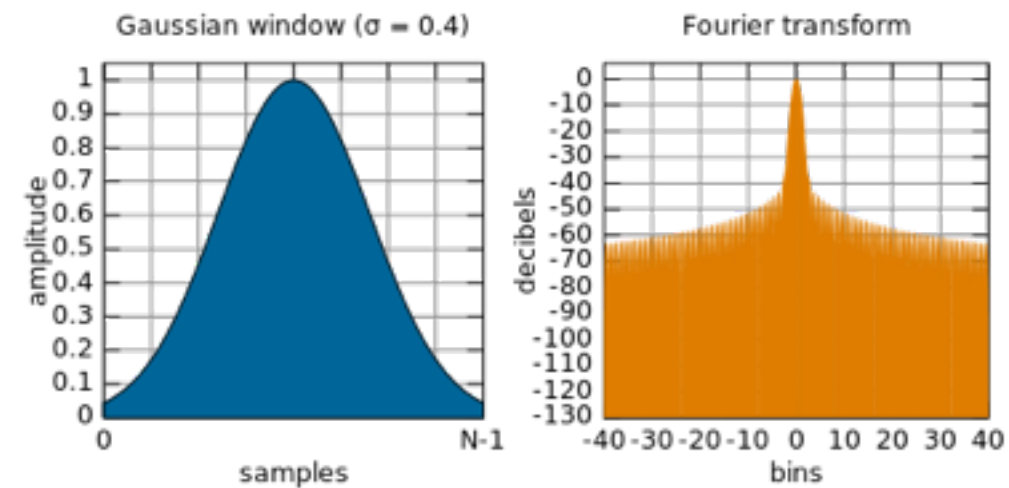


Standard-FT, jetzt in verschiedenen Zeitfenstern

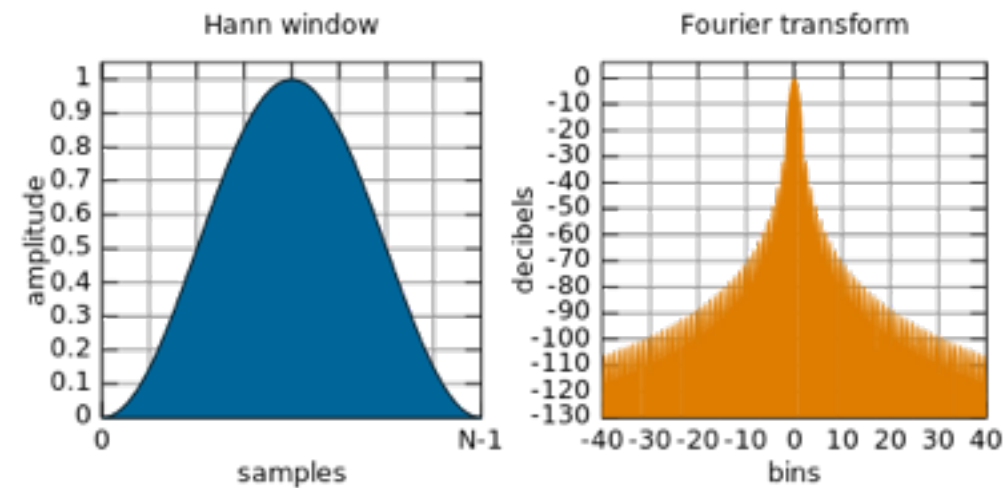
Typische Wahl des Zeitfensters:

Typische Wahl des Zeitfensters:

Gauss-Fenster



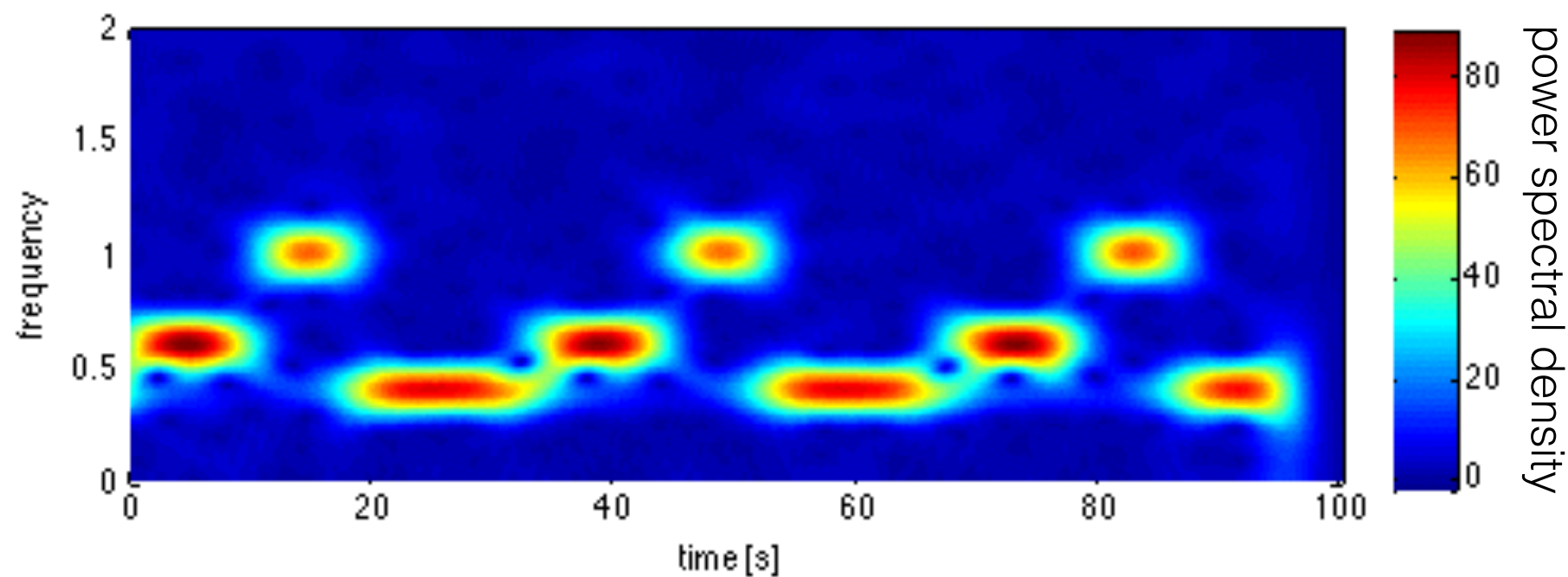
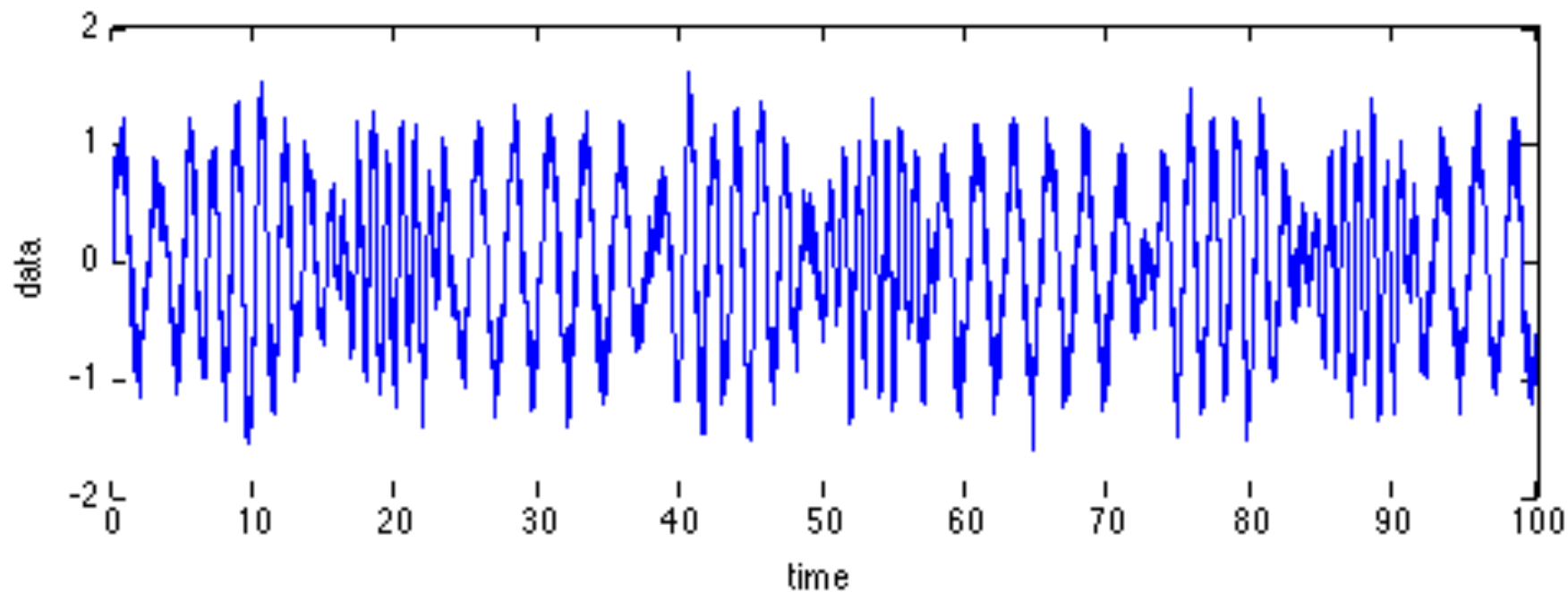
Hanning-Fenster



Zeitfenster:
10s

Frequenzauflösung
0.1Hz

9.967s Überlapp,
Hamming-Fenster



gute Frequenzauflösung, gute Zeitauflösung

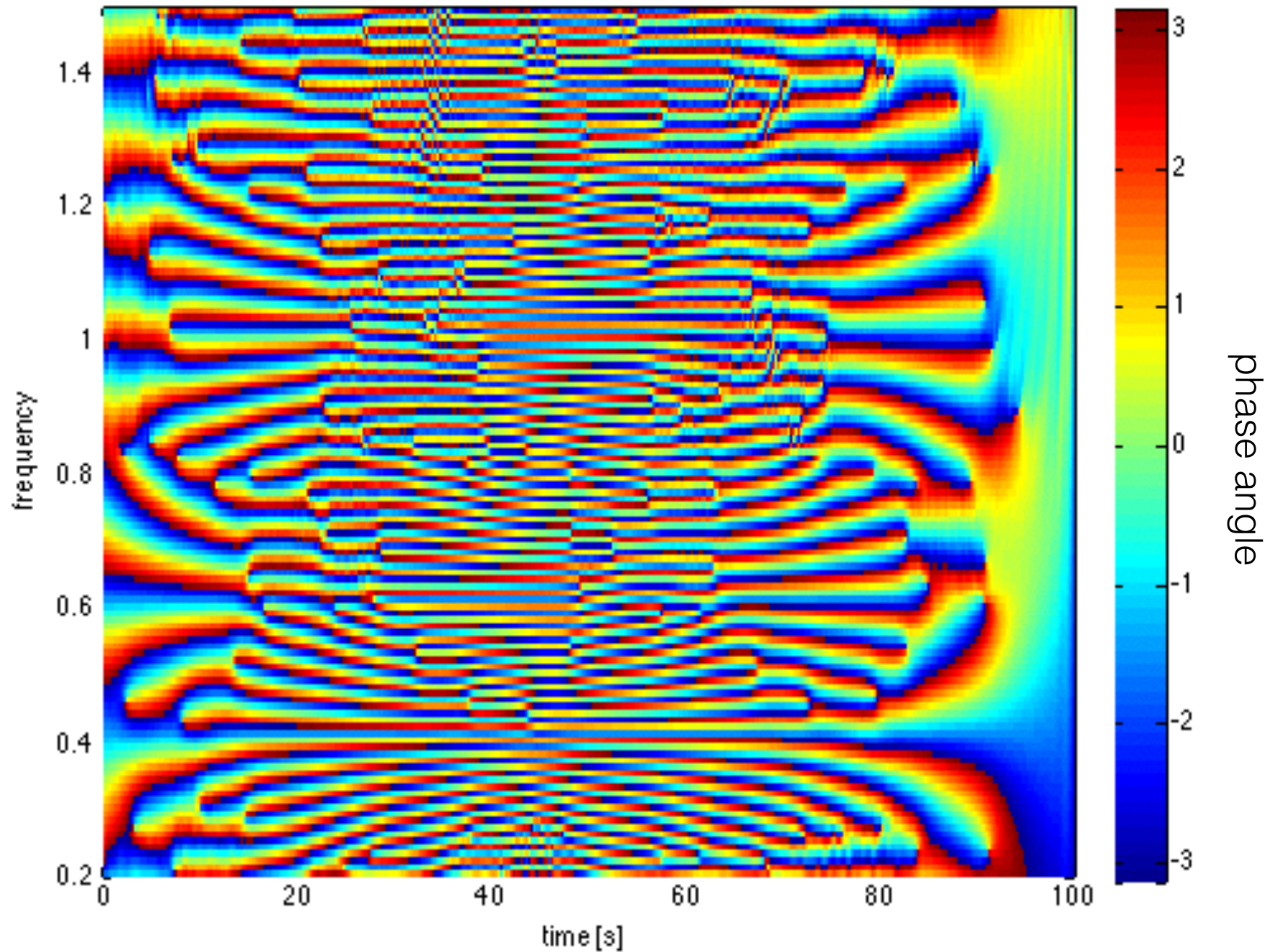
(TF_5.m)

gute Frequenzauflösung, gute Zeitauflösung:

warum ist das möglich ?

- Zeit-Frequenz Unschärfe noch gültig
- Oszillationen dauern lang an :
niedrige Zeitauflösung möglich
- **Qualität der Zeit-Frequenz-Repräsentation hängt
stark von den Daten ab**

was ist mit der Phase ?



Zeitfenster
10s

Frequenzauflösung
0.1Hz

9.967s Überlapp,
Hamming-Fenster

keine Interpretation möglich

(TF_7.m)

Fourier-Unschärferelation:

$$\Delta T \Delta f = \textit{const}$$

je kleiner die Konstante, desto besser

Frage:

wie kann man die **Fensterfunktion optimal** wählen,
so dass ***const* minimal** ist ?

Erinnerung:

$$(\Delta t)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |s(t)|^2 dt$$

$$(\Delta f)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2 |X(f)|^2 df$$

dann gilt auch:

$$(\Delta t)^2 (\Delta f)^2 \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

$$“\Delta t \Delta f \geq 0.079”$$

optimaler Fall

$$(\Delta t)^2 (\Delta f)^2 = \frac{1}{16\pi^2}$$

falls $s(t)$ und $X(f)$ eine **Gauss-Funktion** ist



optimale Fensterfunktion **w** ist eine **Gauss-Funktion**

III. Zeit-Frequenz Analyse

Short-time Fourier Transform

Gabor Transformation

Lineare Filter

Wavelet Transformation

Konzept des Analytischen Signals

Reassignment Methoden

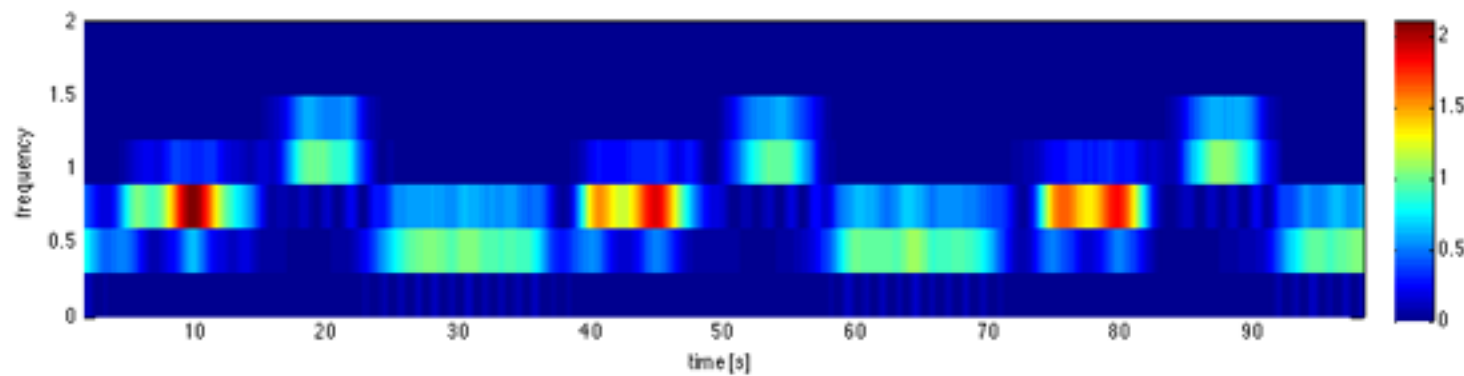
Gabor Transformation

zeitkontinuierliches Signal:

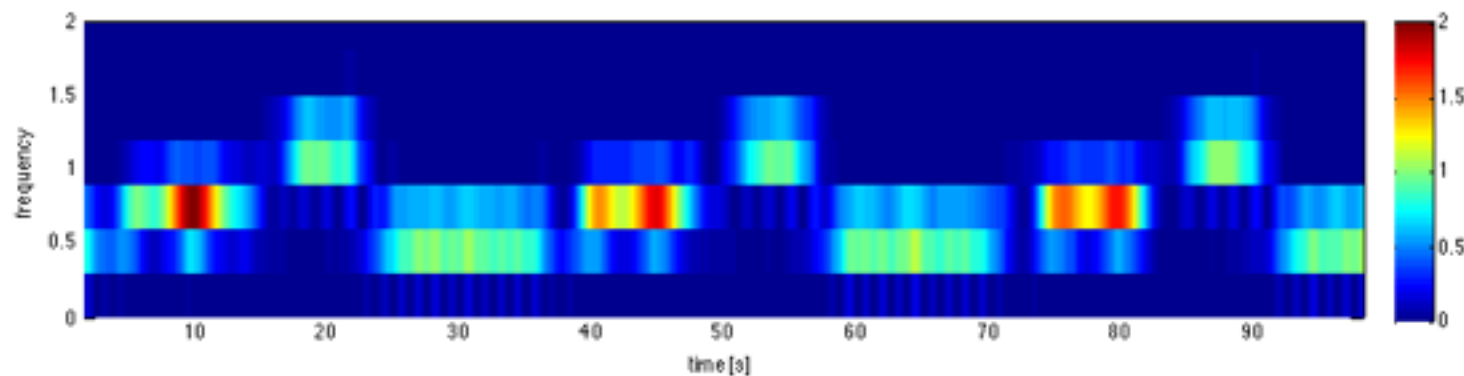
$$X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-i2\pi ft} dt$$

Fensterfunktion

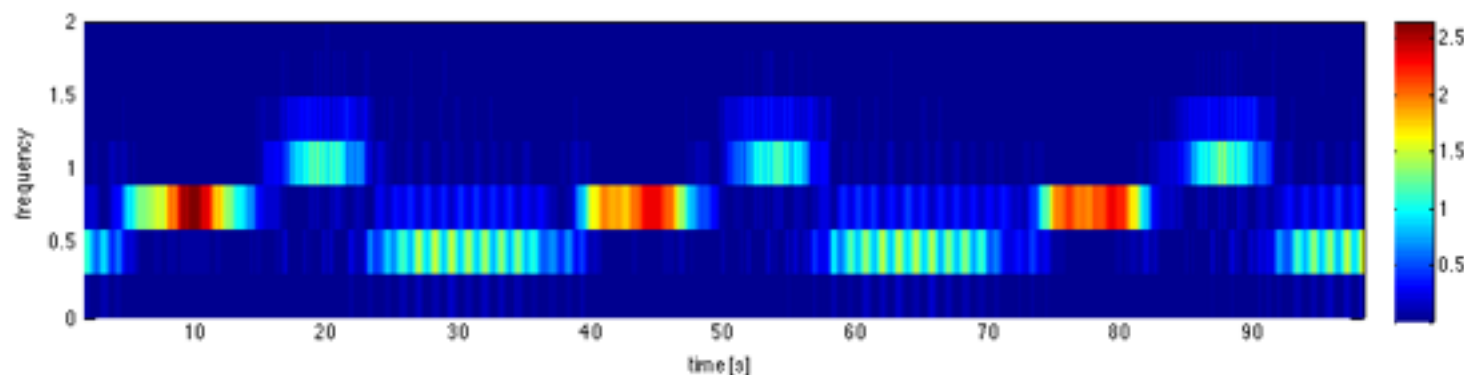
$$w(t - \tau) = e^{-\pi(t-\tau)^2}$$



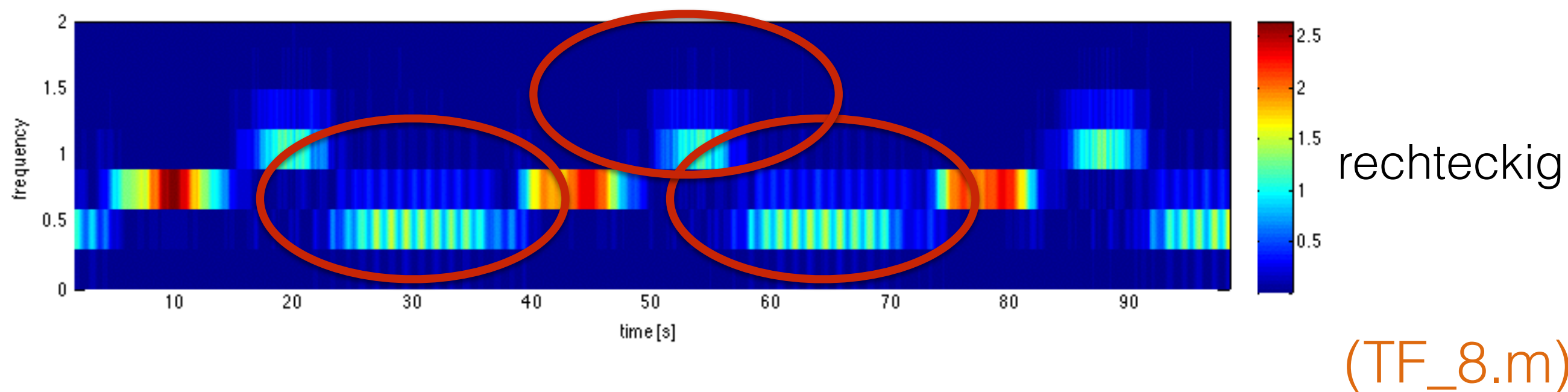
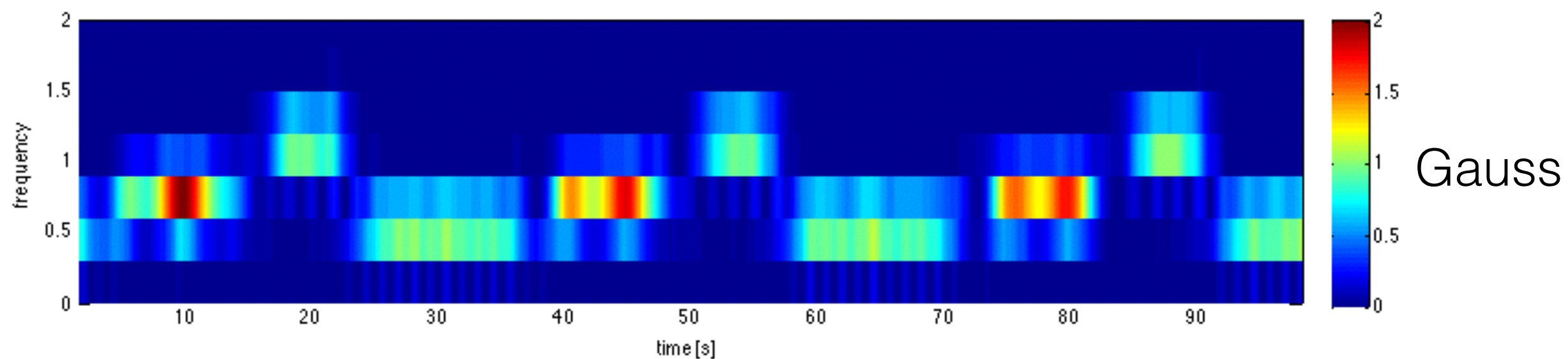
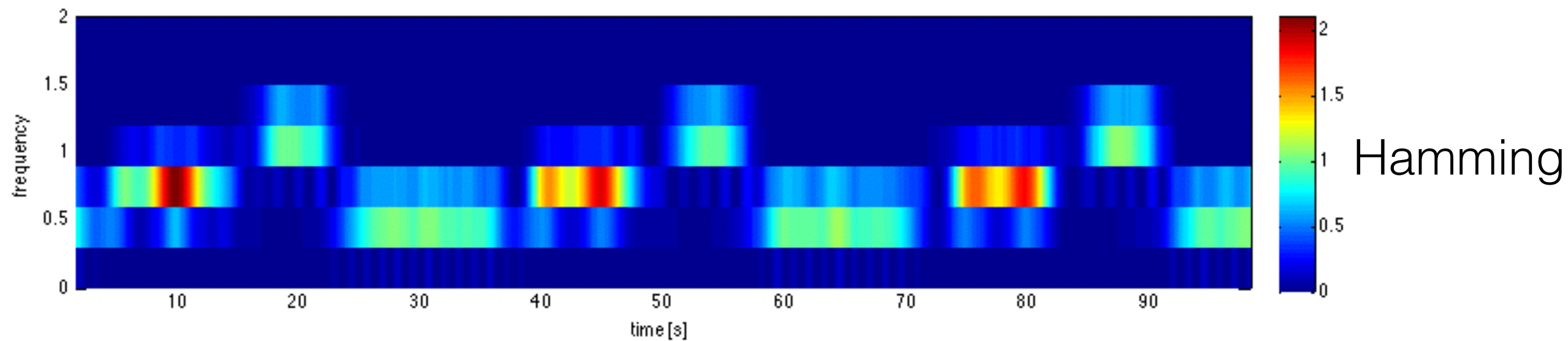
Hamming



Gauss



rechteckig



III. Zeit-Frequenz Analyse

Short-time Fourier Transform

Gabor Transformation

Lineare Filter

Wavelet Transformation

Konzept des Analytischen Signals

Reassignment Methoden

Verallgemeinerung:

Linearer Frequenzfilter:

$$X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) w(t - \tau) e^{-i2\pi f(t - \tau)} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) h(t - \tau) dt$$

Impulsantwort-Funktion

Short-time Fourier Transform:

$$X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-i2\pi ft} dt$$

window function

Linear frequency filter:

$$X(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-i2\pi f(t - \tau)} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)h(t - \tau)dt$$

impulse response function

III. Zeit-Frequenz Analyse

Short-time Fourier Transform

Gabor Transformation

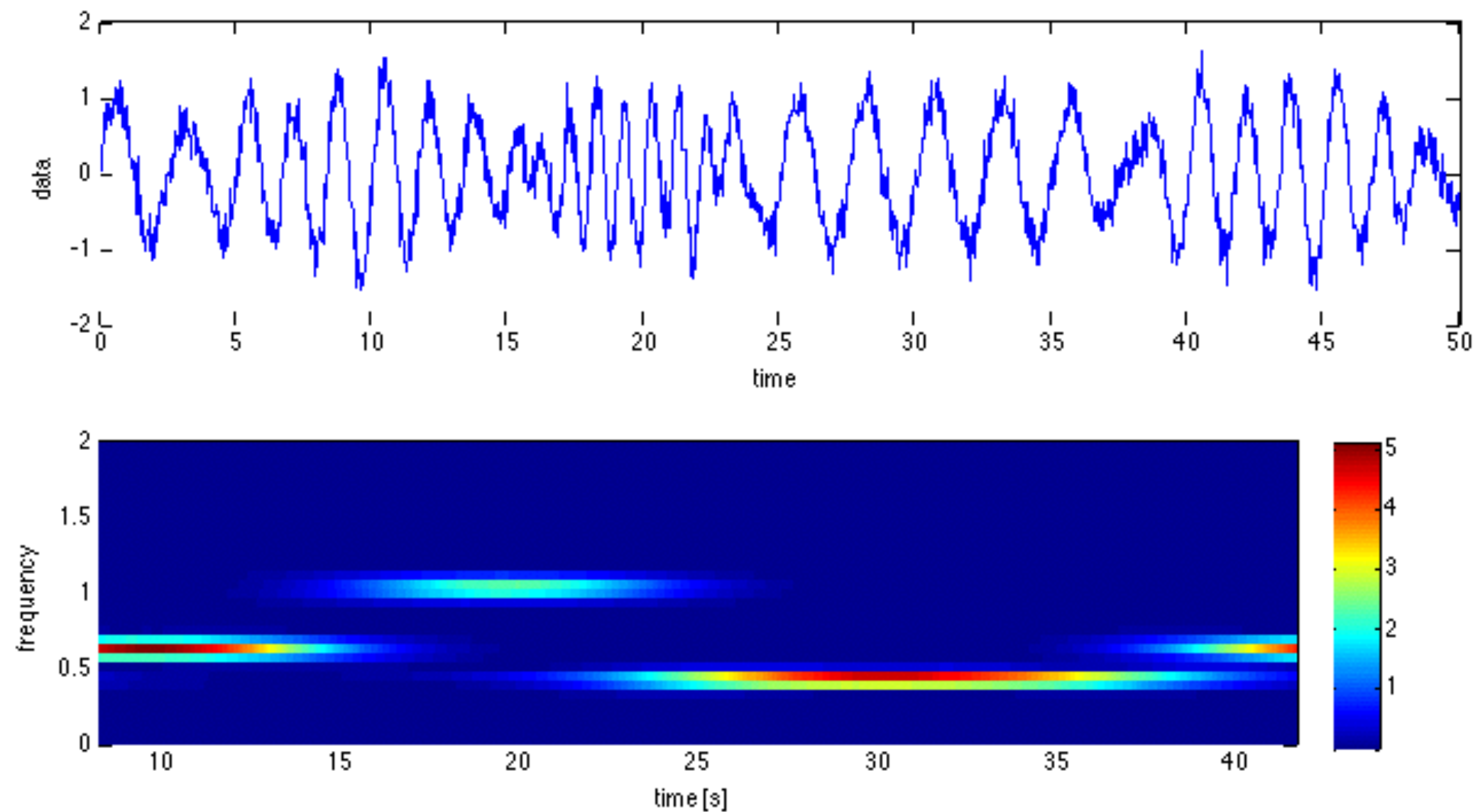
Lineare Filter

Wavelet Transformation

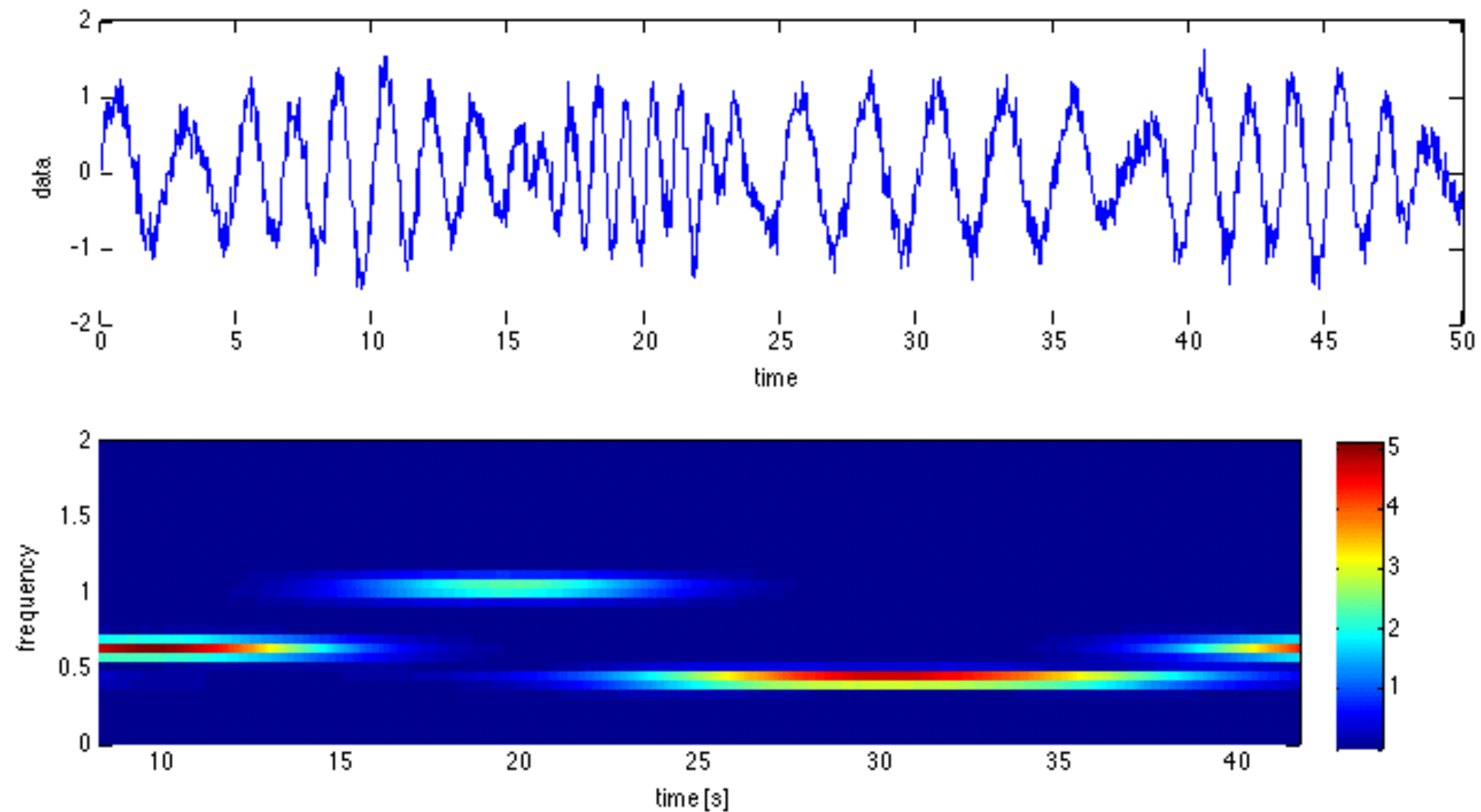
Konzept des Analytischen Signals

Reassignment Methoden

bis jetzt ist Zeitfenster identisch für alle Frequenzen

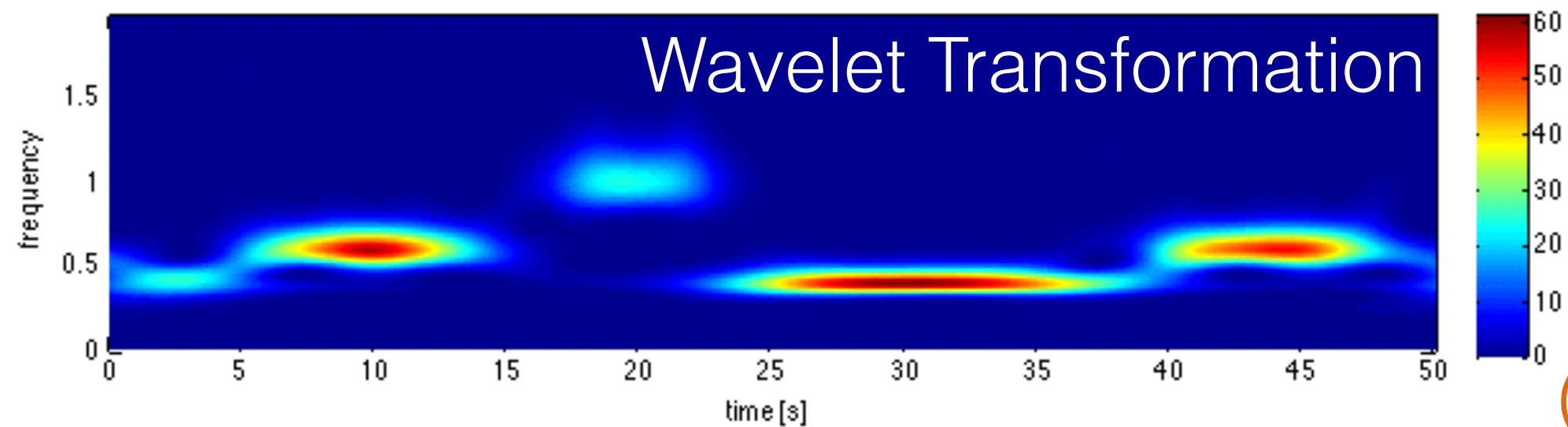
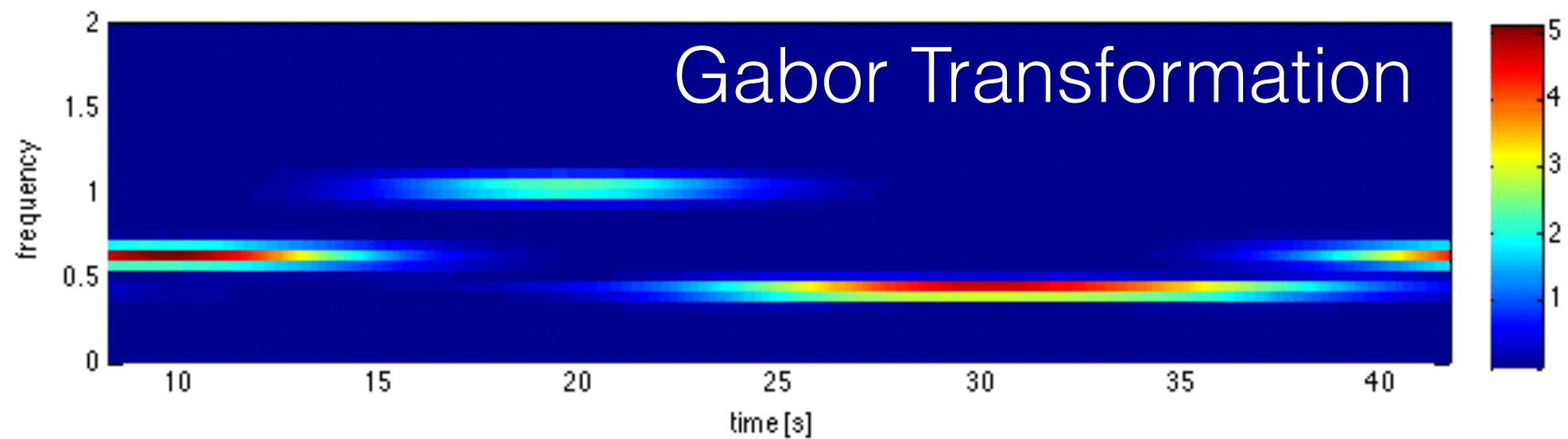
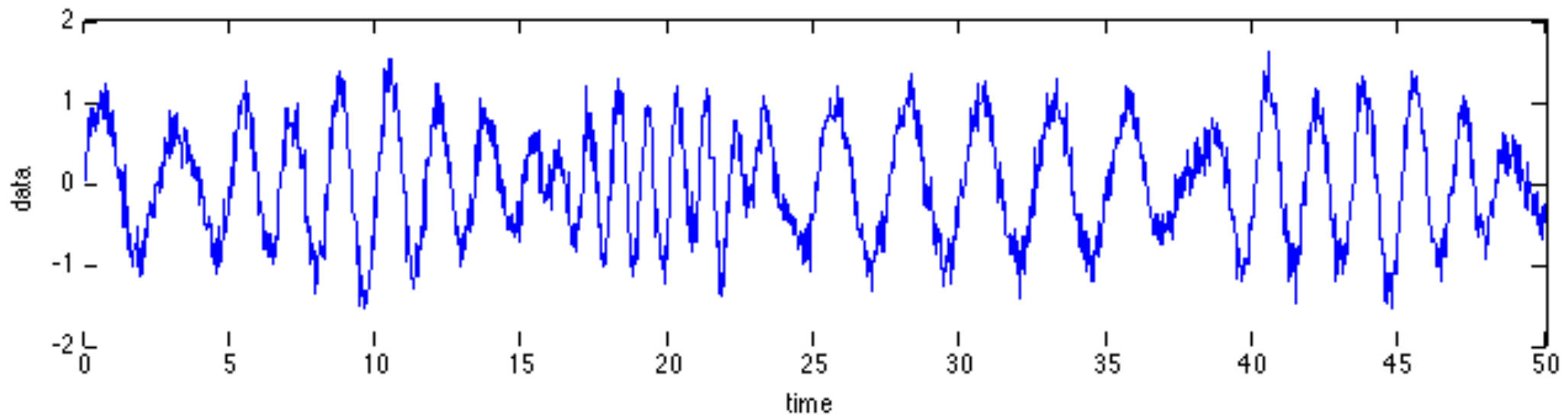


bis jetzt ist Zeitfenster identisch für alle Frequenzen



zeitliche Lokalisierung ist nicht gut

Lösung : *multi-resolution analysis*



(TF_9.m)

Hauptidee: linearer Filter mit variabler Skala

Hauptidee: linearer Filter mit variabler Skala

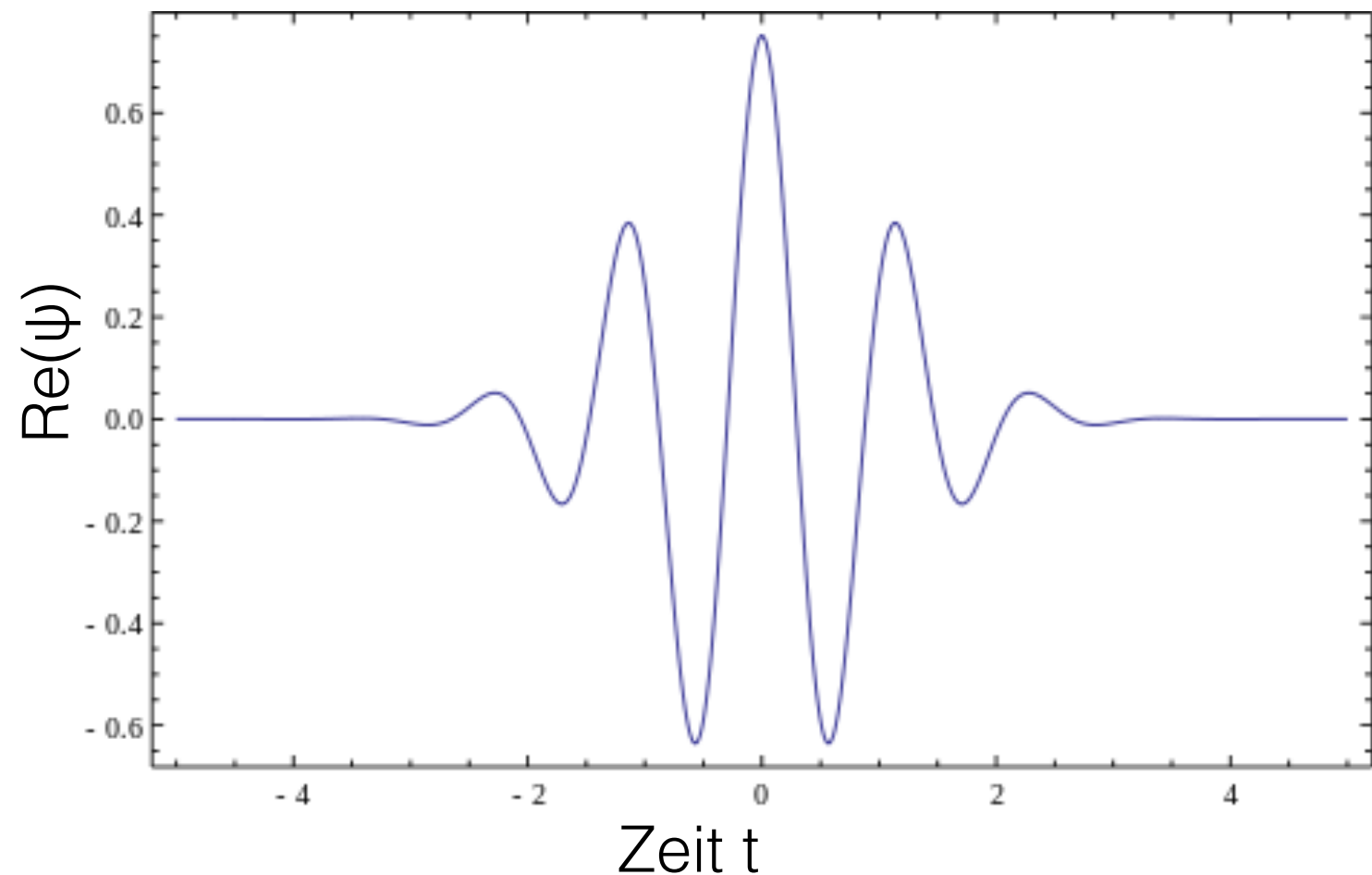


$$X(\tau, a) \sim \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{\Psi} \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

a: Zeitskalierungsfaktor

e.g.

$$\Psi_a(t) = k_1 e^{-t^2} (e^{-i \frac{t}{a}} - k_2)$$



Kontinuierliche Wavelet Transformation

Kontinuierliche Wavelet Transformation

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{\Psi} \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$

Ψ : mother wavelet

a : $a > 0$, Zeitskala ($\sim 1/f$)

τ : Zentrum des gleitenden Zeitfenster

ähnlich der Fourier Transformation existiert die Inverse:

$$x(t) = \frac{2}{a^{5/2}C} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} X(\tau, a) \Psi \left(\frac{t - \tau}{a} \right) da d\tau$$

falls $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0$ (*admissibility condition*)

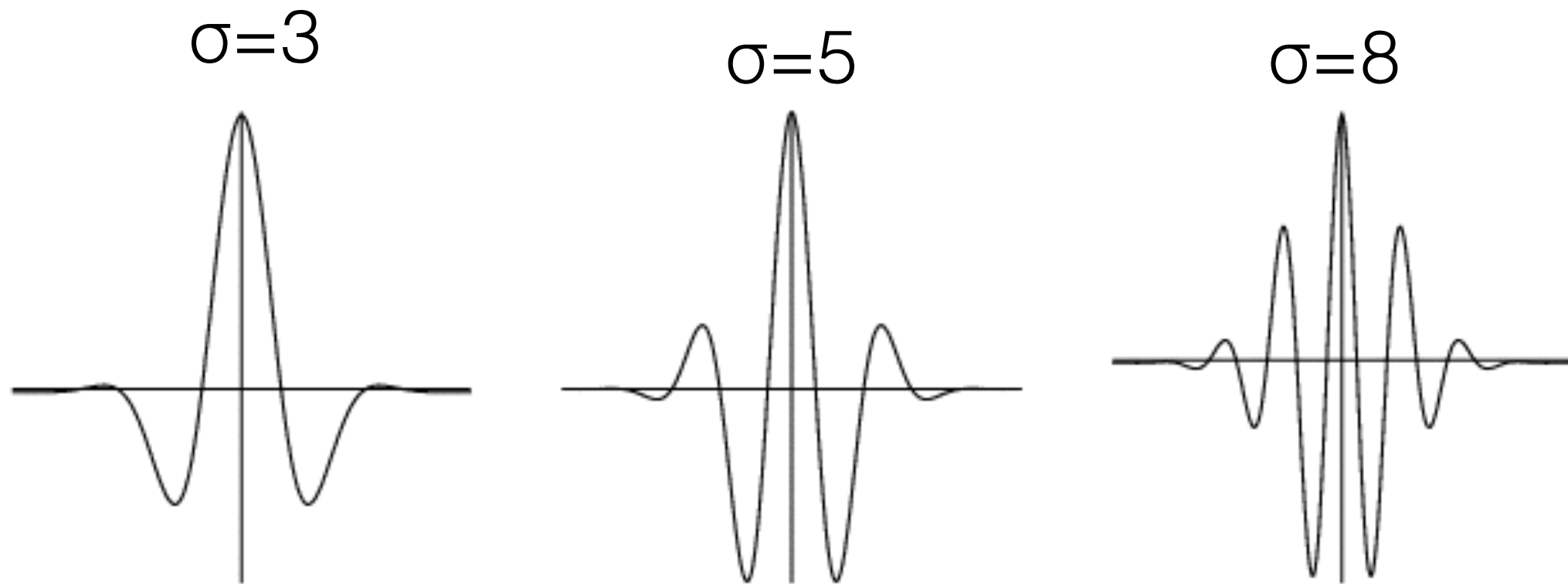
Interpretation:

- $X(\tau, a)$ ist die Korrelation zwischen dem Signal und dem Wavelet
- falls $x(t)$ and $\psi((t-\tau)/a)$ sehr ähnlich um τ sind, dann ist $X(\tau, a)$ groß
- $\psi((t-\tau)/a)$ ist eine Fensterfunktion mit variierenden Skalen-Eigenschaften

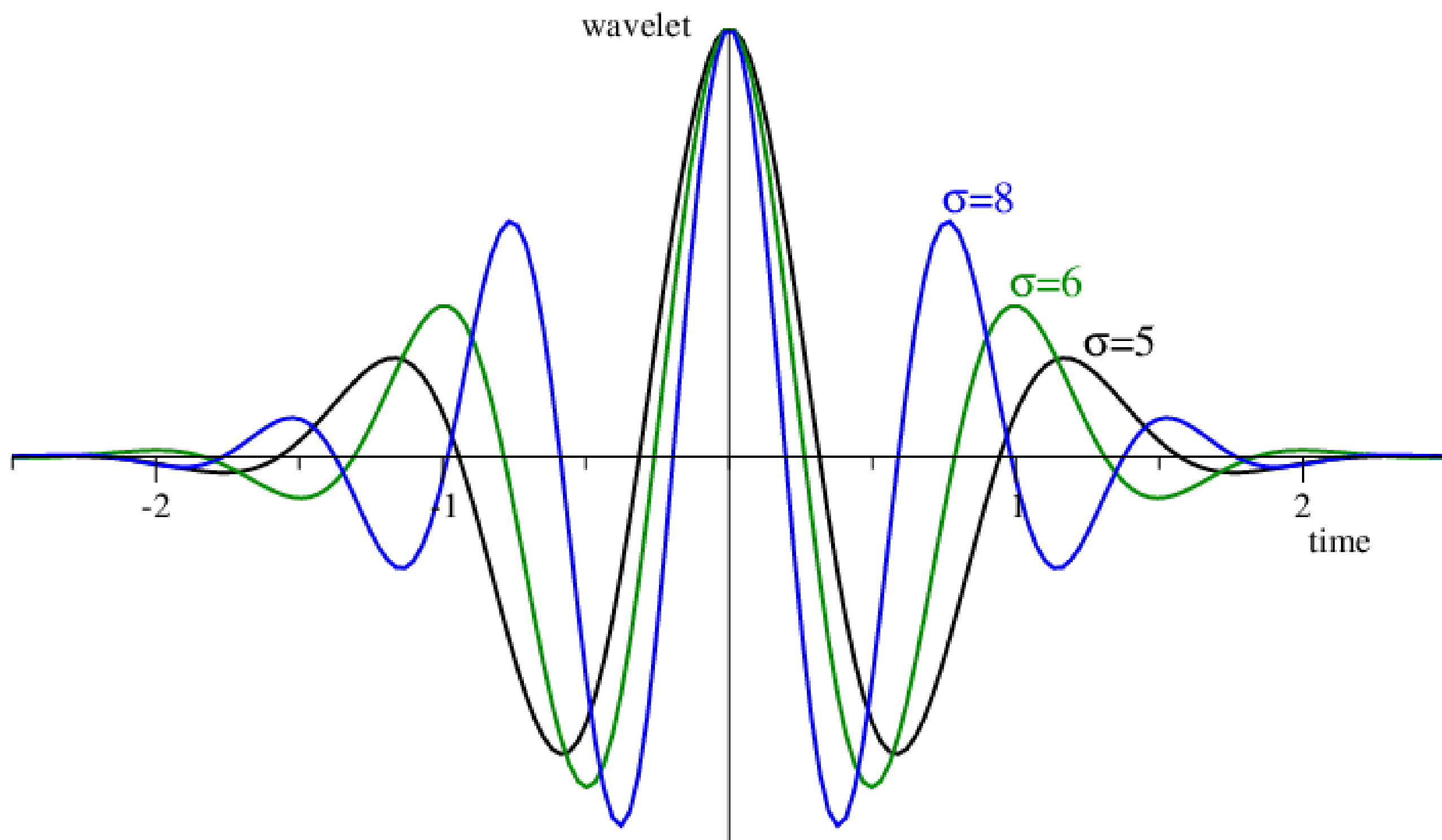
Eigenschaft: admissibility

da $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0$: Ψ muss oszillatorische Funktion sein

Beispiel: komplexwertige Morlet wavelet $\Psi(t) = k_1 e^{-t^2} (e^{-i\sigma t} - k_2)$



empfohlen : $5 < \sigma < 10$



Eigenschaft: Faltung

$$X(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \bar{\Psi} \left(\frac{t - \tau}{a} \right) dt$$



$$X(\tau, a) \sim IFT \left[\tilde{X}(f) \cdot \tilde{\tilde{\Psi}}(af) \right]$$

Beispiel: Morlet wavelet

$$\bar{\Psi}(t) = e^{-t^2} e^{i\sigma t}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\Psi}}(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{i\sigma t} e^{-i2\pi\nu t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2 + iAt} dt \end{aligned}$$

$$A = \sigma - 2\pi\nu$$

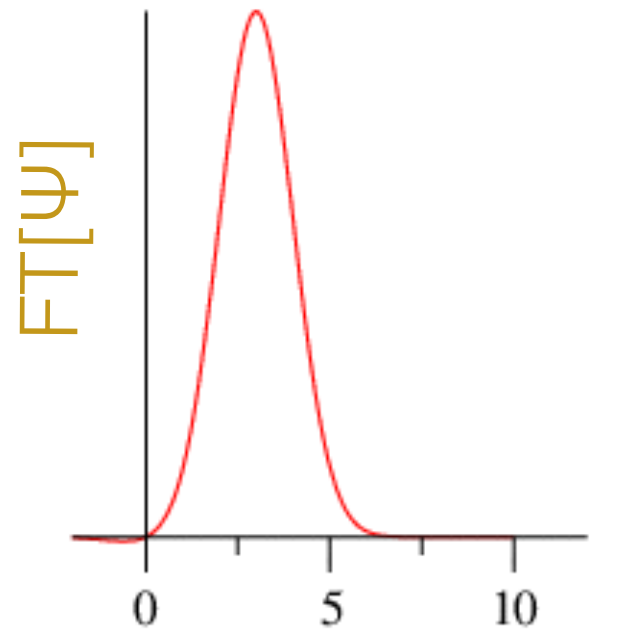
$$\begin{aligned}
 -t^2 + iAt &= - \left(t^2 - iAt + \frac{i^2}{4} A^2 - \frac{i^2}{4} A^2 \right) \\
 &= - \left(t^2 - iAt + \frac{i^2}{4} A^2 \right) - \frac{A^2}{4} \\
 &= - \left(t - \frac{iA}{2} \right)^2 - \frac{A^2}{4}
 \end{aligned}$$

$$\tilde{\tilde{\Psi}}(\nu) = e^{-A^2/4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-iA/2)^2} dt$$

$$= \sqrt{\pi} e^{-(\sigma - 2\pi\nu)^2/4}$$

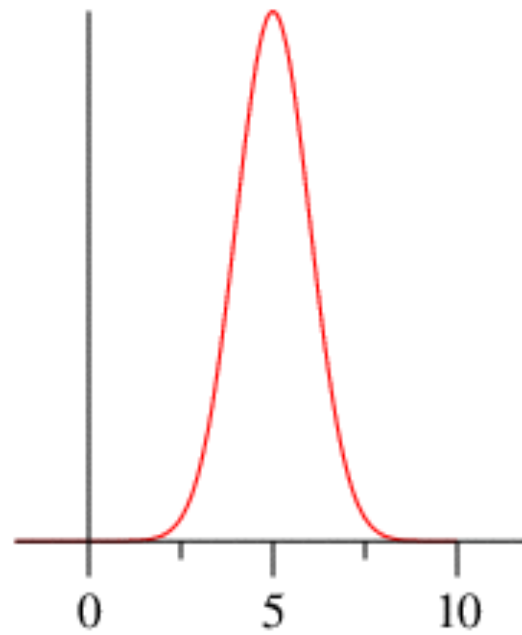
Maximum bei $\nu = \frac{\sigma}{2\pi}$

$$\sigma=3$$



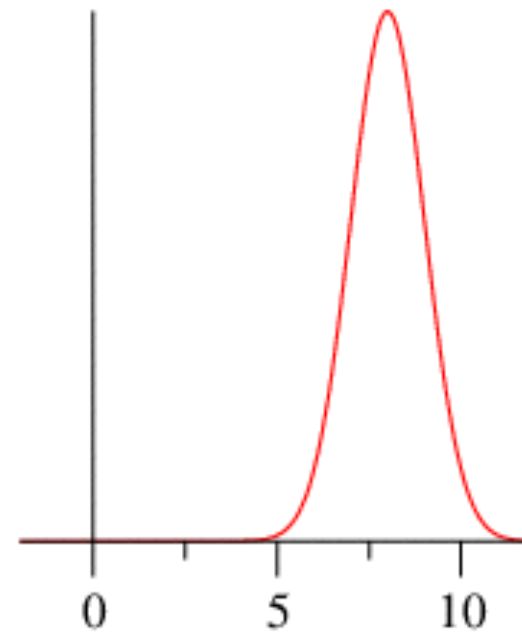
Winkelfrequenz

$$\sigma=5$$



Winkelfrequenz

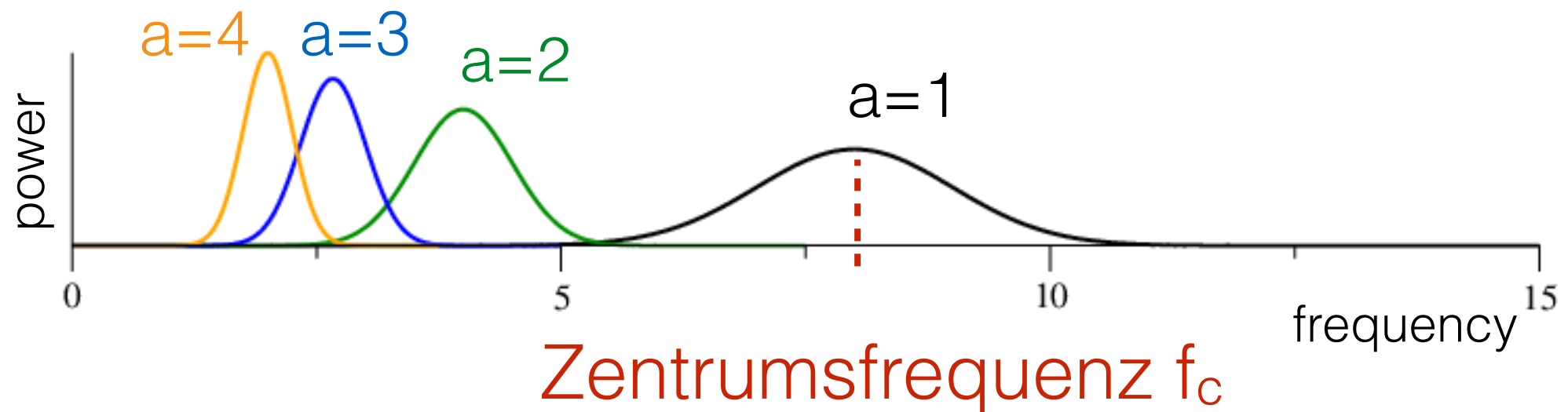
$$\sigma=8$$



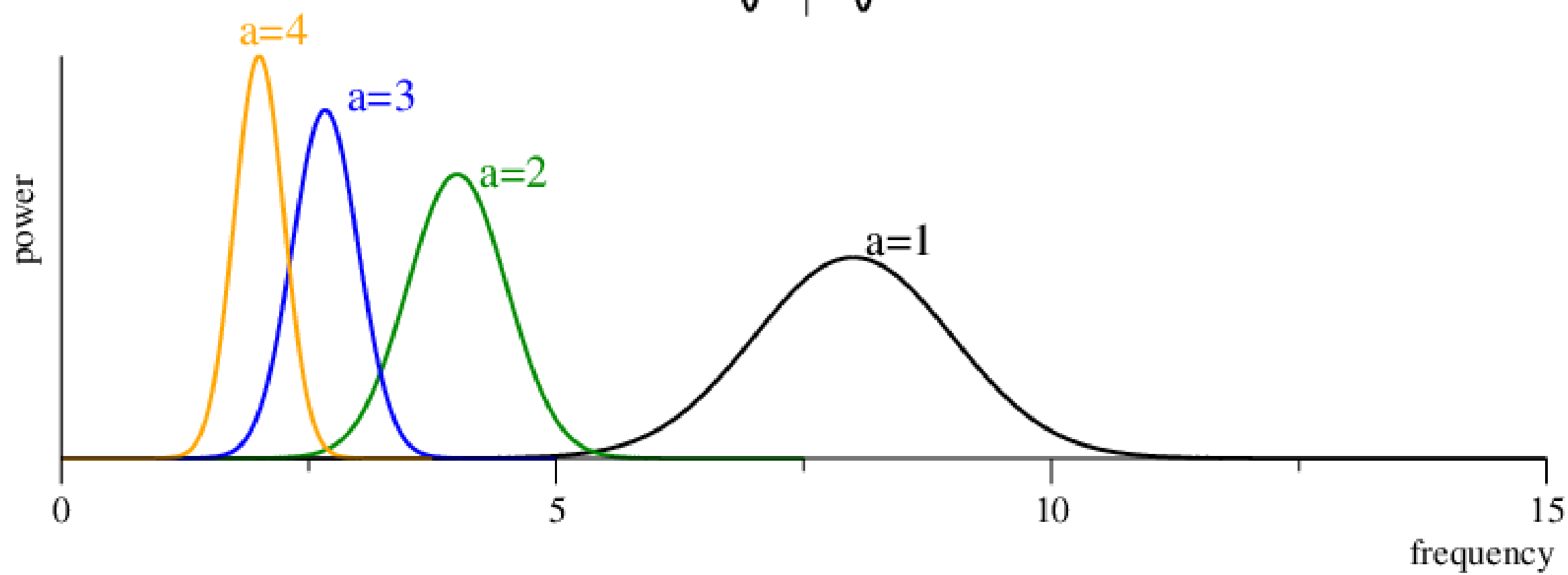
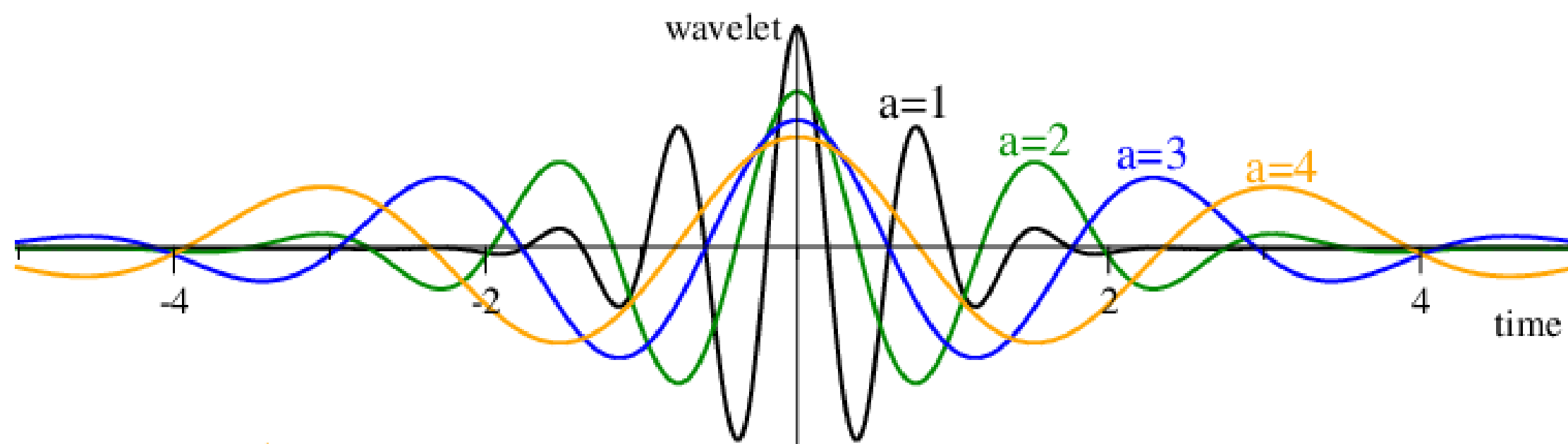
Winkelfrequenz

Eigenschaft: verschiedene Skalen / Frequenzen

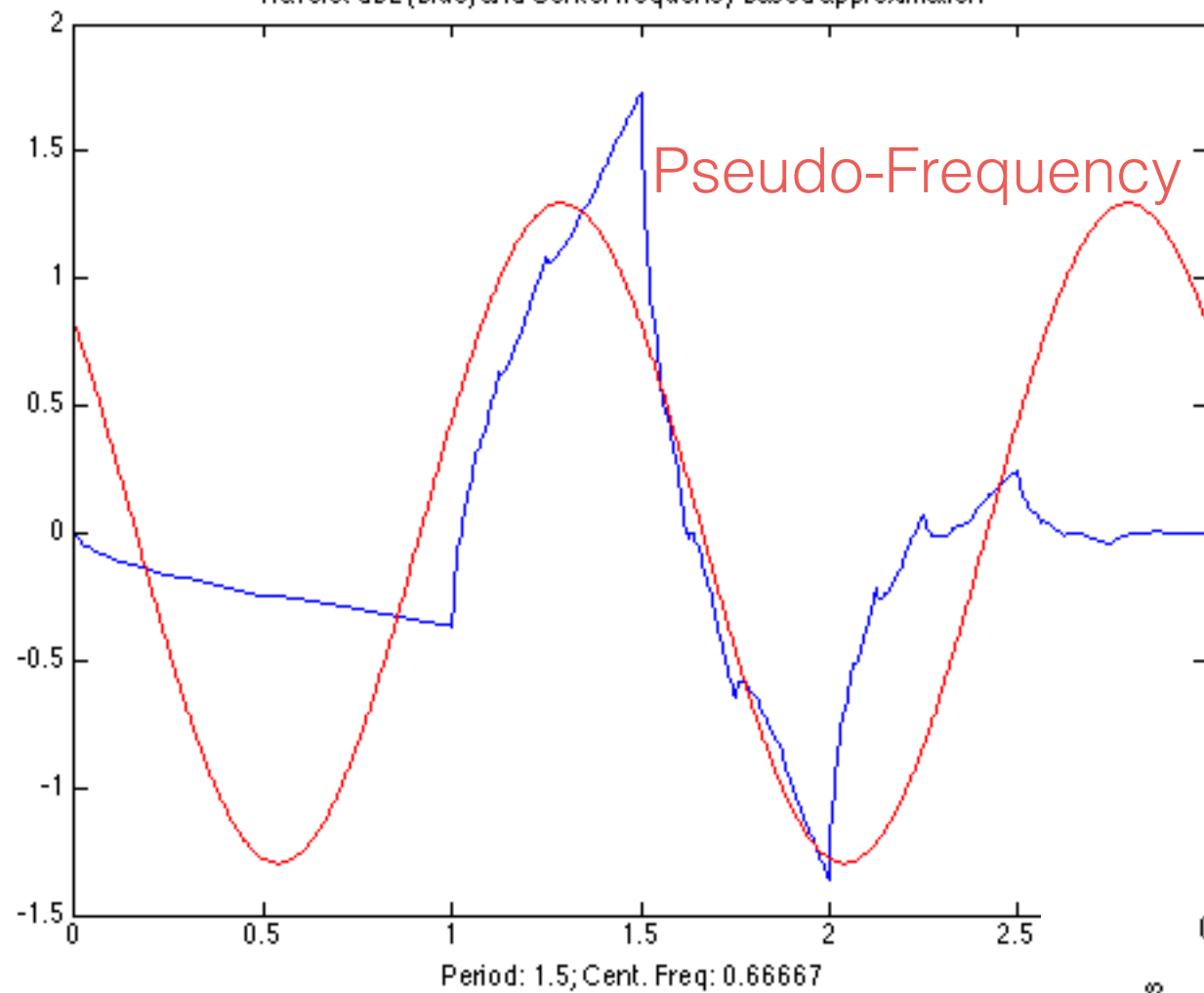
Beispiel:



- jedes wavelet hat eine Frequenz f_c mit maximaler Leistung
- Skalenfaktor verkleinert diese Frequenz mittels $\frac{f_c}{a}$
- eine *Pseudo-Frequenz* ist definiert als $f_p = \frac{f_c}{a\Delta t}$
 Δt : sampling time

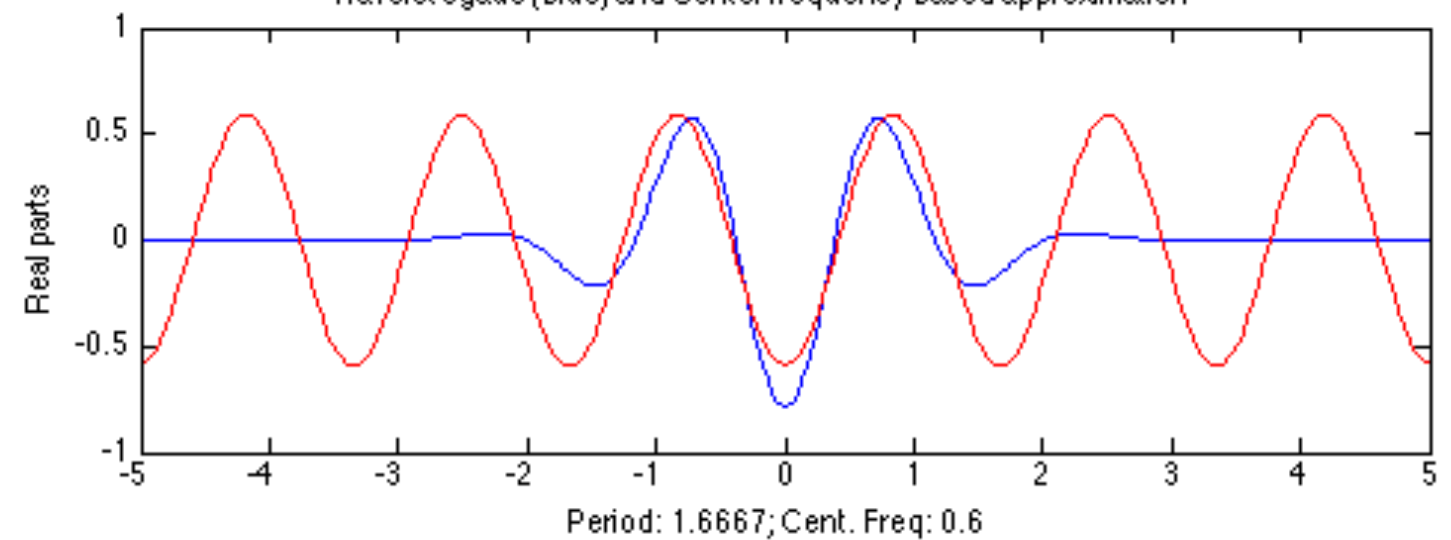


Wavelet db2 (blue) and Centerfrequency based approximation

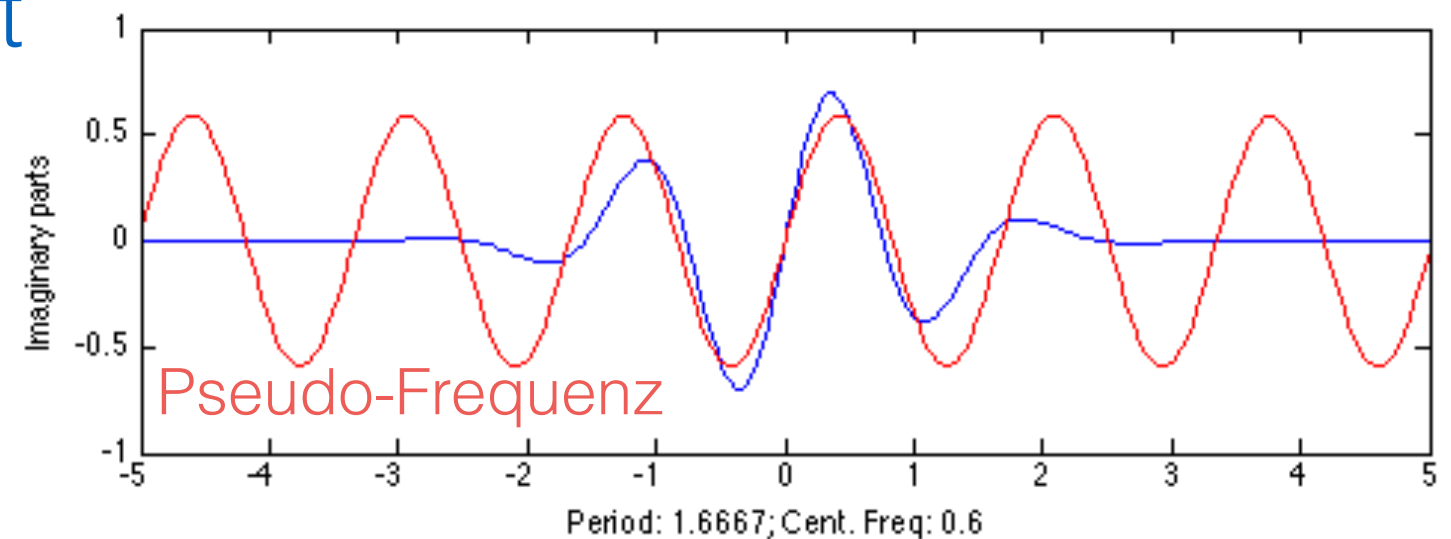


realwertiges Daubechies wavelet

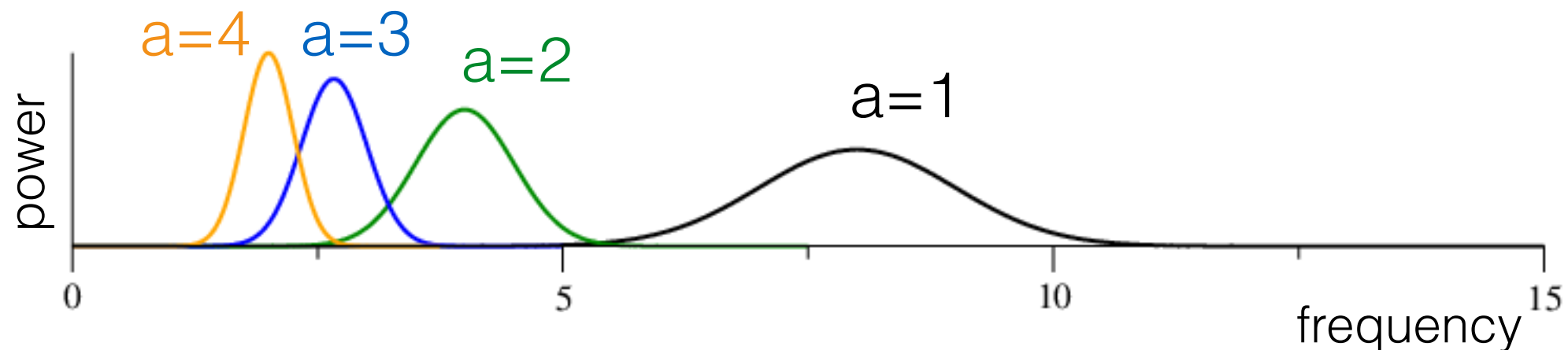
Wavelet cgau6 (blue) and Centerfrequency based approximation



komplexes Gauss wavelet



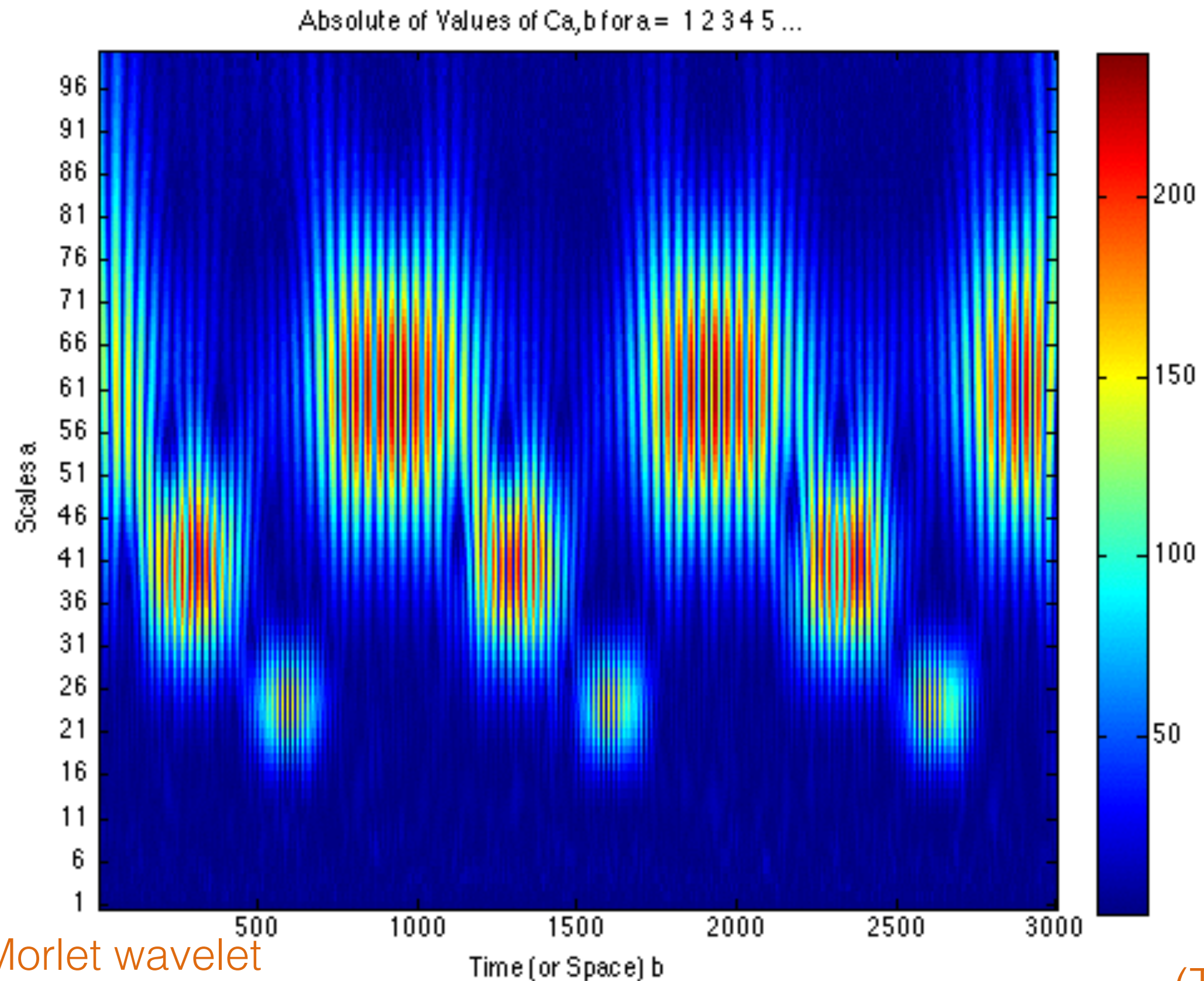
Eigenschaft: Energieerhaltung



- Energieerhaltung : Fläche unter der Kurve ist konstant
- je grösser die Skala, desto höher ist die Leistungsspitze
- **je kleiner die Frequenz, desto höher ist die Leistungsspitze**

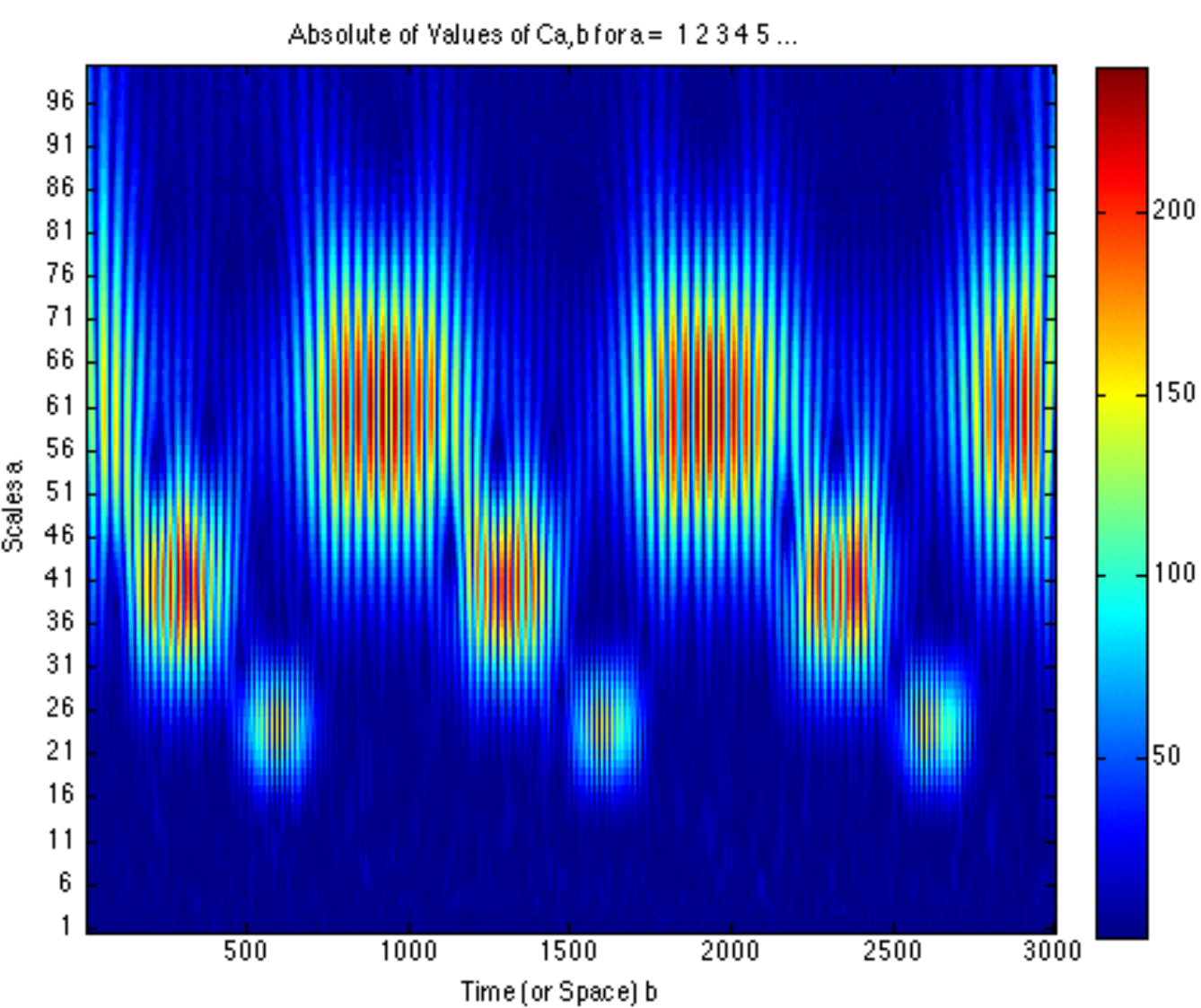
Beispiel: **Skalogram**

(angewandt auf Transiente Oszillationen)



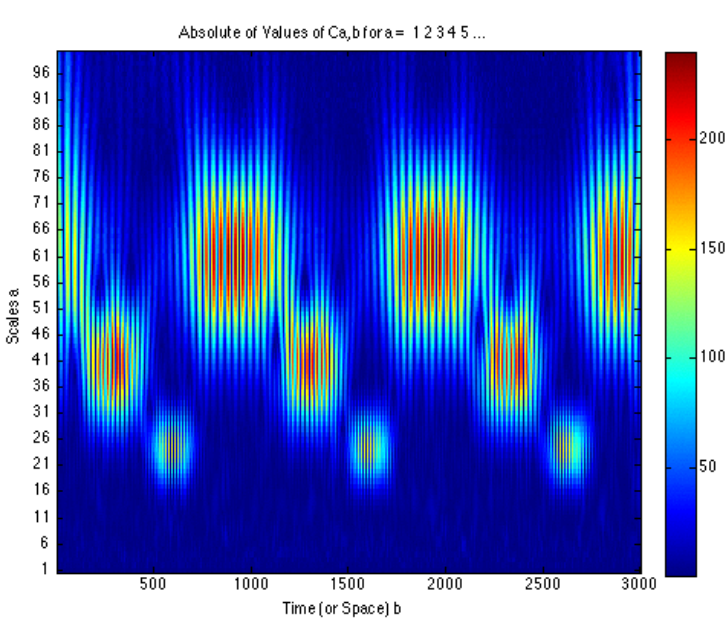
reales Morlet wavelet

(TF_12.m)



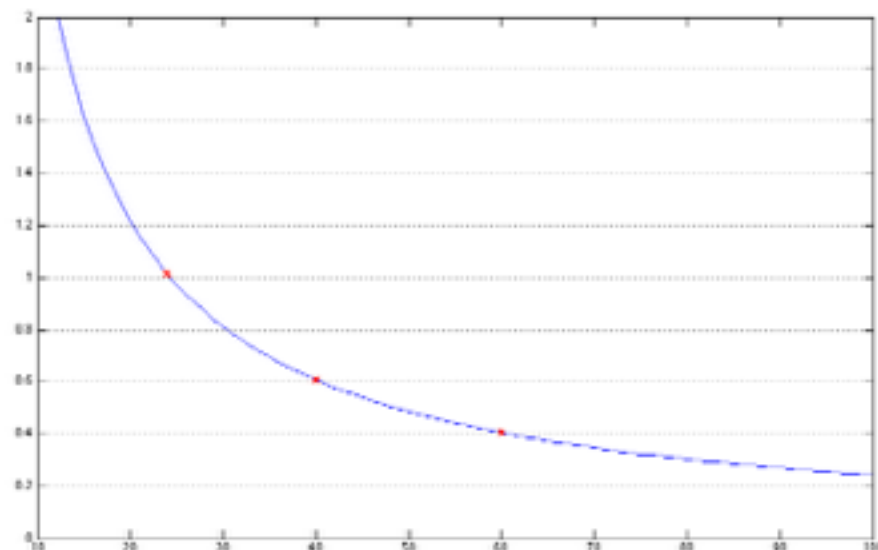
Nachteil:

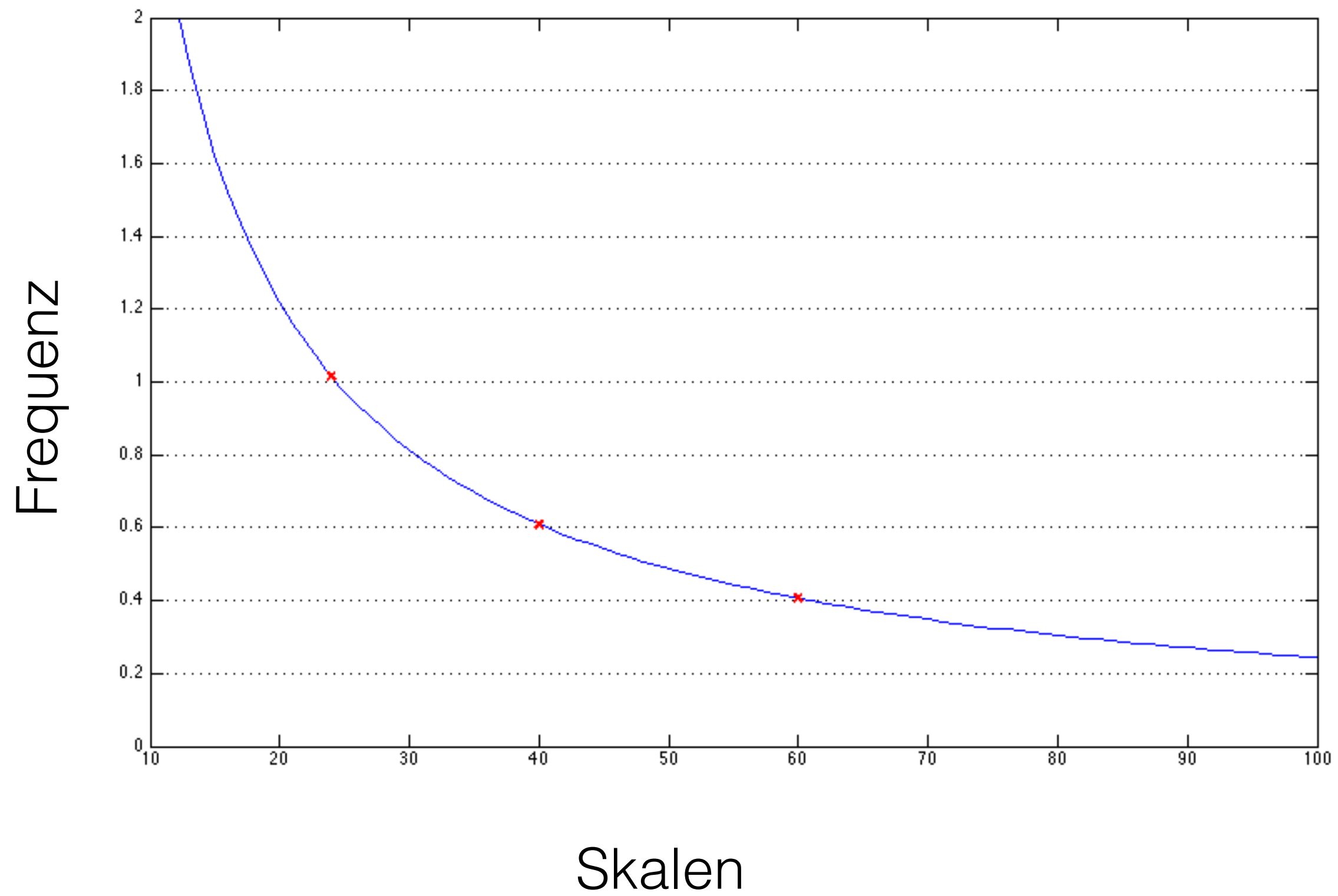
1. feine Unterstruktur der Leistungsspitzen
2. kleine Leistung bei kleinen Skalen
3. ausgedehnte Spektralspitzen
4. Relation zu Frequenz nicht klar



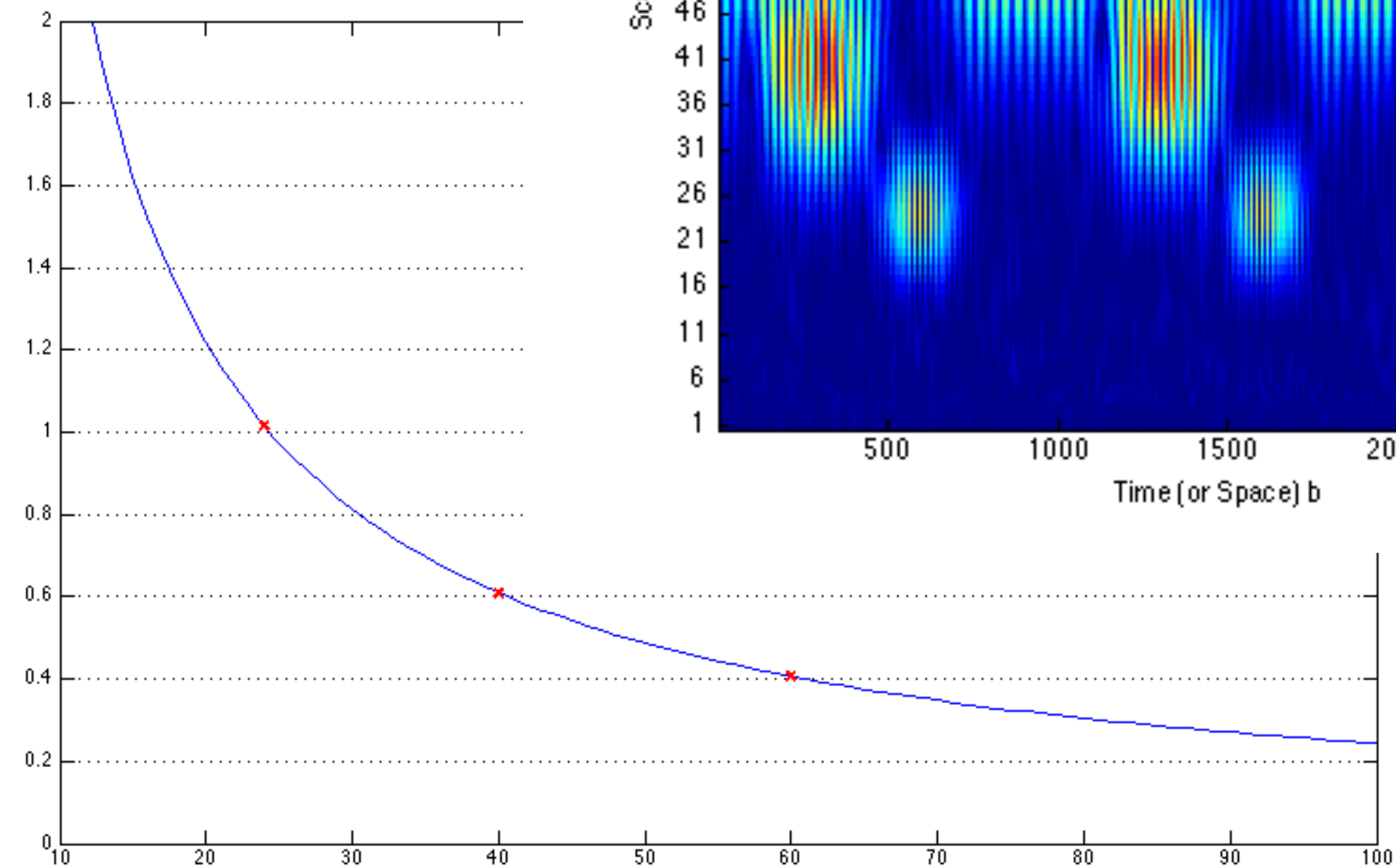
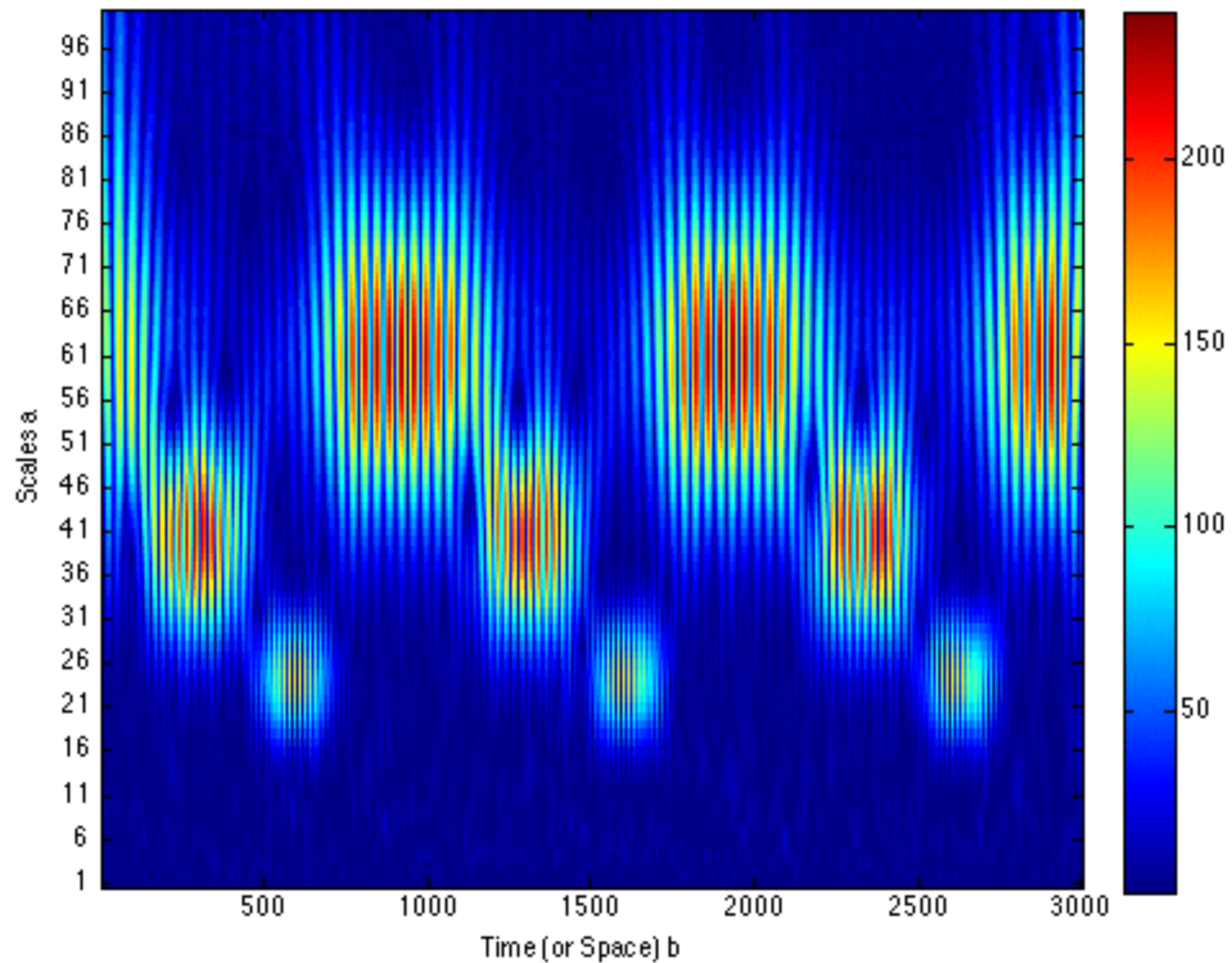
Erklärungen:

1. Unterstruktur
detektiert Maxima und Minima des Signals
2. kleine Leistung bei kleinen Skalen
Energieerhaltung
3. ausgedehnte Leistungsspitzen
mehr Skalen bei bei kleinen Frequenzen
4. Relation zu Frequenz unklar



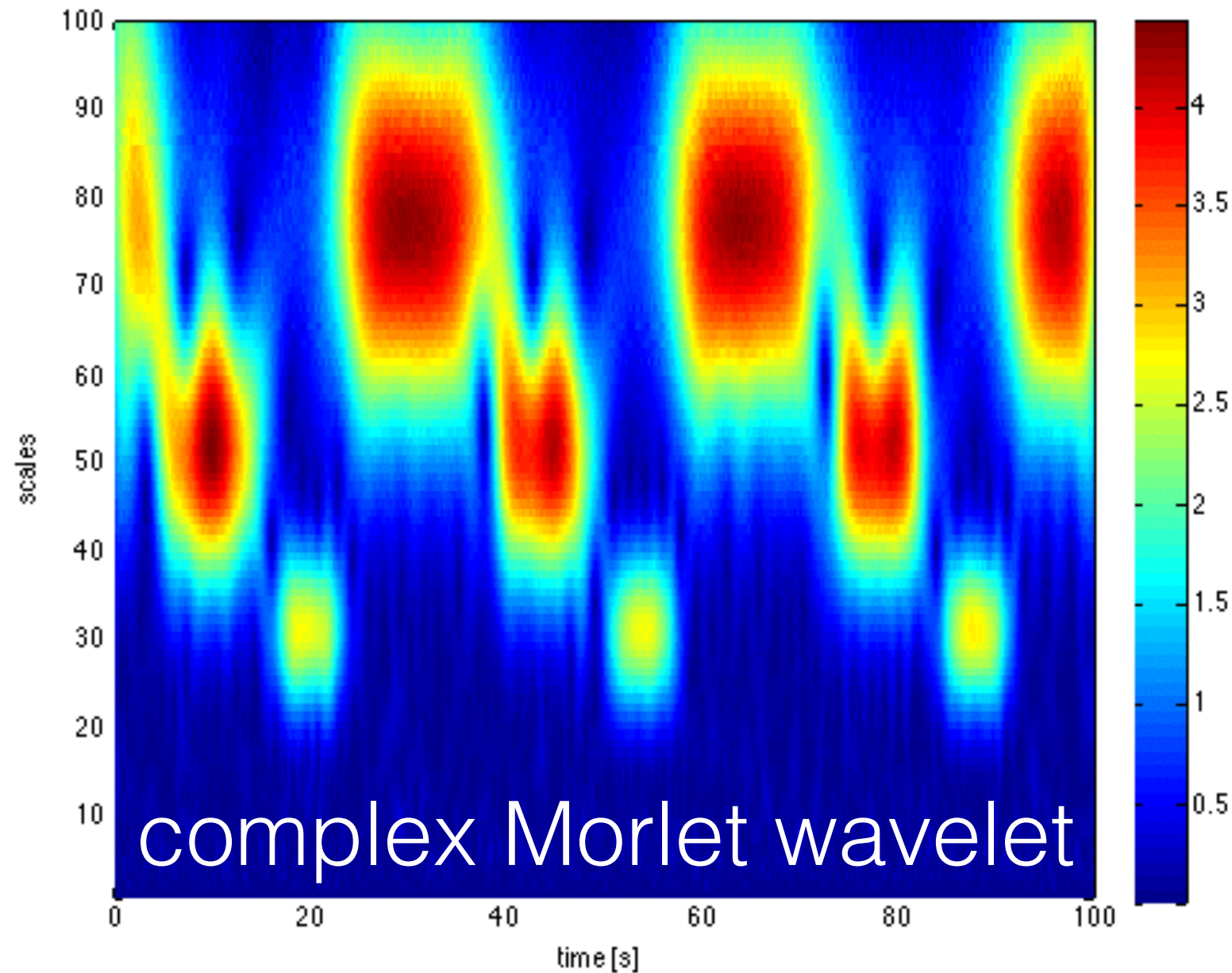


Absolute of Values of $C_{a,b}$ for $a = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ \dots$



Verbesserungen:

1. Unterstruktur



(TF_13.m)

bessere Wahl des
wavelets

