Spektralanalyse physiologischer Signale

Dr. rer. nat. Axel Hutt

Vorlesung 6

zum Übungsblatt

Aufgabe 2:

$$S_{\alpha\alpha}(\nu) = \sum_{j,k} \tilde{G}_{\alpha,j}(\nu)\tilde{G}^*_{\alpha,k}(\nu)\kappa^2_{jk}$$

$$E[I_2(t)I_2(t')] = \kappa^2\delta(t-t')$$

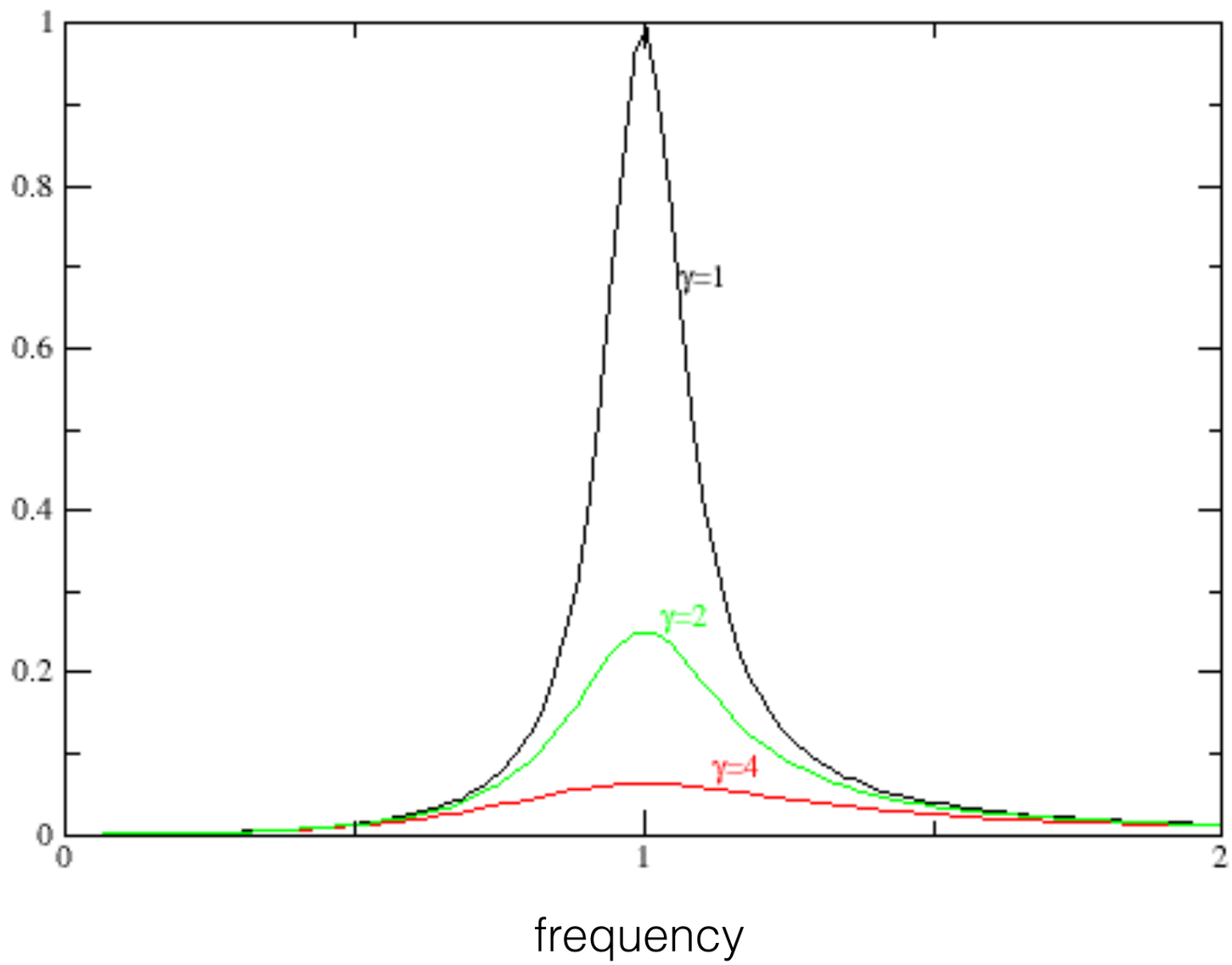
$$E[I_i(t)I_j(t')] = 0 \quad \text{sonst}$$

$$\rightarrow \kappa^2_{22} = \kappa^2 \ , \ \kappa^2_{22} = 0 \ \text{ sonst}$$

$$S_{22}(\nu) = |\tilde{G}_{22}(\nu)|^2\kappa^2$$

$$\tilde{G}_{22}(\nu) = \frac{i2\pi\nu}{i2\pi\nu(i2\pi\nu-\gamma)+\omega^2}$$

$$S_{22}(\nu) = \frac{\kappa^2 \nu^2}{4\pi^2\nu^4 + (\gamma^2 - 2\omega^2)\nu^2 + \omega^4/4\pi^2}$$



weiter mit Vorlesung 6

II.3. Berechnung von Spektren

a) Definitionen

b) Periodogram+ Bartlett-Welch Methode

c) multi-taper Methode

III. Zeit-Frequenz Analyse

Bartlett und Welch Methode :

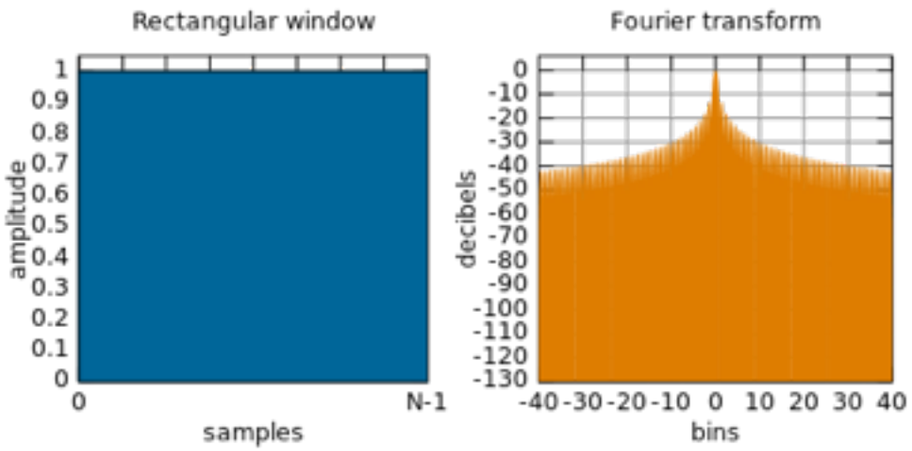
- Scharmittel über Realisierungen
- Annahme von ausreichend langen Zeitserien
- nicht anwendbar auf kurze Zeitserien

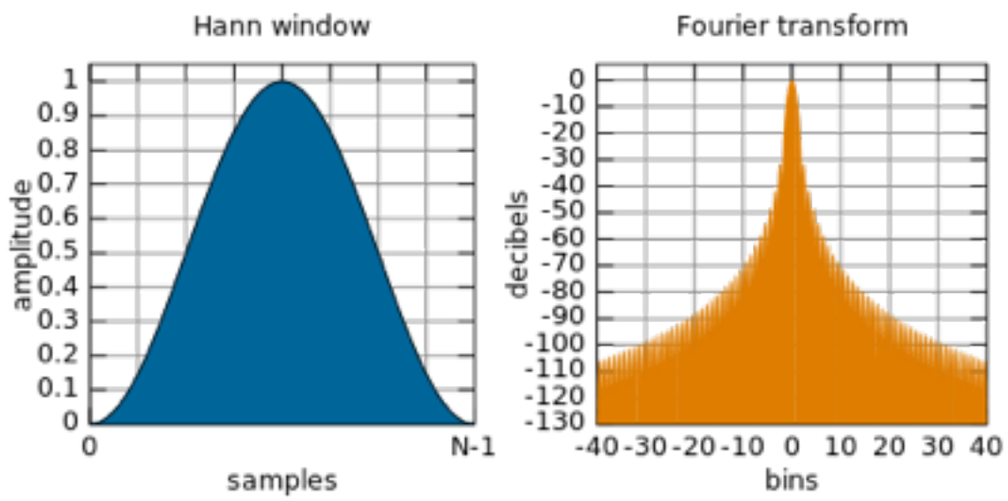
Multitaper

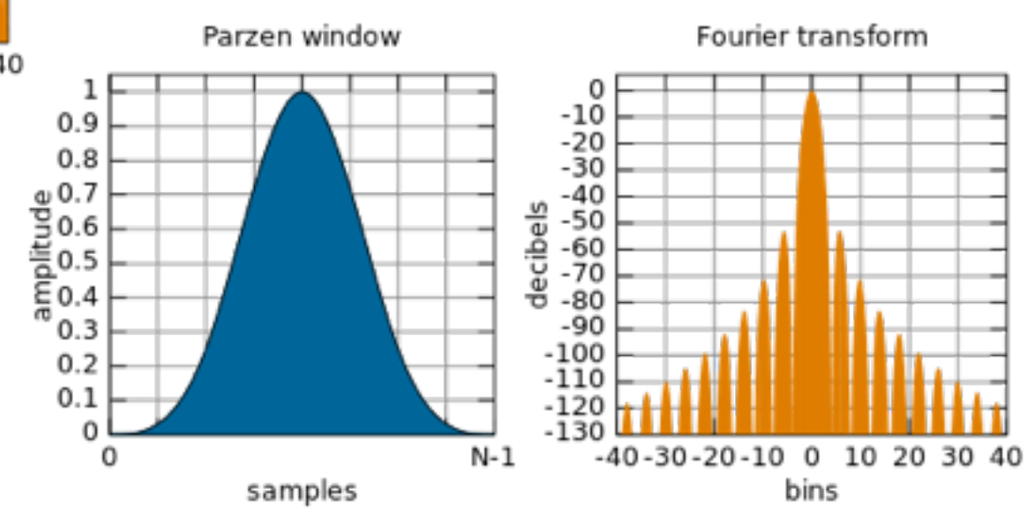
- Mittel über dieselbe Zeitserie
- Mittel über orthogonale Fensterfunktionen, sog. *data tapers*

Frage: welche Fensterfunktionen sind optimal ?

Erinnerung: verschiedene Fensterfunktionen



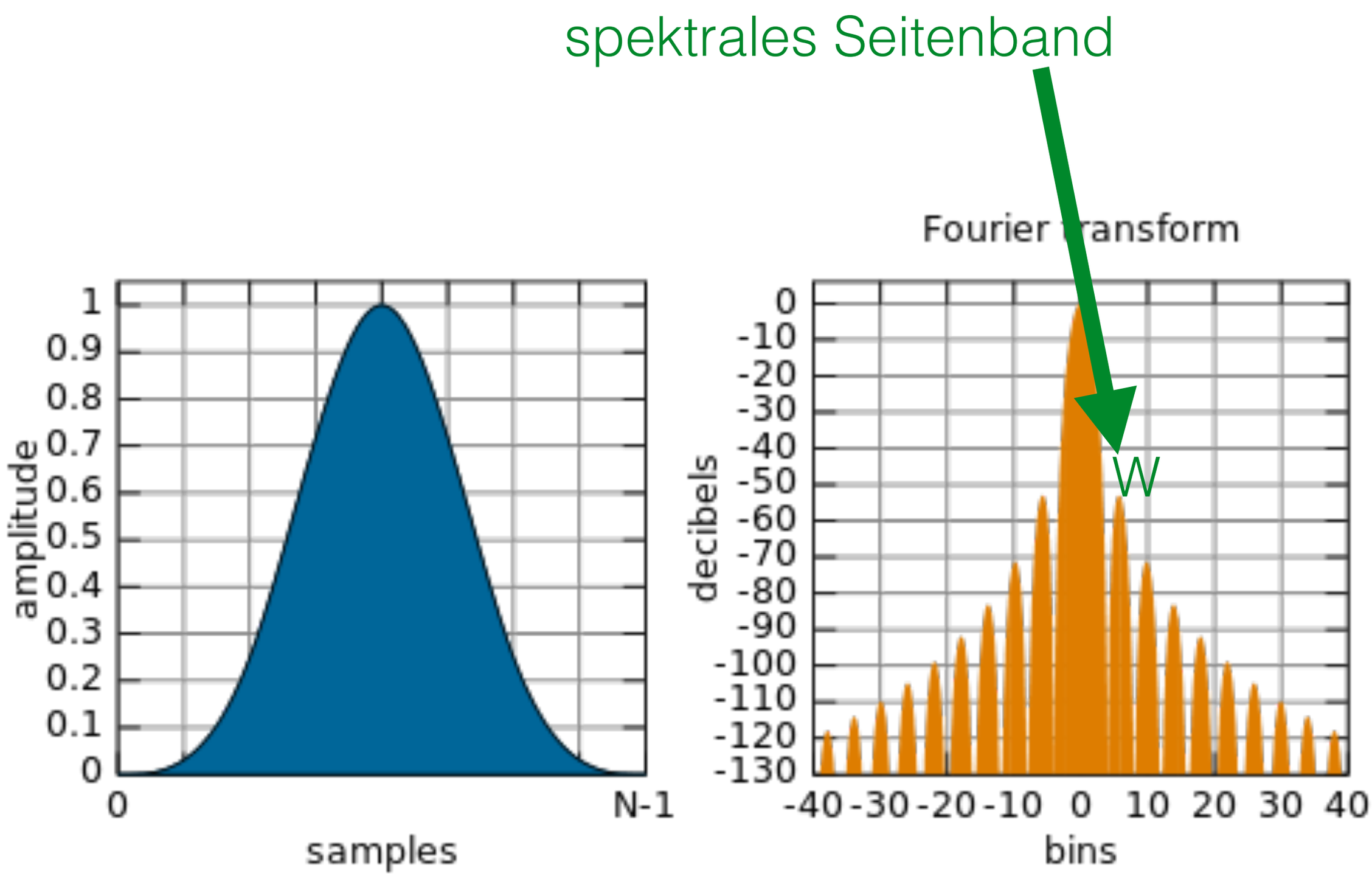




Optimierung der Fensterfunktionen

= Minimierung der spektralen Seitenbänder

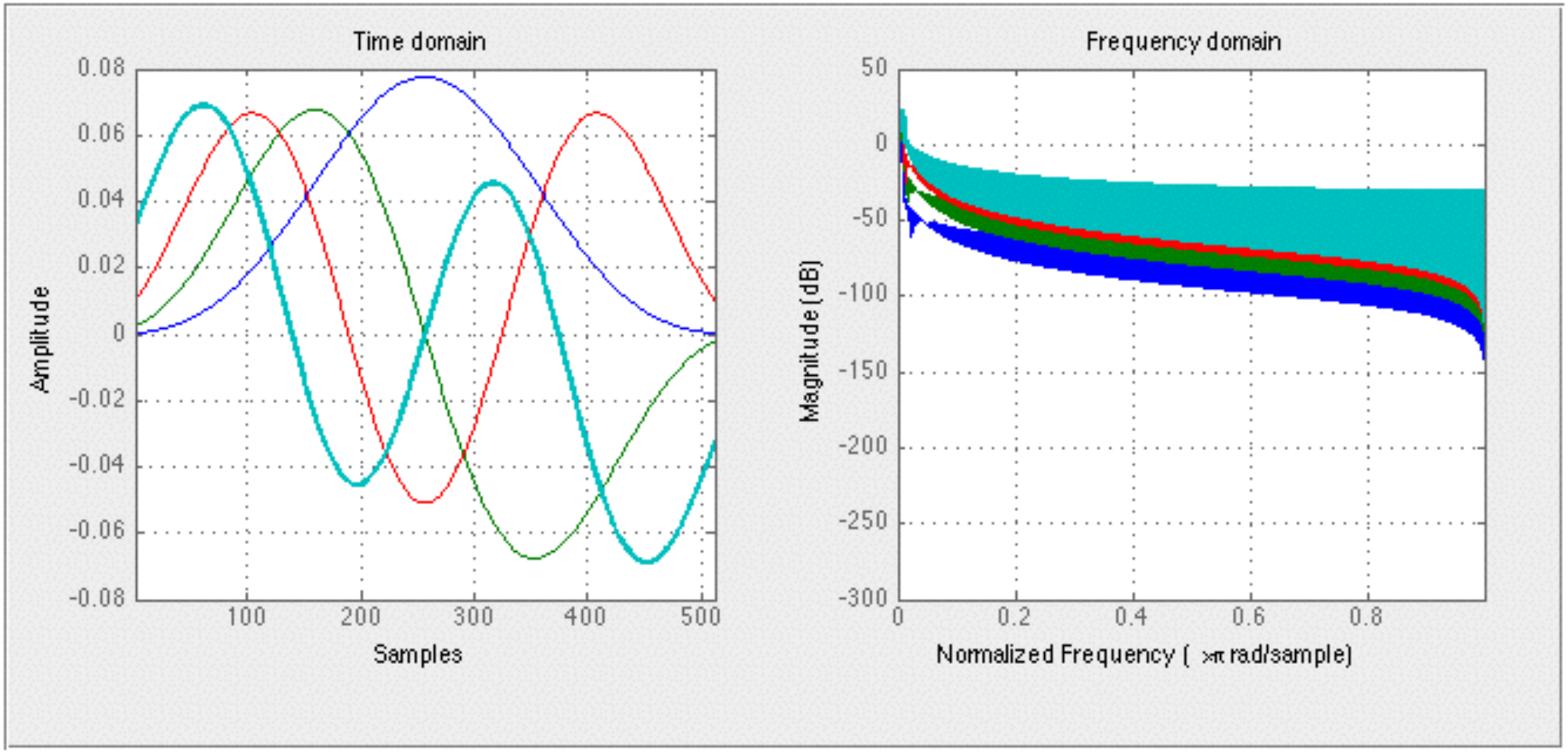
Spektrale Konzentration - Problem



<u>Lösung:</u>

- gegeben: Grenzfrequenz W and T Datenpunkte
- es gibt *n=2WT* orthogonale optimale Fensterfunktionen
- diese *data tapers* sind *n Slepian sequences*
- Mittel von *data taper*-gewichteten Periodogramen über n *data taper*

zur Illustration: 4 Slepian sequences



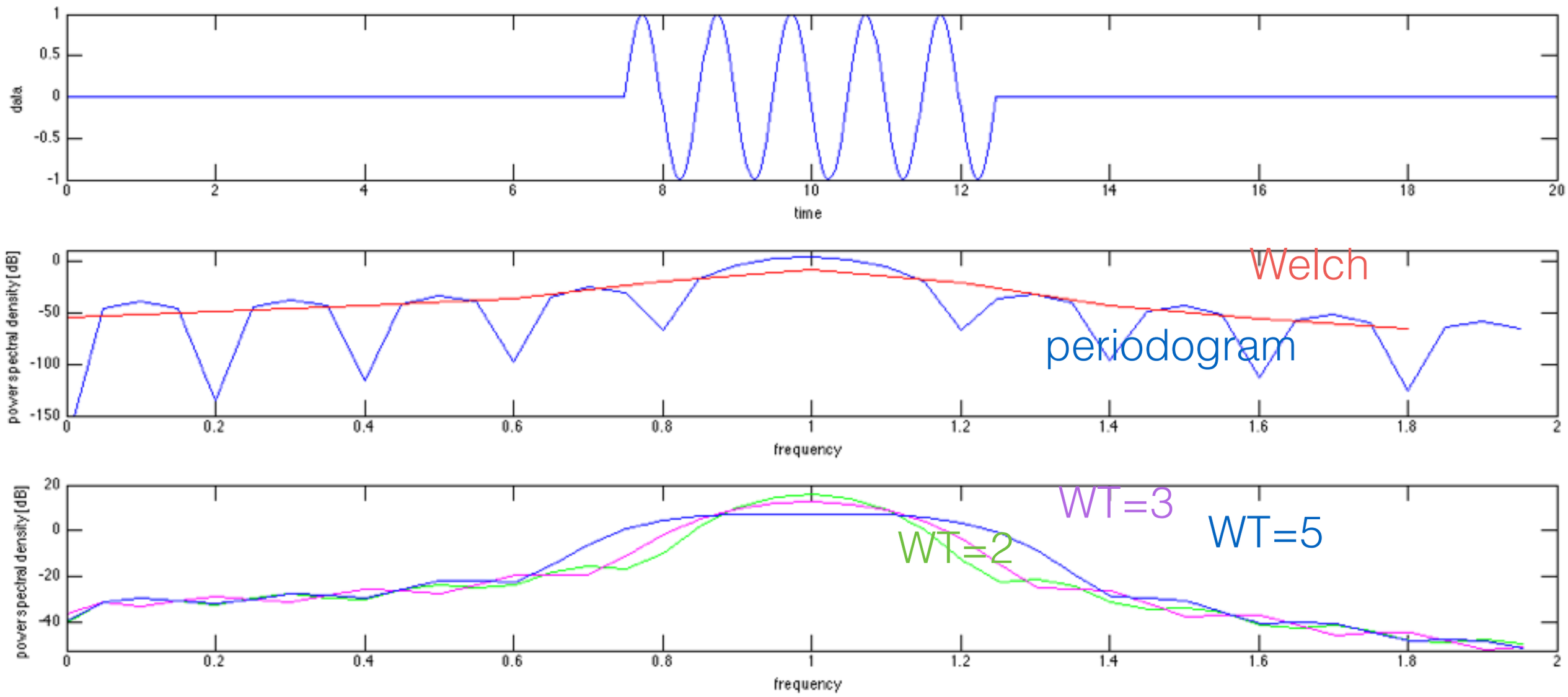
$$W = w\Delta f = \frac{w}{T}$$

w: Vielfaches der unteren Grenzfrequenz

$$n = 2\frac{w}{T}T = 2w$$

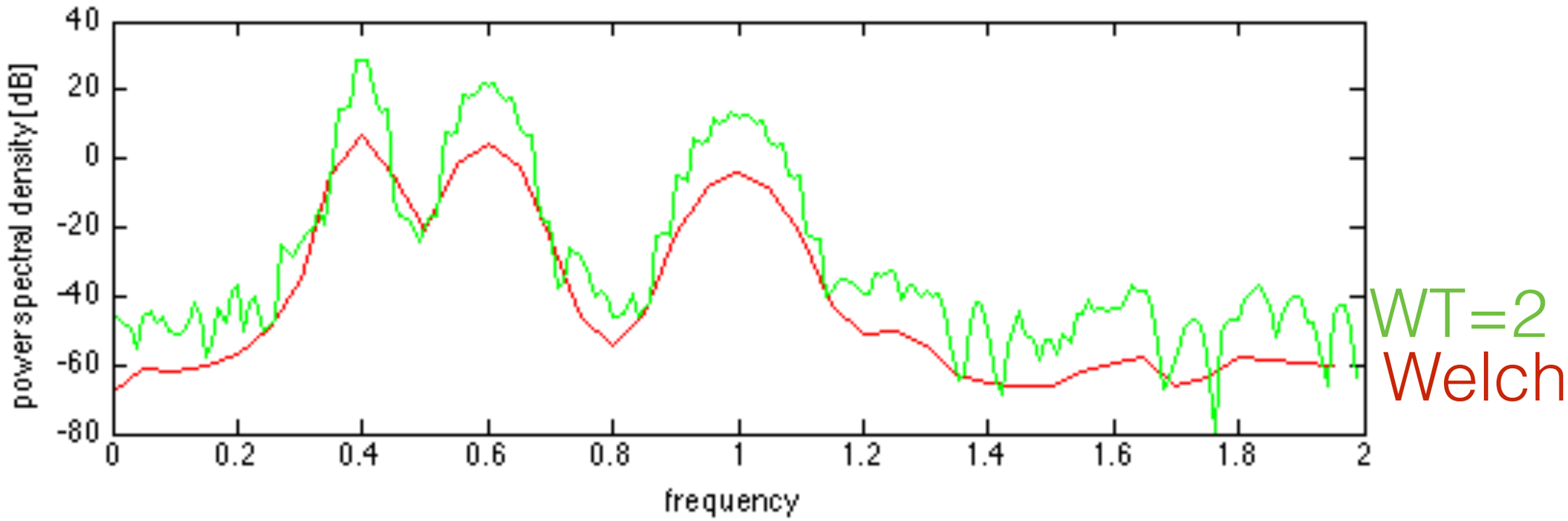
optimale Anzahl von *data taper*

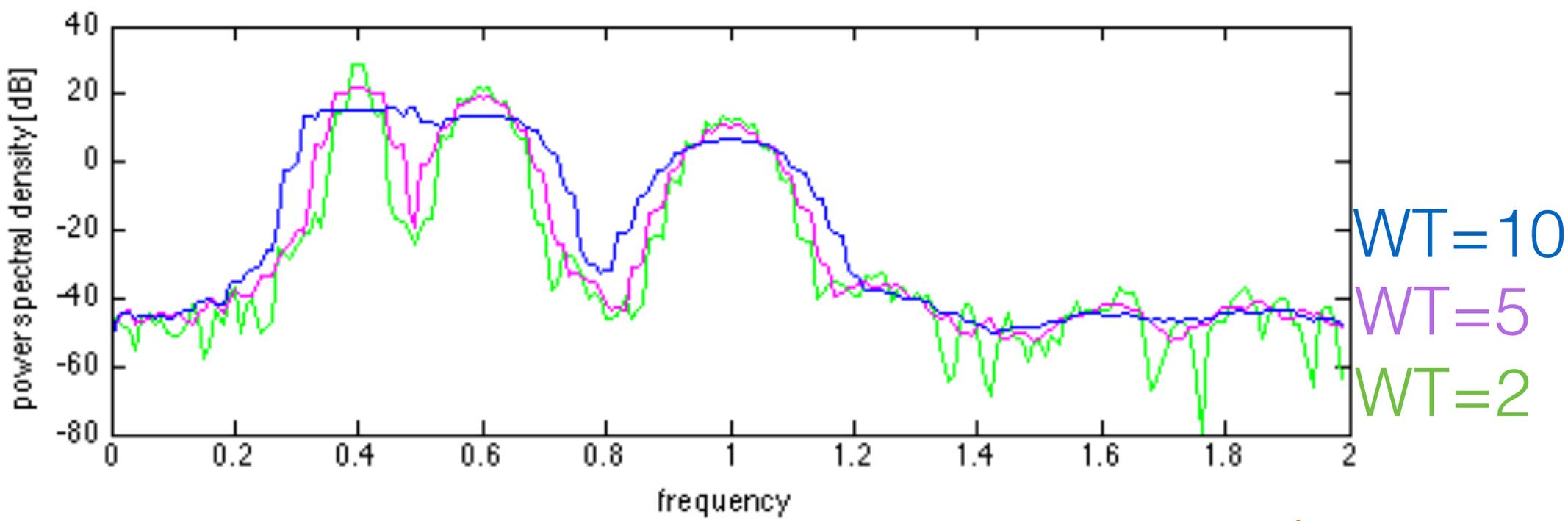
Reduzierung von *spectral leakage*



(Fourier_13.m)

Beispieldaten: transiente Oszillationen





(Fourier_12.m)

aus Praxis: optimale Anzahl von *taper* ?

wähle spektrale Grenzfrequenz W

dann ist die optimale Anzahl

$$n = 2\,W\,T.$$

effiziente Berechnung der DFT:

Fast Fourier Transform (FFT)

effiziente Berechnung der DFT:

Fast Fourier Transform (FFT)

- effiziente Implementierung der DFT

- Radix-2 Algorithmus (Cooley und Tukey,1965) für

?

- Radix-4 Algorithmus (schneller als Radix-2) für

?

- Methoden sind anwendbar auf
- Bedingungen an Analyse mittels Fourierreihe
- Sampling und endliche Zeitfenster führen zu Fehlern in Fourieranalyse
- Lineare Antwort-Theorie
- konkrete Methoden zur Berechnung des PSD
- **lineare Filter**

Lineare Filter

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} H(t-\tau) I(\tau) d\tau$$

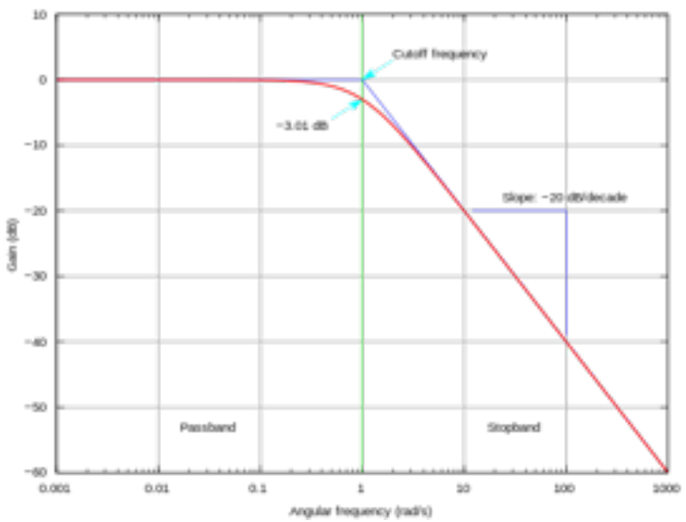
H: Filterfunktion

$$\tilde{s}(f) = \tilde{H}(f)\tilde{I}(f)$$ spektraler Filter

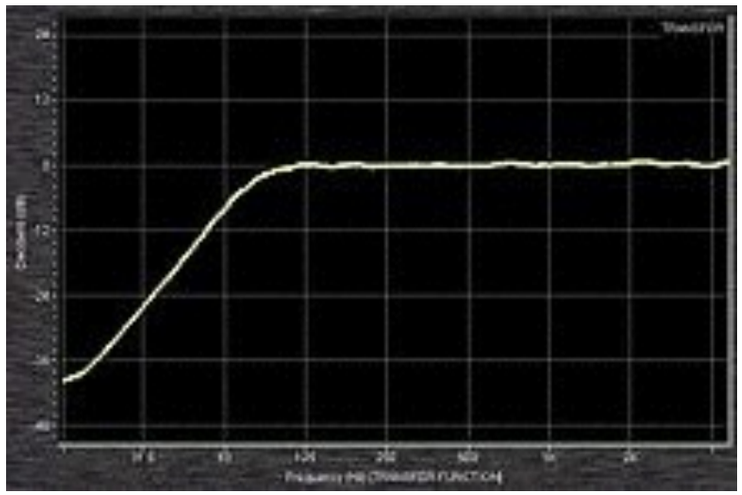
PSD $\sim |\tilde{H}(f)|^2 |\tilde{I}(f)|^2$

Die Impulsantwort-Funktion H(t) definiert den Filtertyp, e.g.

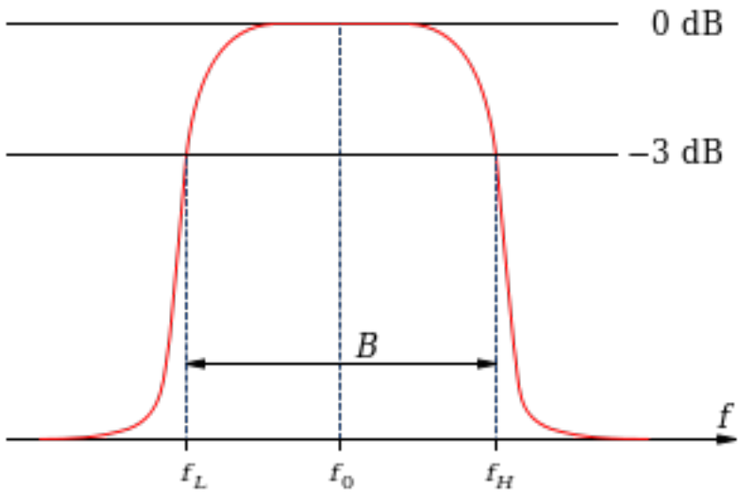
Tiefpassfilter



Hochpassfilter



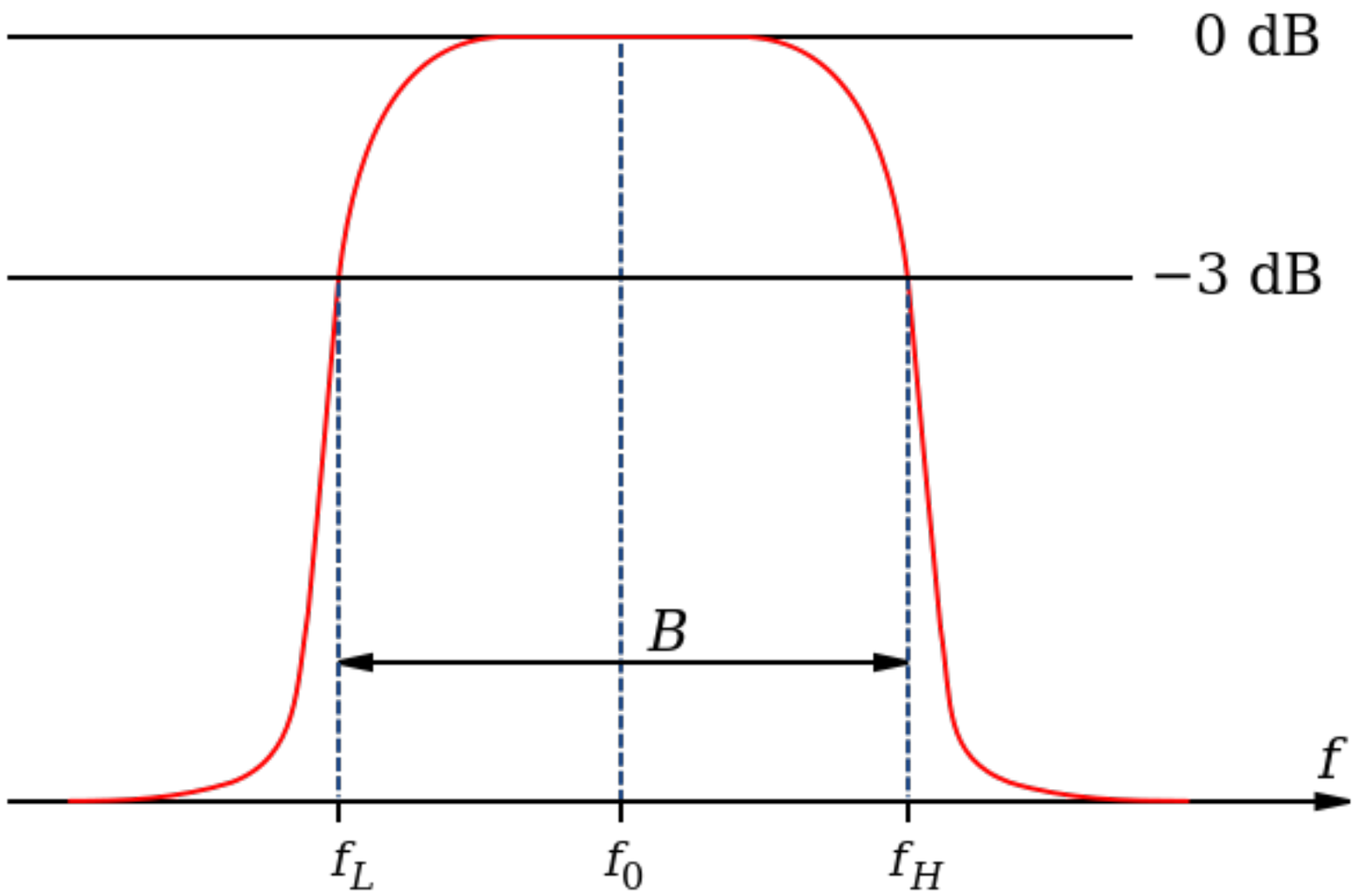
Bandpassfilter



- falls die Impulsantwort-Funktion hat *unendliche* Dauer: Filter heißt **Infinite Impulse Response (IIR)** - Filter

$$s(t) = \int_0^\infty H(\tau) I(t-\tau) d\tau$$

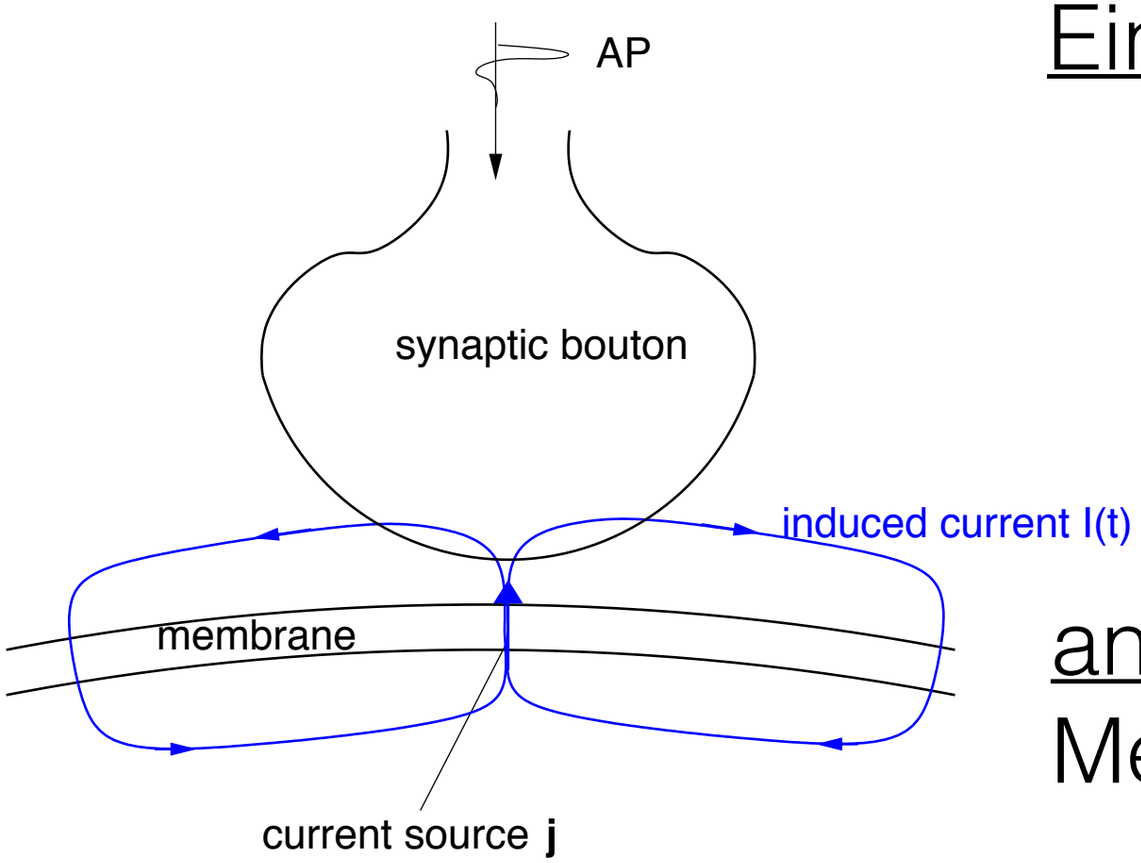
weitere Begriffe



Stopband Passband Stopband

1. Beispiel: Tiefpass-Filter

einzelne Synapse



induzierter Strom

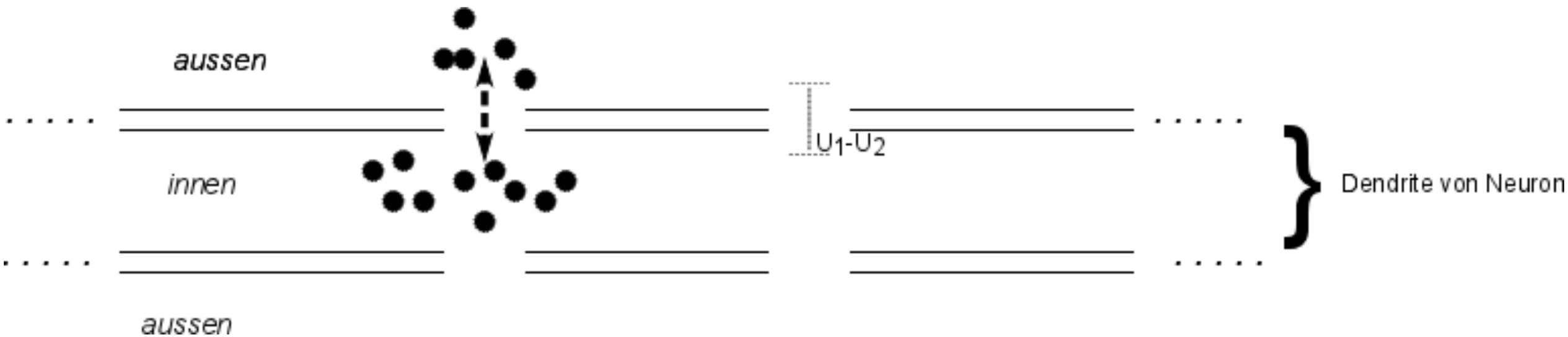
Eingang: Folge von spikes

$$I(t) = \sum_i I_0 \delta(t - t_i) \ , \ t_{i+1} > t_i$$

antwortendes System:
Membran mit Ionenkanal

Ausgang: Membranspannung

$$V = V(t) \ ?$$



Membran als Kondensator:

$$CV(t) = Q(t) \;\rightarrow\; C\frac{dV}{dt} = I_C(t)$$

Strom durch Membran

Kirchhoff-Gesetz:

$$C\frac{dV}{dt} + g(t)(V - E_s) + g_L(V - E_L) = 0$$

Strom durch Synapse

Leckstrom durch andere Ionenkanäle

Leitfähigkeit $\frac{dg(t)}{dt} = -\alpha g(t) + \alpha I(t)$

$$C\frac{dV}{dt} = -g_L(V - E_L) - g(t)(V - E_s)$$

ohne Eingangssignal:

$$C\frac{dV}{dt} = -g_L(V - E_L)$$

Ruhezustand:

$$\frac{dV}{dt} = 0 \;\; : \quad V_r = E_L$$

Näherung:

$$g(t)(V - E_s) \approx g(t)(V_r - E_s)$$

$$C\frac{dV}{dt} = -g_L(V - E_L) - Kg(t)$$

$$K = V_r - E_s$$

$$u(t) = V(t) - V_r$$

$$\left(\frac{C}{g_L}\right)\frac{du}{dt} = -u(t) - \frac{K}{g_L}g(t)$$

$$\frac{dg(t)}{dt} = -\alpha g(t) + \alpha I(t)$$

$$t \to \infty : u(t) = \frac{K}{g_l}\int_{-\infty}^{t} H(T - \tau)g(\tau)d\tau$$

$$g(t) = \alpha \int_{-\infty}^{t} e^{-\alpha(t-\tau)} \sum_i \delta(\tau - t_i) d\tau$$

$$= \alpha \sum_i e^{-\alpha(t-t_i)}$$

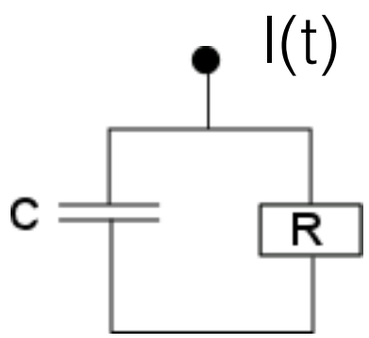
Annahme: spikes treten regelmäßig auf mit Rate F, $\alpha \to \infty$

$$E\left[\sum_{i,j} \delta(t-t_i)\delta(t'-t_j)\right] = F\delta(t-t')$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{S_u(f) = \frac{I_0 \gamma^2 F}{1 + 4\pi^2 \beta^2 f^2}} \quad \text{(Übungen)}$$

Synapse ist Tiefpassfilter

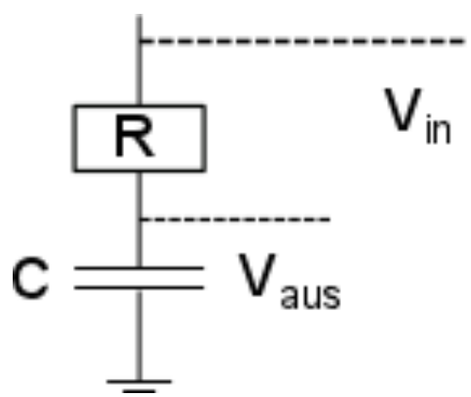
Ersatzschaltkreis:



$$C\frac{dV}{dt} + \frac{V(t)}{R} = I$$

Tiefpass $C\frac{dV}{dt} = -gV(t) + I$

oder:



$$I_R = \frac{V_R}{R}\ , I_C = C\frac{dV_{aus}}{dt}$$

$$I_R = I_C\ ,\ V_{in} = V_R + V_{aus}$$

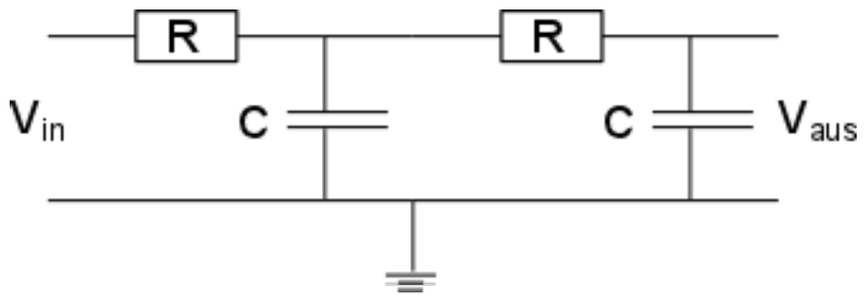
Tiefpass 1. Ordnung $\frac{dV_{aus}}{dt} = -\frac{1}{RC}V_{aus}(t) + \frac{V_i(t)}{RC}$

im Fourierraum:

$$\frac{\tilde{V}_{aus}(f)}{\tilde{V}_{in}(f)} = \frac{1}{i2\pi RCf + 1}$$

$$\boxed{\left|\frac{\tilde{V}_{aus}(f)}{\tilde{V}_{in}(f)}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}}}$$

Tiefpass 2. Ordnung



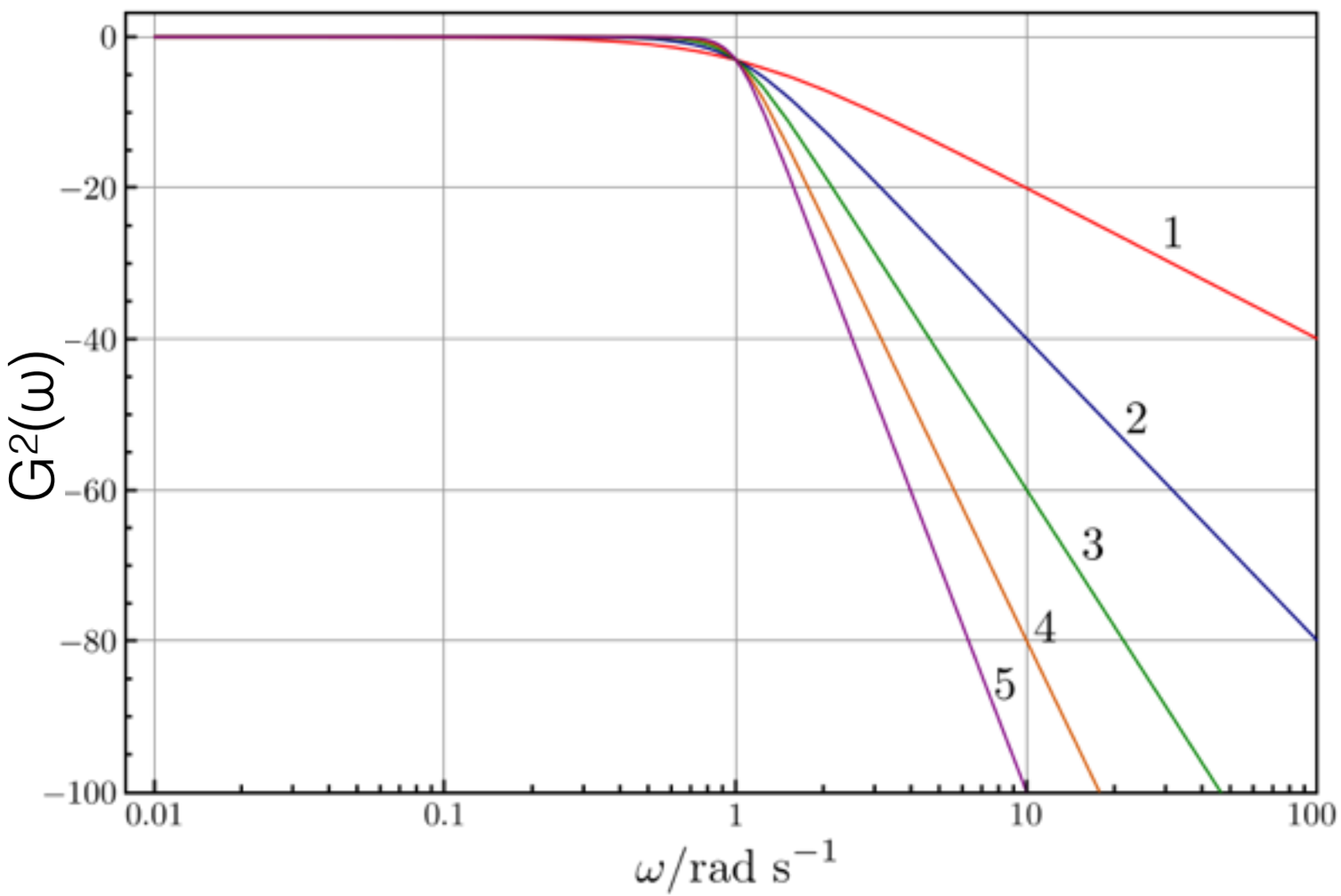
$$\left| \frac{\tilde{V}_{aus}(f)}{\tilde{V}_{in}(f)} \right| = \frac{1}{1 + 4\pi^2 R^2 C^2 f^2}$$

weiteres Beispiel für Tiefpassfilter

Butterworth-Filter

Ein B.-Filter ist maximal glatt im Passband und nähert sich 0 im Stopband

$$G^2(\omega) = |H(i\omega)|^2 = \frac{G_0^2}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2n}}$$



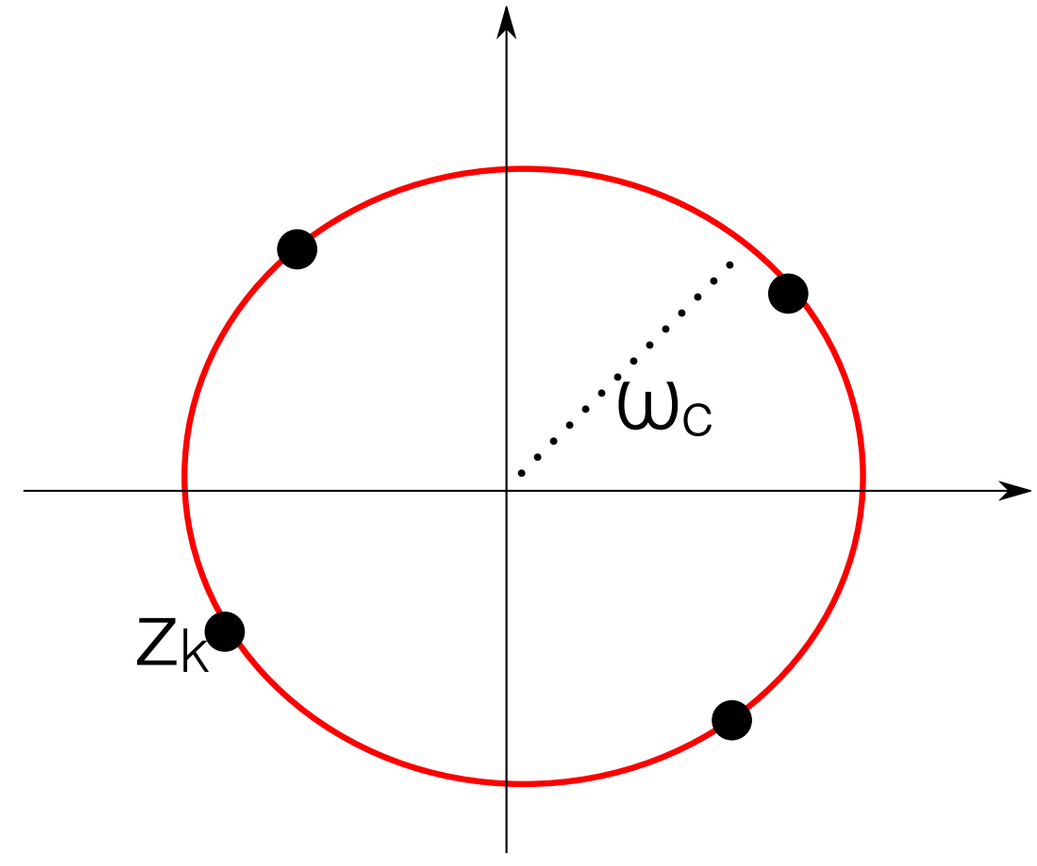
ω_c: cut-off Frequenz

ω: Winkelfrequenz

n: Ordnung des Filters

H: Fouriertransformierte Impulsantwort-Funktion

$$|H(z)|^2 = \frac{G_0^2}{1 + \left(\frac{-z^2}{\omega_c^2}\right)^n}$$



betrachte:

$$1 + \left(\frac{-z^2}{\omega_c^2}\right)^n = 0$$

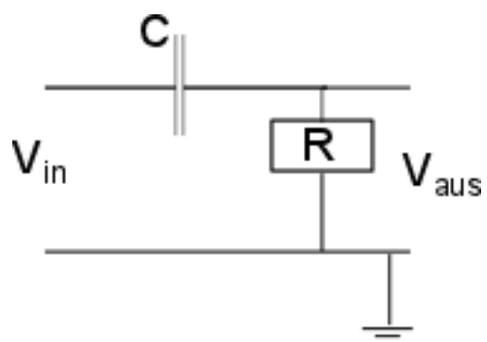
$$(-1)^{\frac{1}{n}} = \frac{-z^2}{\omega_c^2}$$

$$(-1)^{\frac{1}{n}} = e^{i\pi\frac{(2k-1)}{n}} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

$$\longrightarrow \quad z_k = \omega_c e^{i\pi\frac{2k-n-1}{2n}}$$

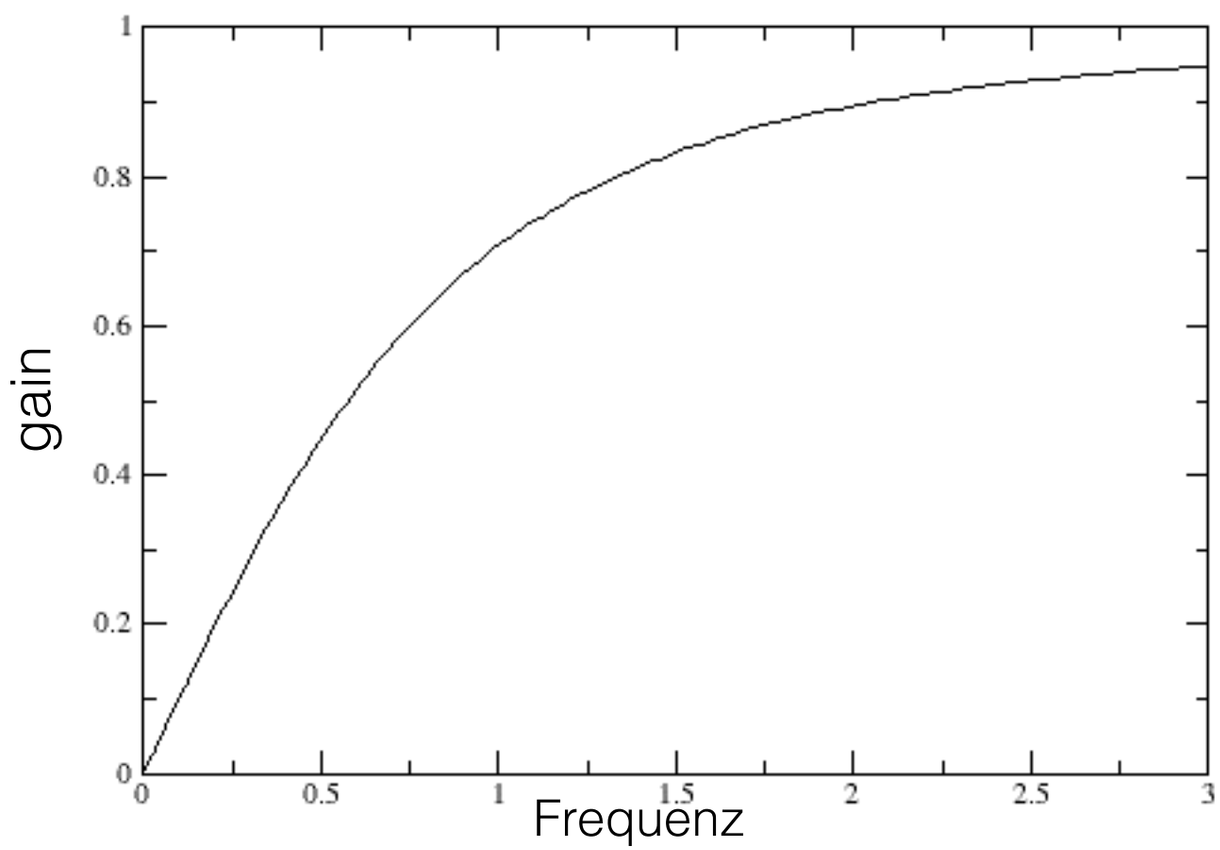
$$\boxed{H(z) = \frac{G_0}{\Pi_{k=1}^{n}(z - z_k)/\omega_c}}$$

Hochpass Filter:

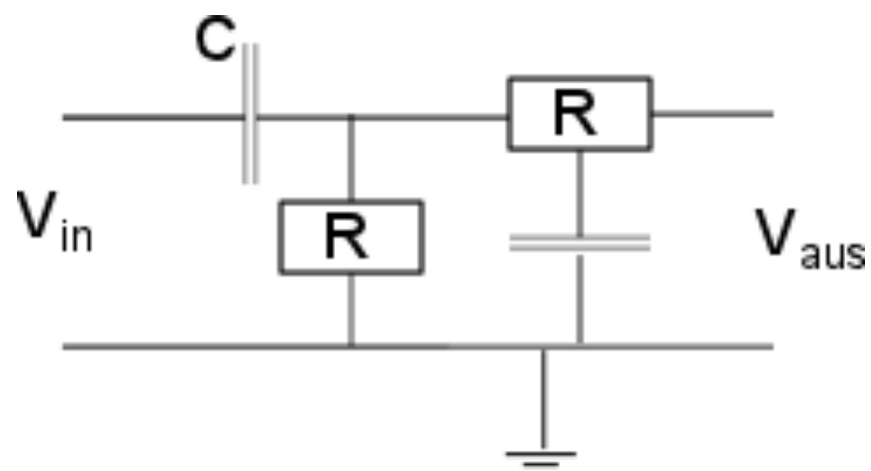


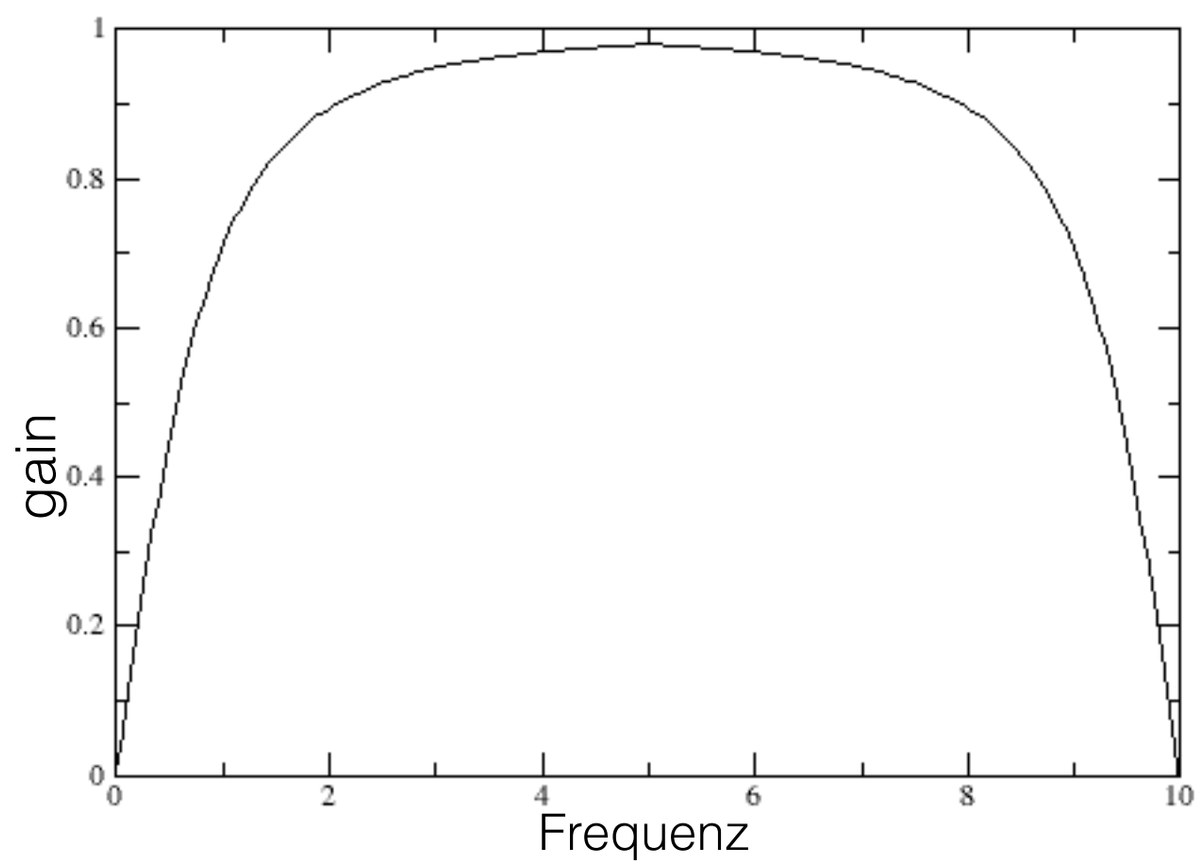
$$\frac{dV_{aus}}{dt} = -\frac{V_{aus}}{RC} + \frac{dV_{ein}}{dt}$$

$$\left|\frac{\tilde{V}_{aus}(f)}{\tilde{V}_{ein}(f)}\right| = \frac{2\pi RCf}{\sqrt{1+4\pi^2R^2C^2f^2}}$$



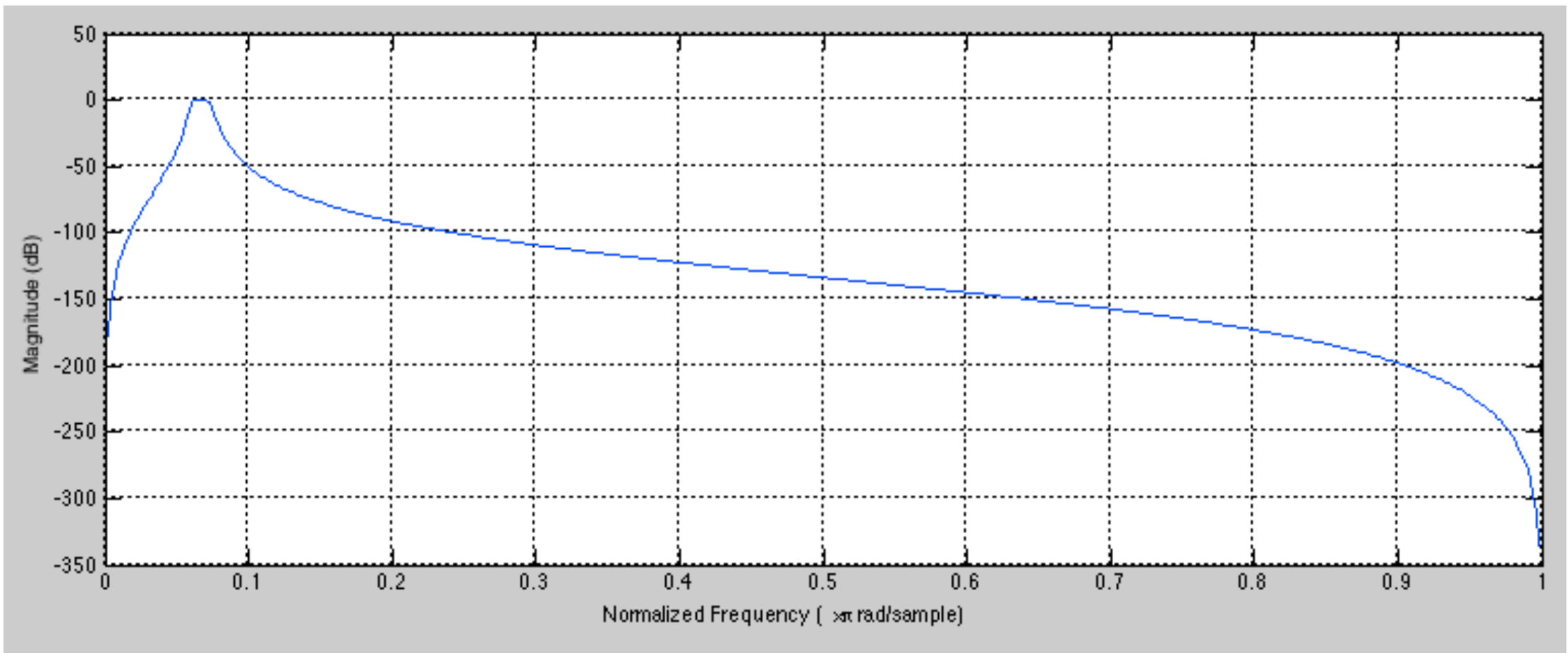
Bandpass Filter:



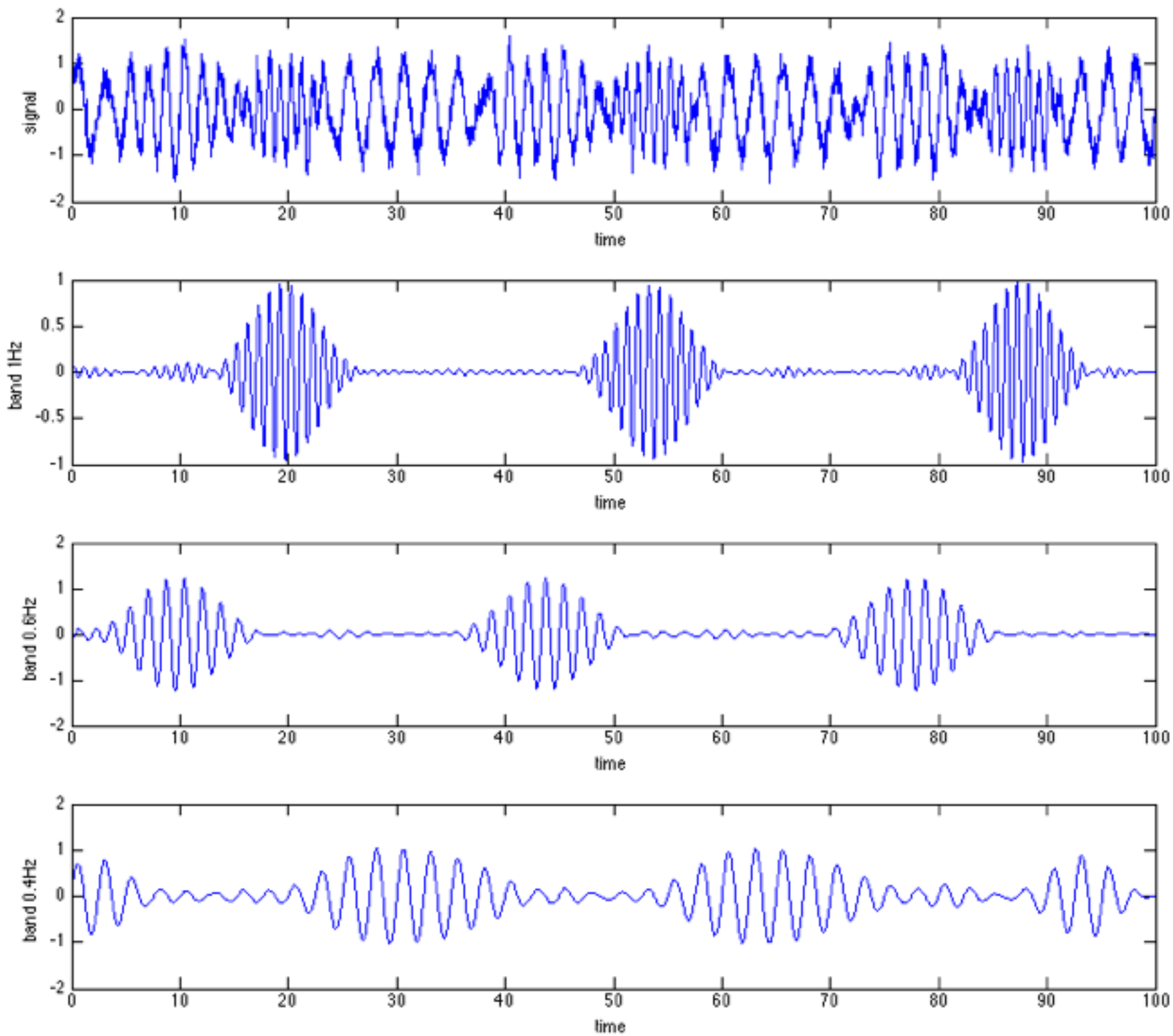


Beispiel: Bandpassfilter

Typ: Butterworth, 4. Ordnung



Anwendung von Bandpassfilter auf künstliches Signal



cut-off bei
0.9Hz und 1.1Hz

cut-off bei
0.5Hz und 0.7Hz

cut-off bei
0.3Hz und 0.5Hz

(TF_10.m)

- Frequenzbandbreite definiert zeitliche Korrelationen

- Frequenzbandbreite / zeitliche Korrelationslänge identisch in allen Frequenzen

- falls die Impulsantwort-Funktion hat
  Filter heißt

$$s(t) = \int_0^\infty H(\tau) I(t-\tau) d\tau$$

- falls die Impulsantwort-Funktion *finite* Dauer hat:
  Filter heißt **Finite Impulse Response (FIR)** - Filter

$$s(t) = \int_0^T H(\tau) I(t-\tau) d\tau$$

Beispiel: Tiefpassfilter

Savitzky-Golay Filter (FIR)

<u>Ziel:</u>
ein Signal soll **entrauscht** werden durch
optimale Anpassung einer deterministischen Funktion

Wenn Signal *x(t)* die Dauer *T* hat, dann ist das gefilterte Signal *y(t)*

$$y(t) = \int_{-\tau_m/2}^{\tau_m/2} H(\tau) x(t-\tau) d\tau \quad , \quad \tau_m \leq t \leq T - \tau_m$$

oder

$$y_n = \sum_{k=-(m-1)/2}^{(m-1)/2} H_k x_{n+k}$$

- man transformiert das Signal in einem Fenster
  um den Zeitpunkt t (bzw. n) mit Fensterbreite τ_m (bzw. m-1)

- man kann ein Modell des Signals s in diesem Fenster ableiten

<u>Idee:</u>

Signal $s(t_n)=s_n$

$$s_n = \sum_{k=1}^{m} a_k n^k + e_n$$

$$\rightarrow s_n - \sum_{k=1}^{m} a_k n^k = e_n \qquad \sum_{n=1}^{N} e_n^2 = min$$

$$V = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{m} \left(a_k n^k - s_n\right)^2 = min$$

$$\frac{\partial V}{\partial a_l} = 0 : \qquad \frac{\partial V}{\partial a_l} = \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{m} 2\left(a_k n^k - s_n\right) \frac{\partial (a_k n^k)}{\partial a_l}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} \sum_{k=0}^{m} 2\left(a_k n^k - s_n\right) n^k \delta_{kl}$$

$$\longrightarrow \qquad \sum_{k=0}^{m} \sum_{n=0}^{N} n^{l+k} a_k = \sum_{n=0}^{N} n^l s_n$$

man definiert nun $\qquad n^l = A_{ln} \qquad \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times N}$

$$\sum_{n=0}^{N} A_{ln} A_{kn} = \sum_{n=0}^{N} n^{l+k} \quad = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right)_{jk}$$

$$\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times N}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right)_{lk} a_k = \sum_{n=0}^{N} A_{ln} s_n$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^t \mathbf{a} = \mathbf{A}\mathbf{s} \qquad \mathbf{a} \in \mathcal{R}^m \qquad \mathbf{s} \in \mathcal{R}^N$$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right)^{-1} \mathbf{A}\mathbf{s} \\ &= \mathbf{H}\mathbf{s} \end{aligned}}$$

$$\mathbf{H} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^t\right)^{-1} \mathbf{A} \in \mathcal{R}^{m \times N}$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{m} a_k n^k + e_n$$

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{a}^t \mathbf{A} \approx \mathbf{s}$$

mean least-square - Schätzung des Modells

$$\boxed{\tilde{\mathbf{s}}^t = \left(\mathbf{A}^t \mathbf{H}\right) \mathbf{s}}$$

Impulsantwort-Matrix $A^t H$

Beispiel: Glättungsfilter vom Typ *moving average*

$$\tilde{s}_n = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^{M} s_{n-j}$$

$$= \frac{1}{2M+1} \sum_{k=n-M}^{n+M} s_k$$

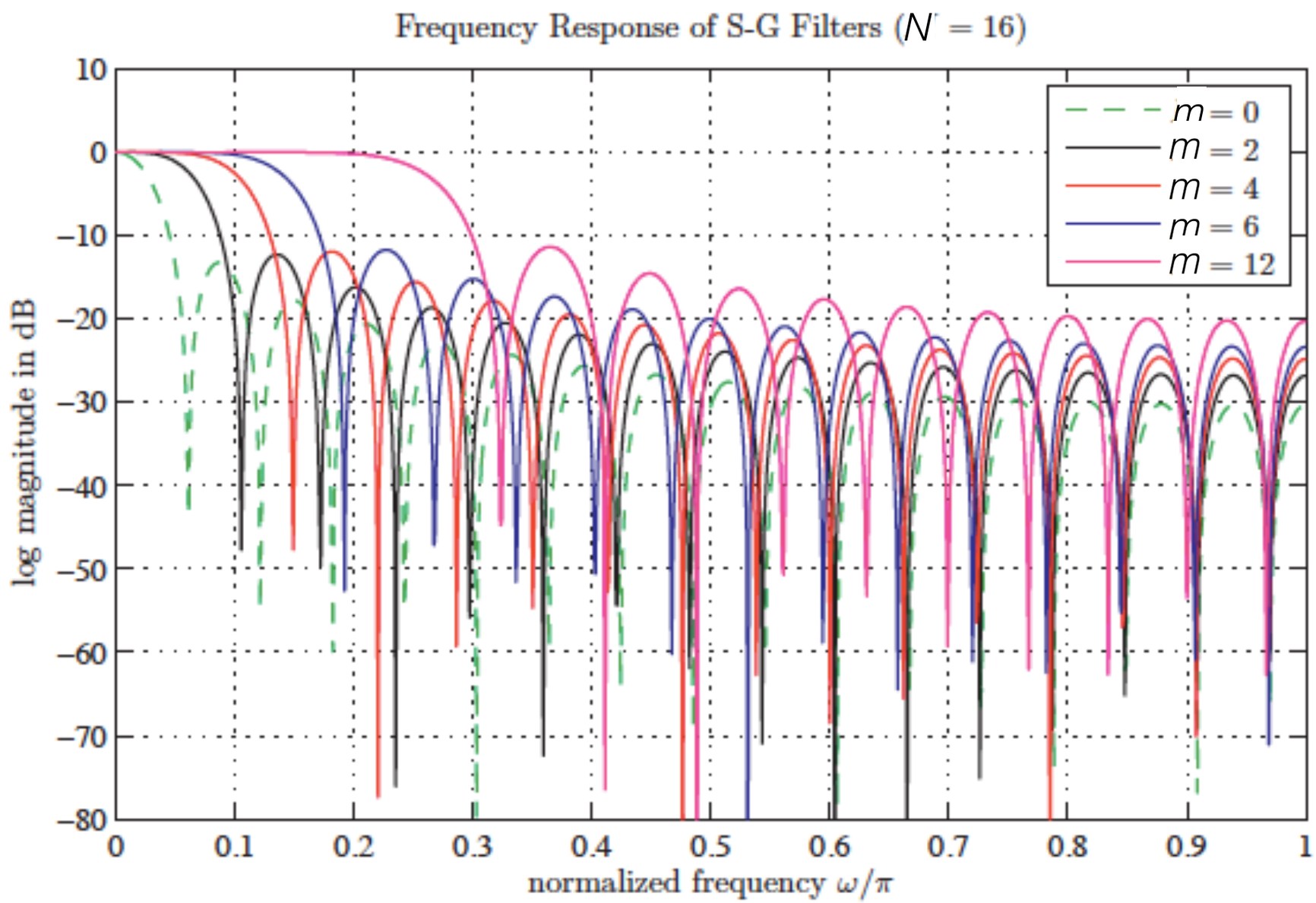
$$= \sum_{k=-N/2}^{N/2} P_{nk} s_k \qquad \mathbf{P} = \mathbf{A}^t \mathbf{H}$$

$$P_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{2M+1} & , \quad n-M \leq k \leq n+M \\ 0 & , \quad sonst \end{cases}$$

Zeitfenster: N=2M Polynomialgrad: m=0

im Allgemeinen:
Parameter sind *Länge des Zeitfensters (N)* und *Polynomialgrad (m)*

$|\mathcal{F}[\mathbf{A}^t\mathbf{I}$

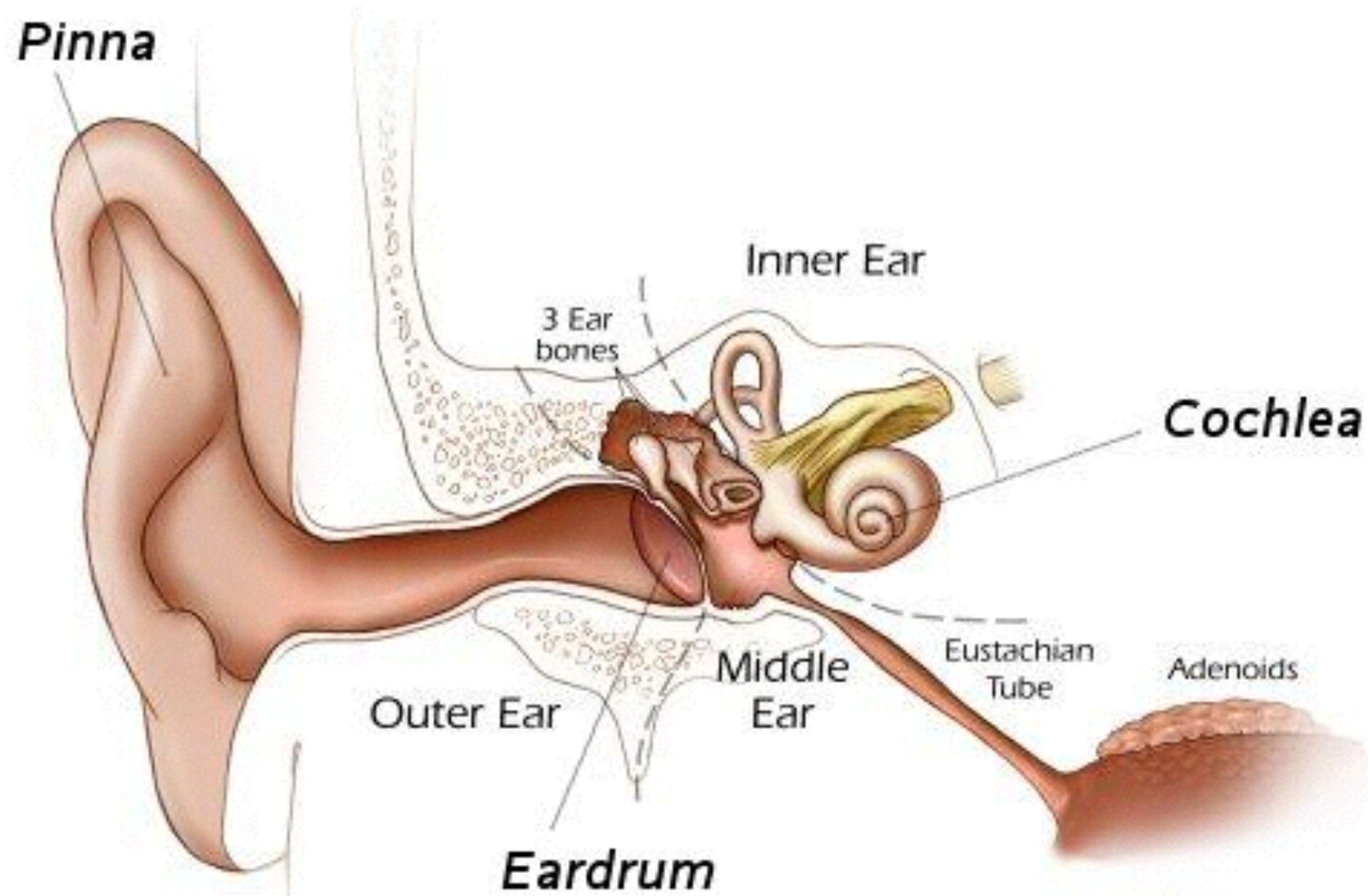


=m

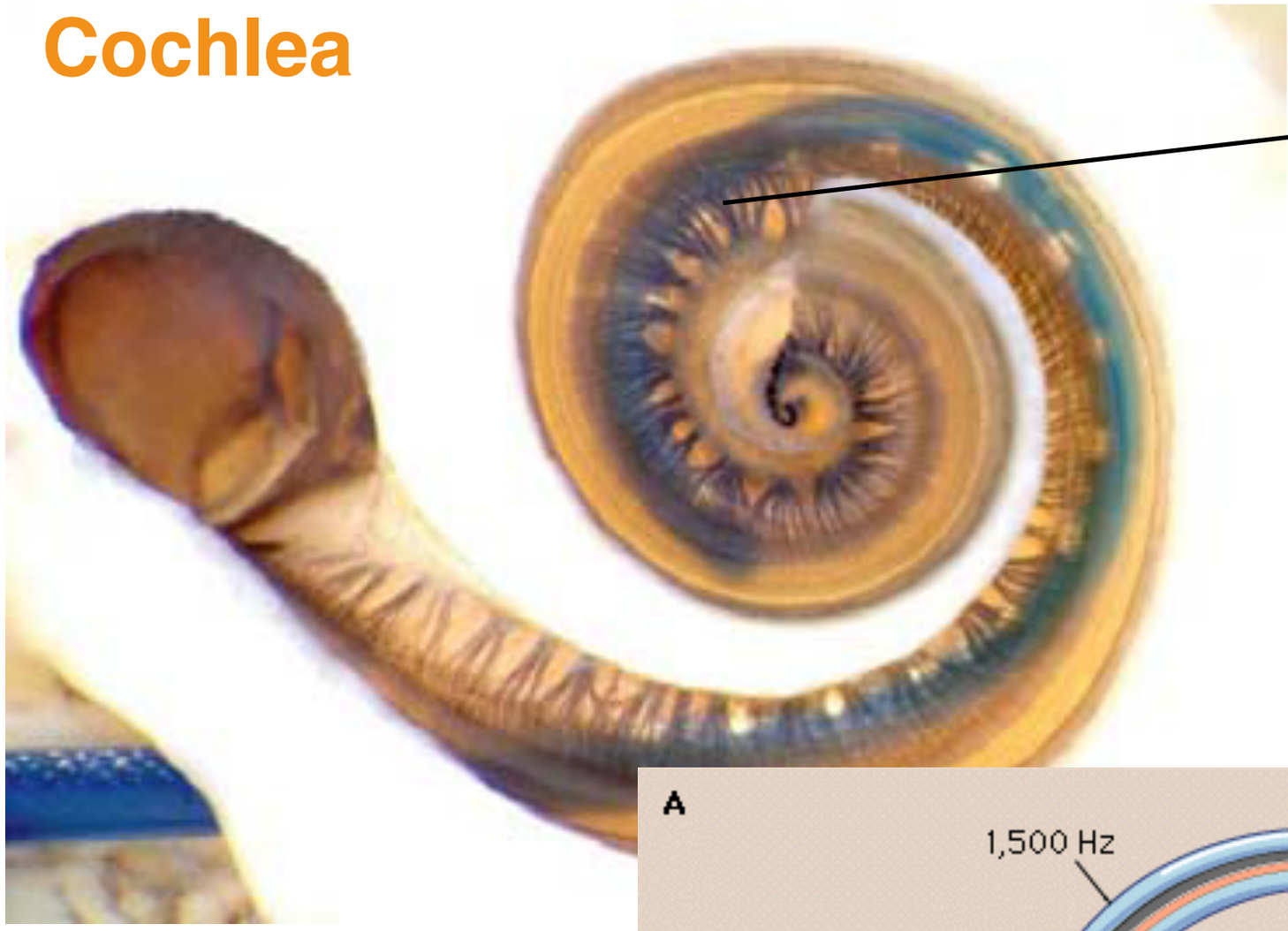
Tiefpassfilter

(aus R. Schafer, *On the Frequency-Domain Properties of Savitzky-Golay Filters*, HP-Bericht)

In Biologie: **Frequenzfilter im Innenohr**

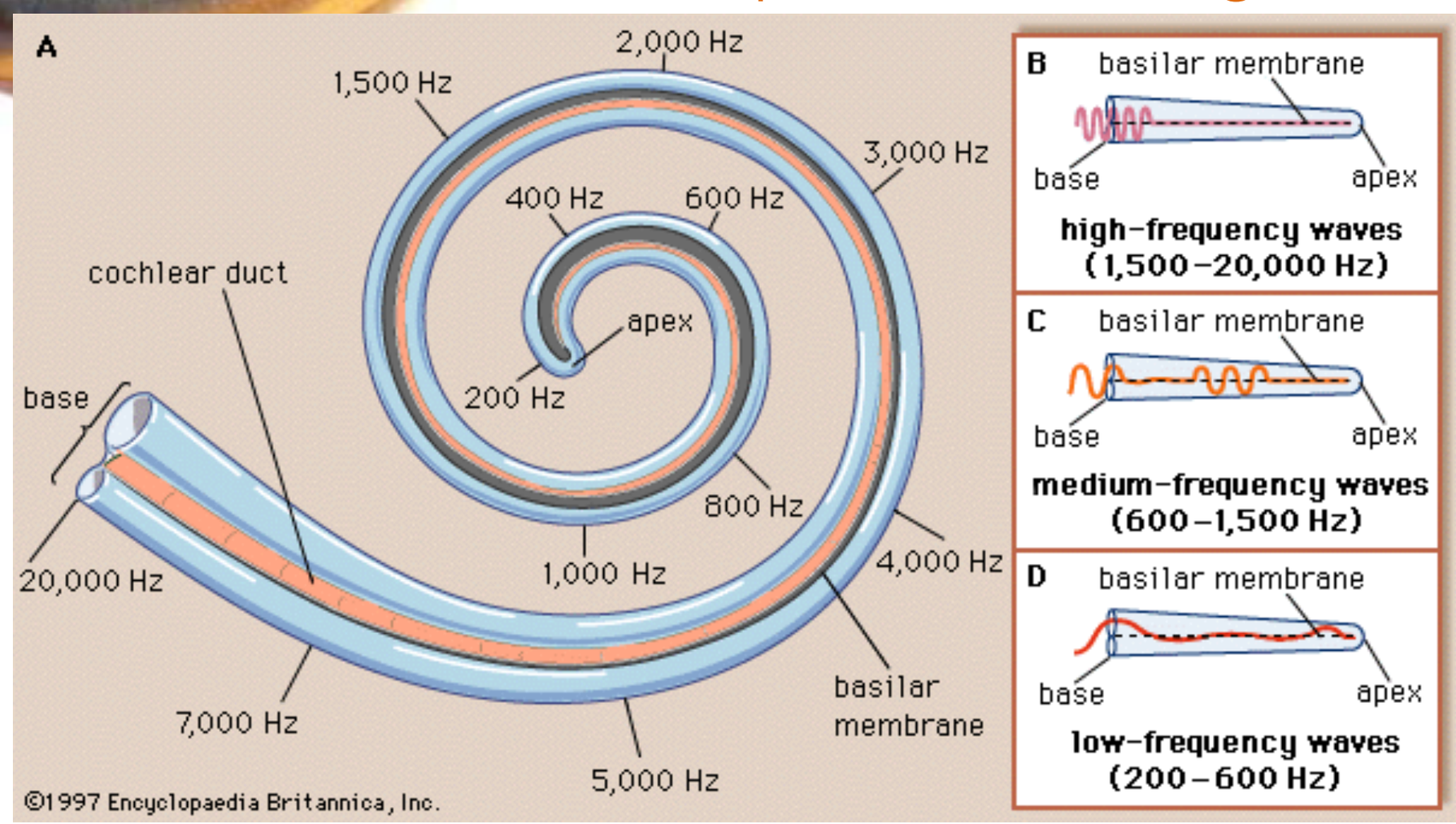


Cochlea



Haarzellen

Frequenzkodierung



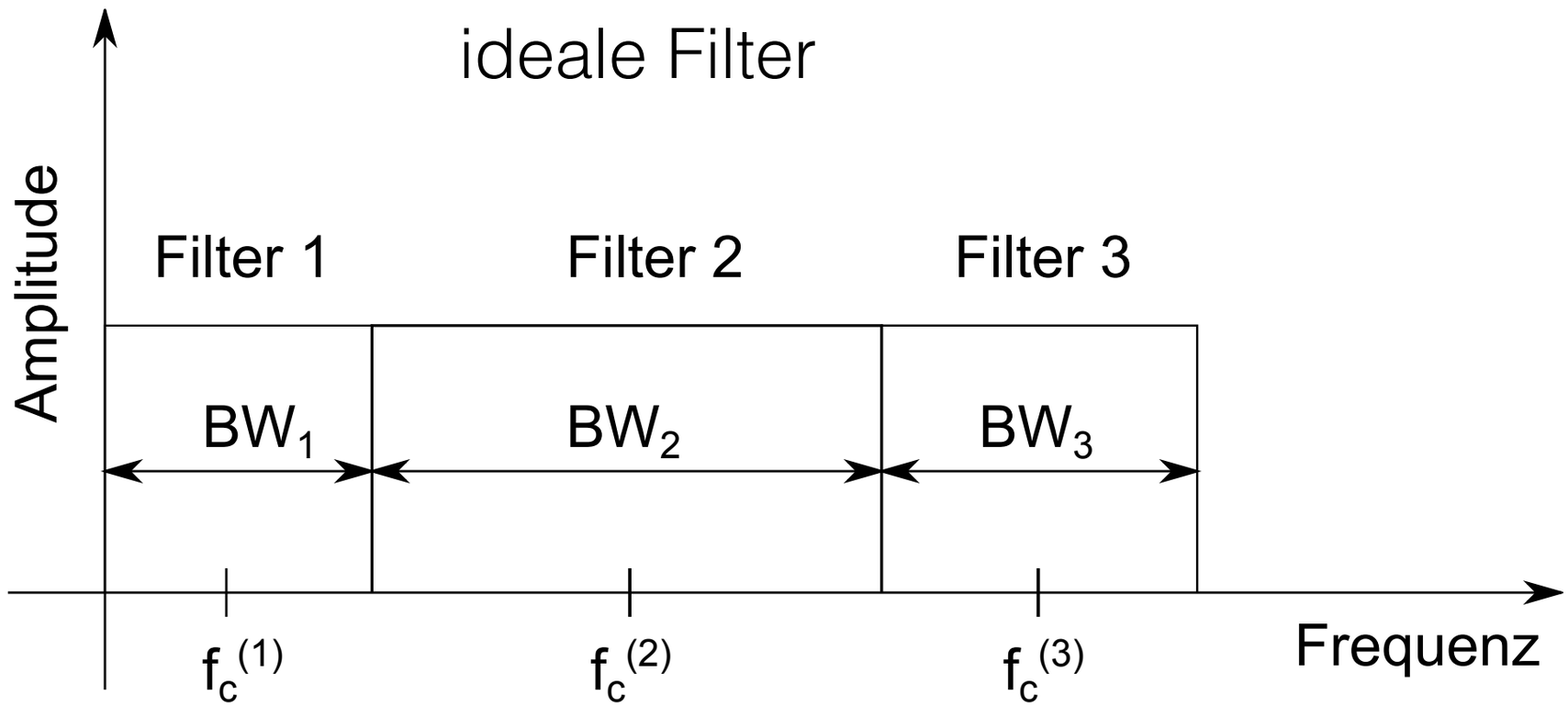
- Dekodierung von verschiedenen Frequenzen (16Hz-20kHz beim Menschen)

- Dekodierung erfolgt an verschiedenen Orten in Cochlea

- Haarzellen in Cochlea **filtern Signale in verschiedenen Frequenzbändern**

- Gehirn setzt Signale in Frequenzbändern zusammen

Struktur der Frequenzfilter



Filter sind nicht-überlappende Bandpass-Filter

BW: *band-width* = Frequenzbreite des Bandpasses

f_c: *center frequency* = Zentrumsfrequenz des Bandpasses

Filter des menschlichen Hörsystems:

- decken vollen Hörbereich ab
- Hörbereich deckt bis zu 12 Oktaven ab
- Oktaven :
  Frequenzintervall dessen Ränder im Verhältnis 2:1 stehen

Filterbank

<u>Definition:</u>

- System generiert Satz von Signalen $s_n(t)$ aus einem Signal $s(t)$

- Signale $s_n(t)$ entsprechen einem Frequenzbereich eines Bandpassfilters n

- Frequenzbereiche decken den Frequenzumfang des Signals vollständig ab.

- der Frequenzfilter n mit Bandbreite BW_n und Zentrumsfrequenz $f_c^{(n)}$ bestimmt Signal $s_n(t)$

- implementiert in der Cochlea

<u>Beispiel:</u> *Third-octave* Filterbank

(gute Näherung der auditorischen biologischen Filterbank)

definiere Basis-Zentrumsfrequenz $f_c^{(0)}$

Zentrumsfrequenzen der Filter: $f_c^{(k)} = 2^{k/3} f_c^{(0)}$

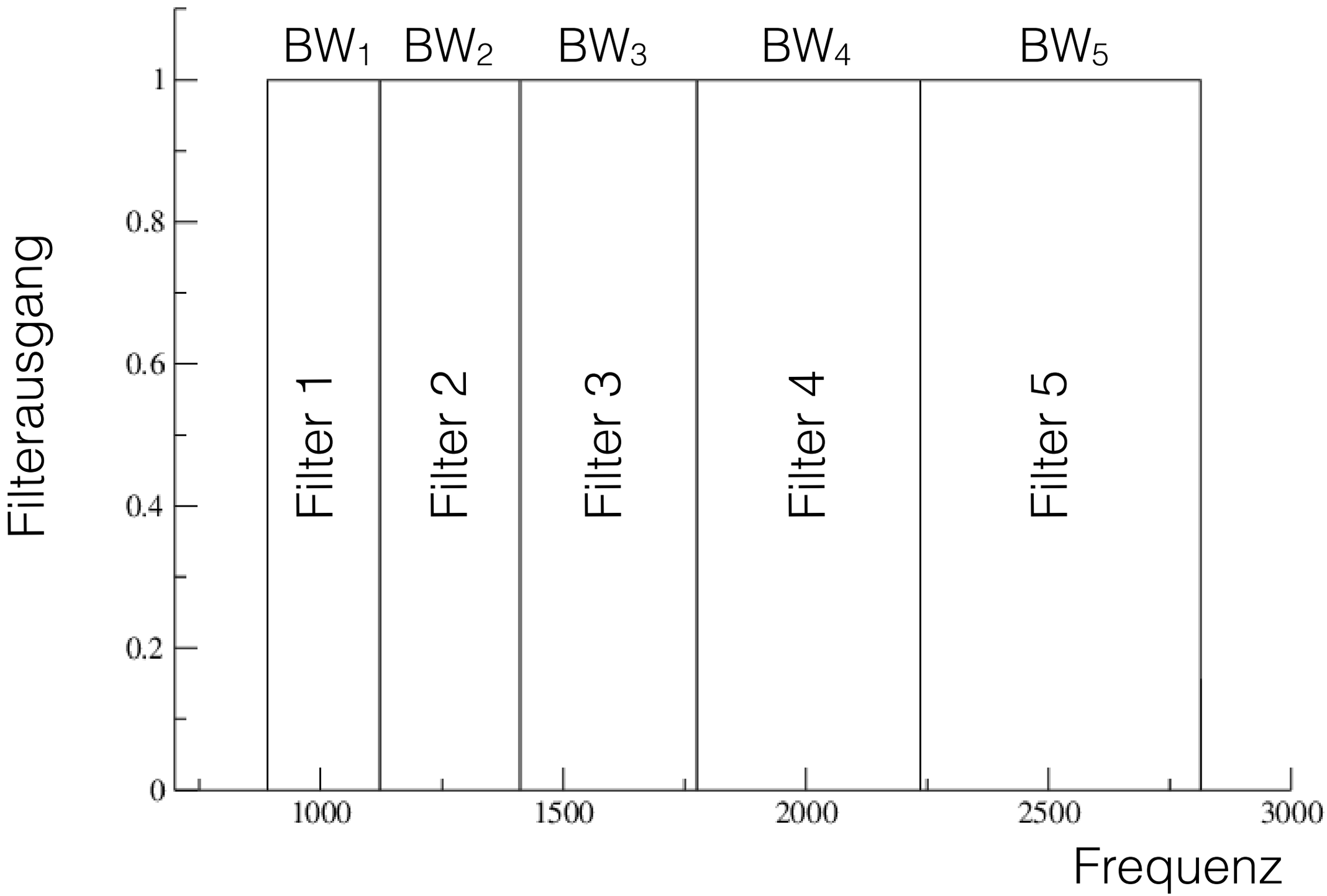
Bandbreiten:

$$BW_k = \sqrt{f_c^{(k+1)} f_c^{(k)}} - \sqrt{f_c^{(k)} f_c^{(k-1)}}$$

$$= \sqrt{f_c^{(k)}} \left(\sqrt{f_c^{(k+1)}} - \sqrt{f_c^{(k-1)}} \right)$$

$$= f_c^{(k)} \left(2^{1/6} - 2^{-1/6} \right)$$

Quality-factor: $Q_k = \dfrac{f_c^{(k)}}{BW_k} = const$


BW1
BW2
BW3
BW4
BW5
Filter 1
Filter 2
Filter 3
Filter 4
Filter 5
Filterausgang
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
1000
1500
2000
2500
3000
Frequenz

$f_c^{(0)}$=1000Hz

kurze Zusammenfassung der Hauptresultate dieses Kapitels:

- Methoden sind anwendbar auf
  im weiteren Sinn stationäre Signale

- Bedingungen an Analyse mittels Fourierreihe

- Sampling und endliche Zeitfenster führen zu Fehlern in Fourieranalyse

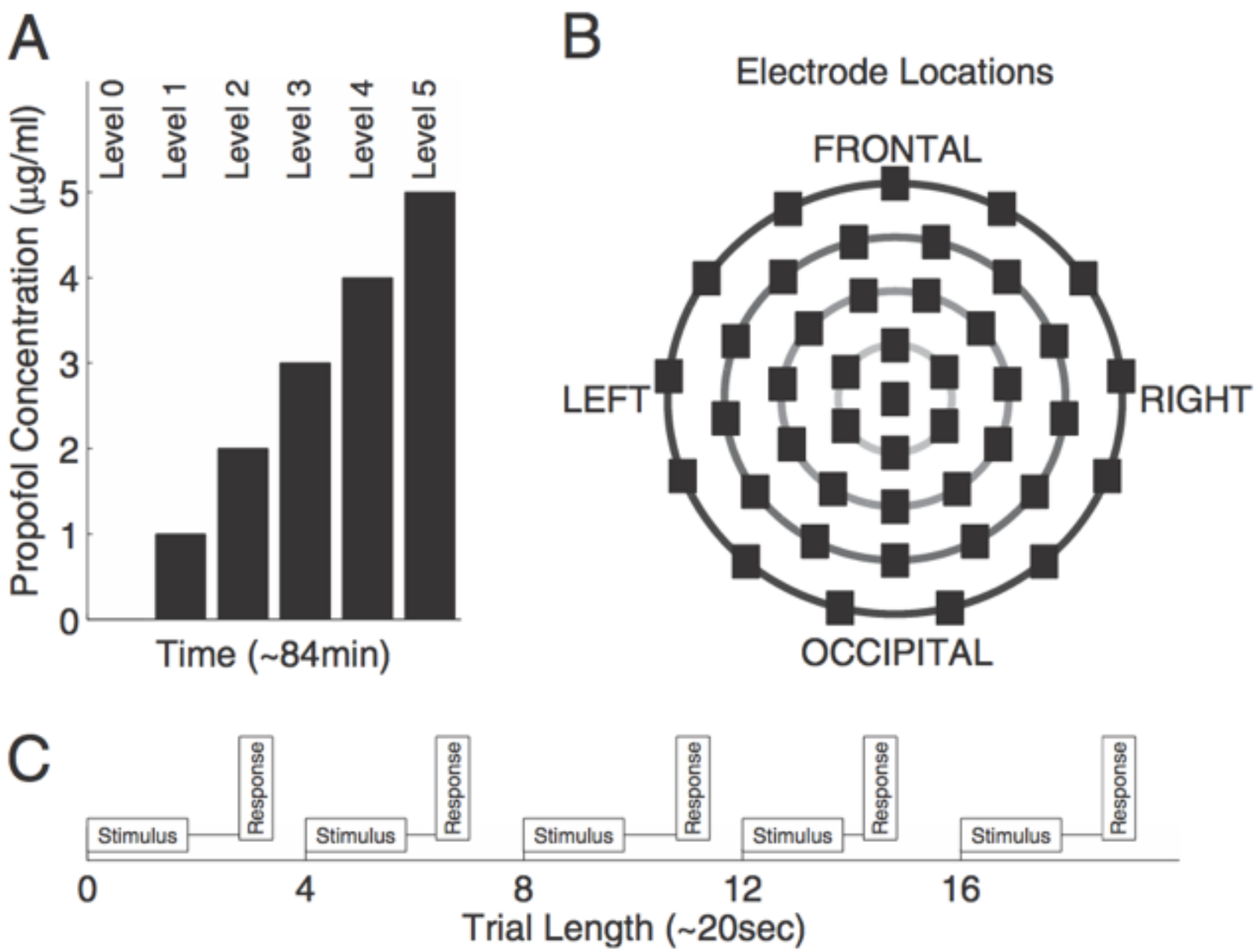
- Lineare Antwort-Theorie

- konkrete Methoden zur Berechnung des PSD

- lineare Frequenz-Filter

Wie können nun biologische Prozesse mit Messdaten zusammenhängen ?

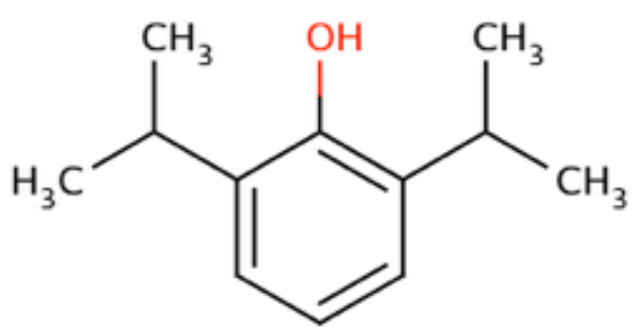
Beispiel: EEG-Experiment mit Menschen (Cimenser et al., PNAS 2010)



Was passiert dabei im Gehirn ?

<u>mikroskopische Skala:</u>

Anästhetikum Propofol

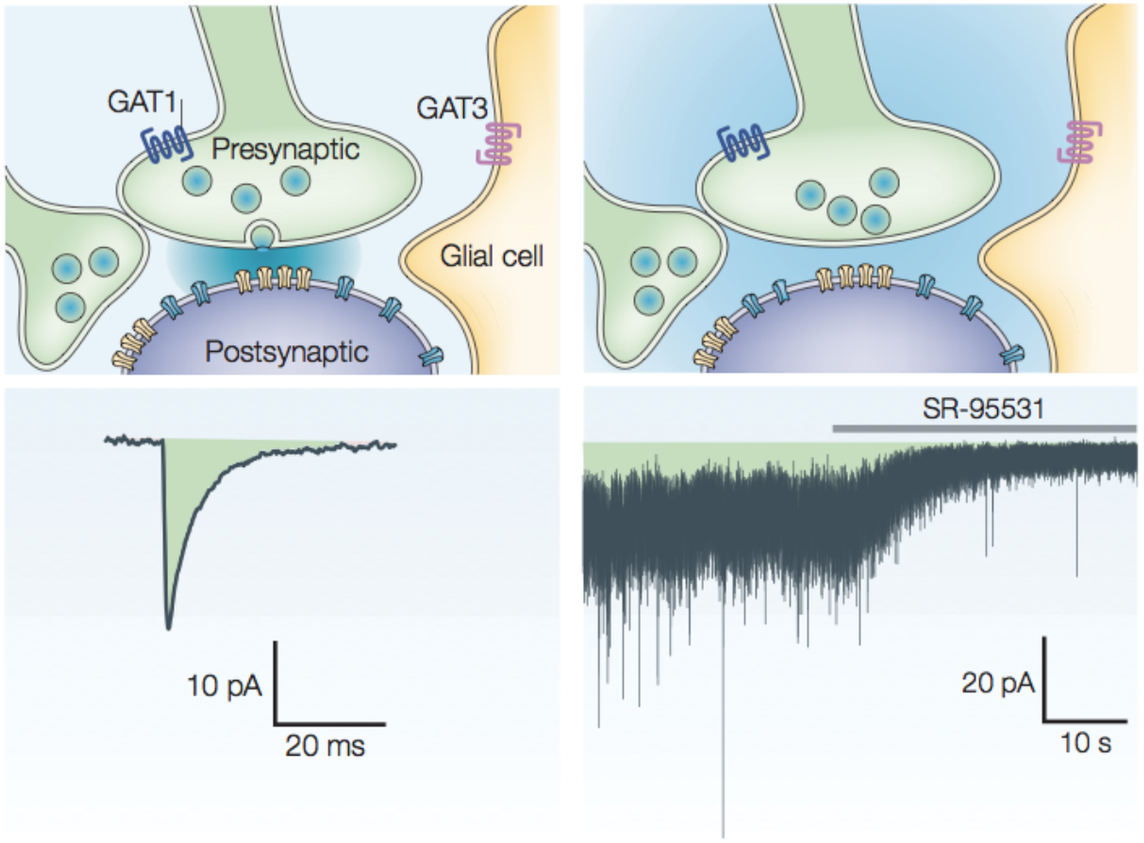


(Diisopropylphenol)

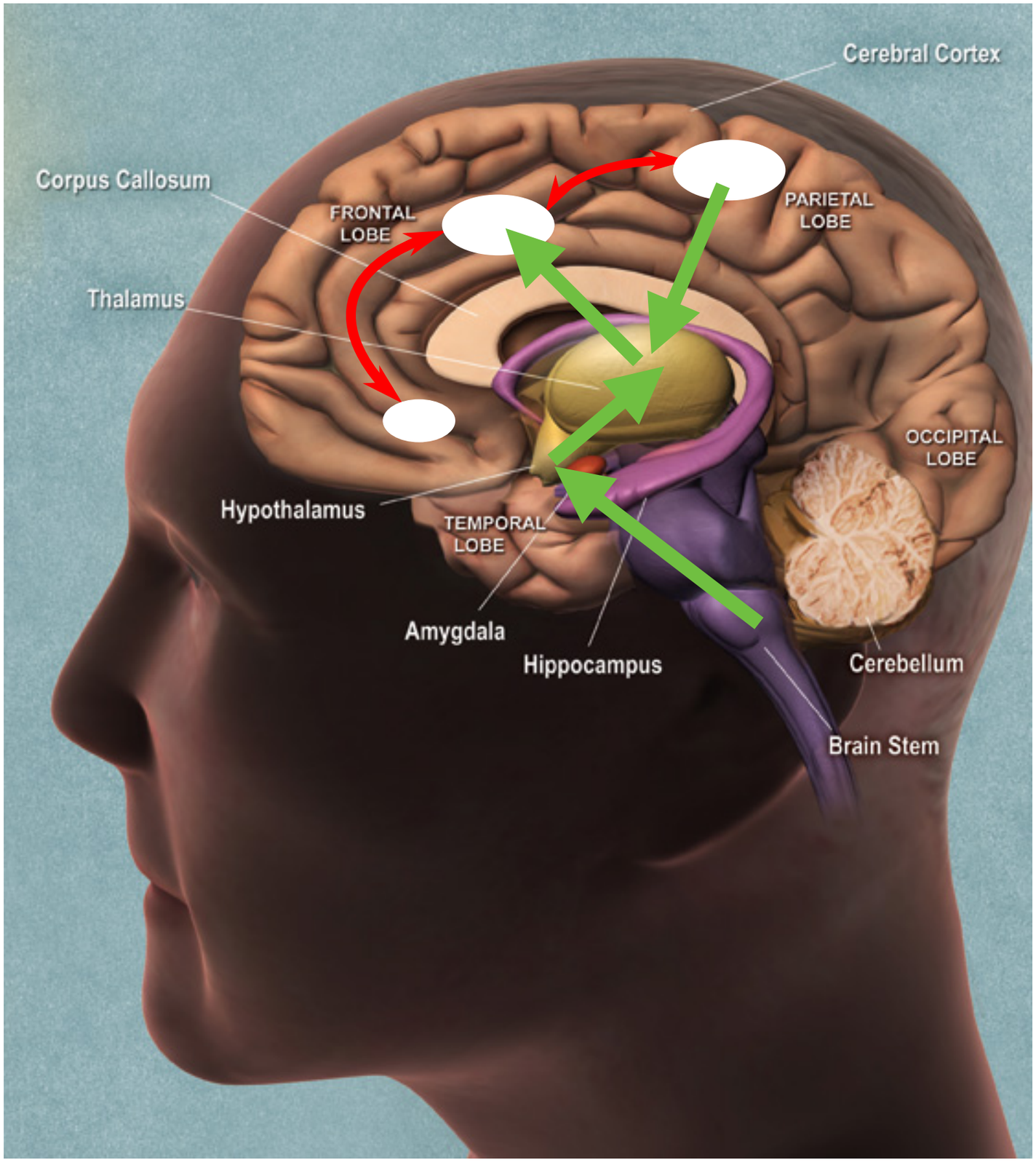
Effekte auf Synapsen

synaptic receptor action

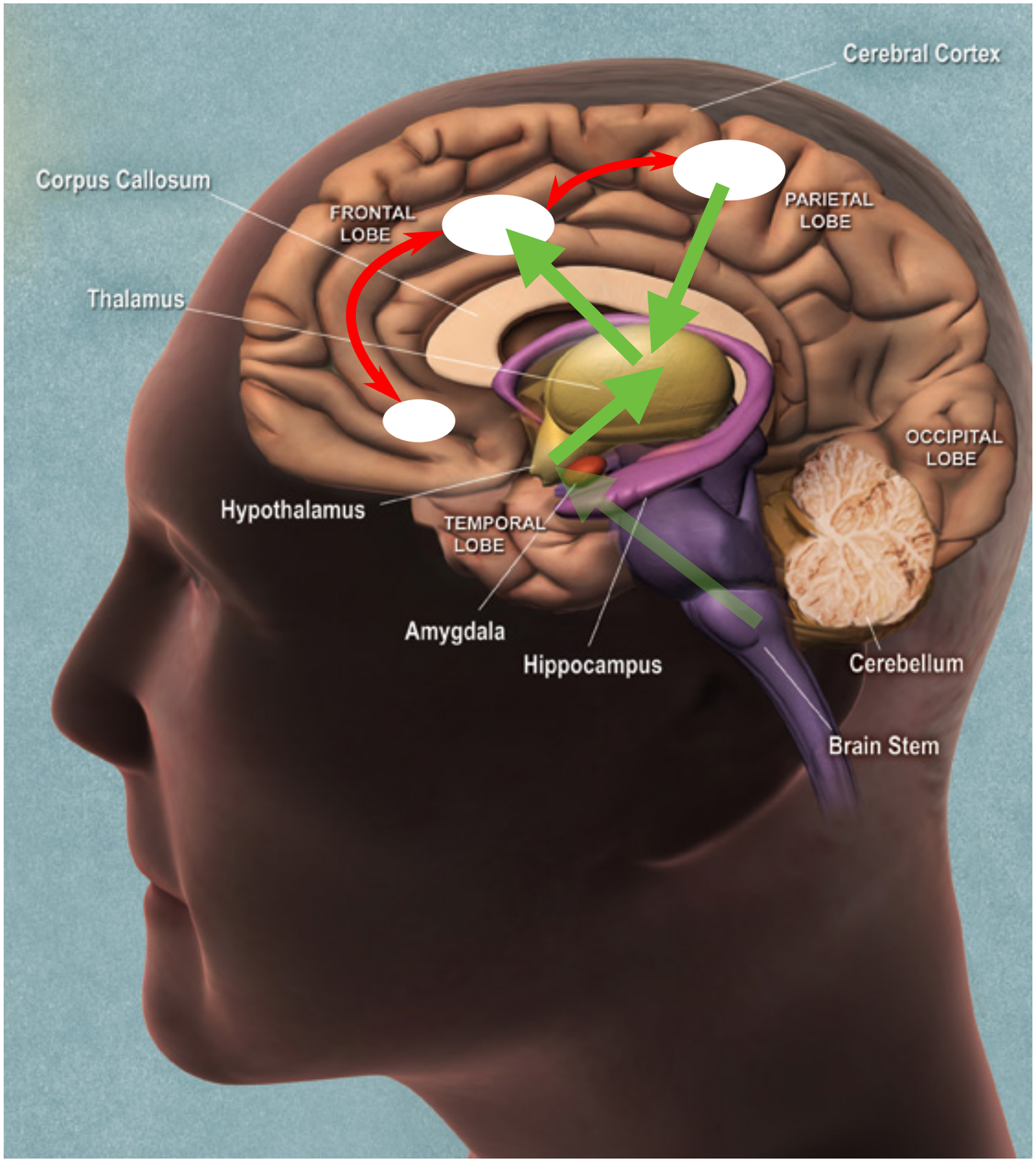
extra−synaptic action



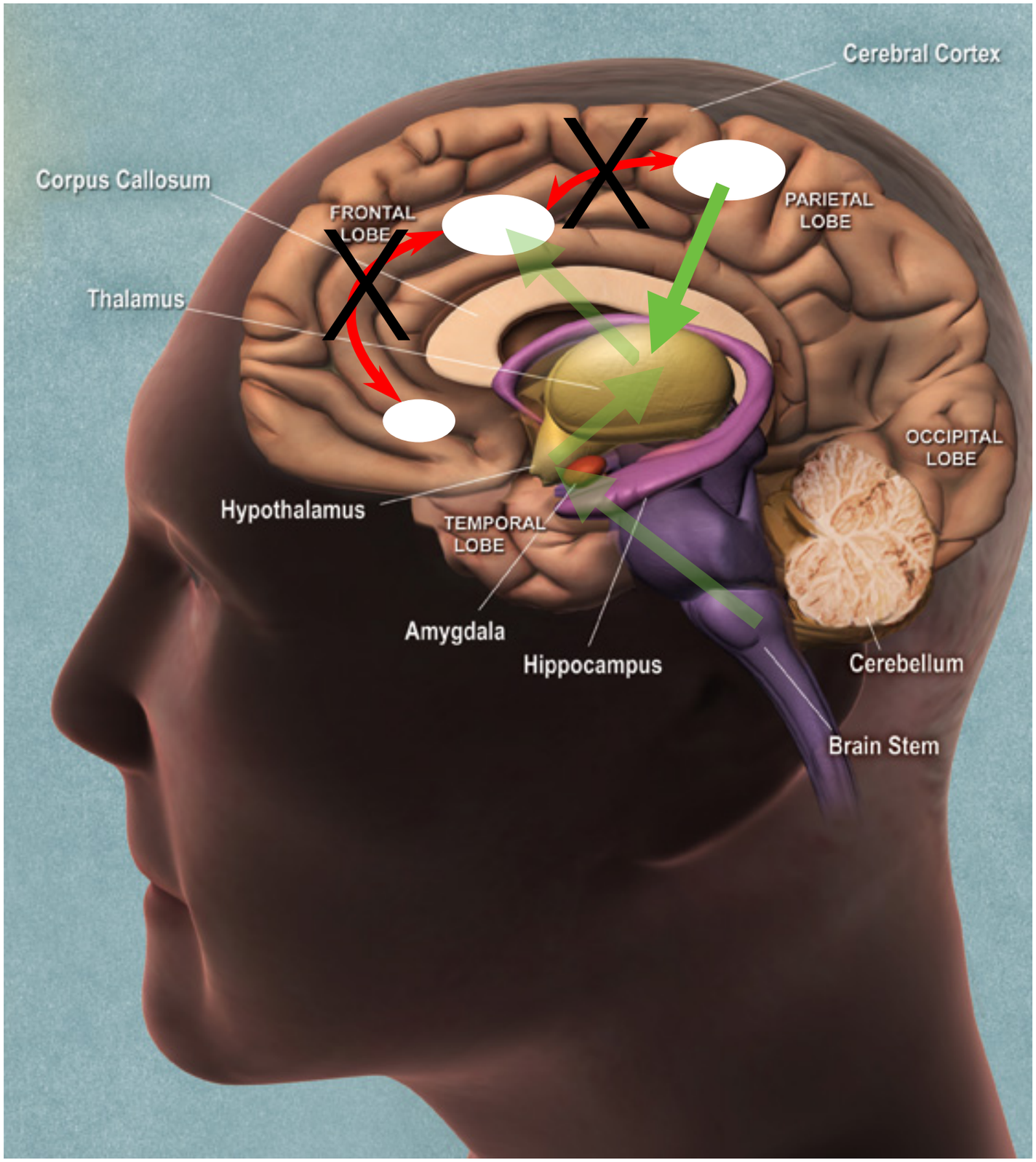
Was passiert im Gehirn bei Bewusstsein ?



Was passiert im Gehirn bei Sedierung ?



Was passiert im Gehirn in tiefer Narkose ?



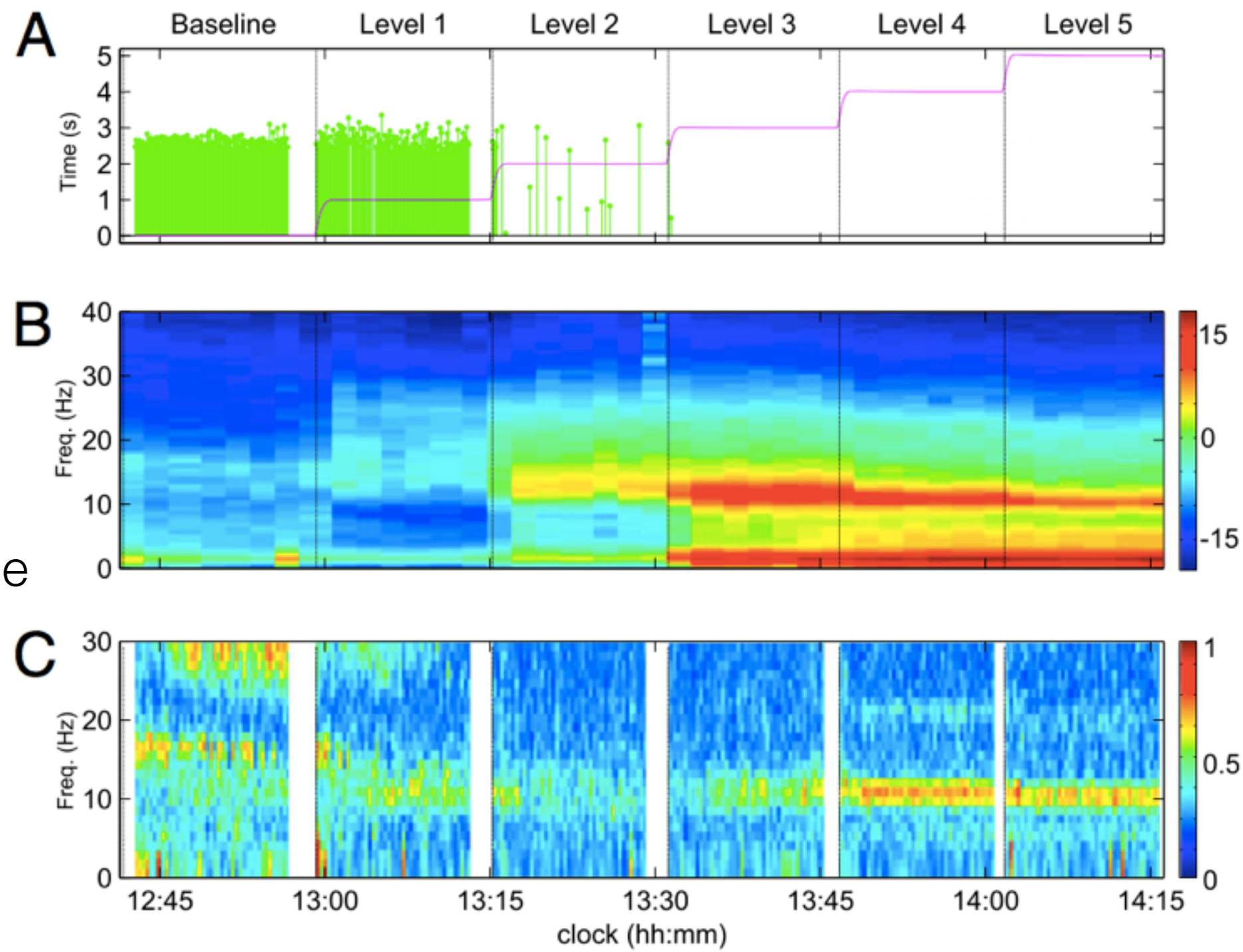
EEG-Experiment unter Anästhesie

makroskopische Skala:

Verhalten

EEG einer frontalen Elektrode

räumliche Kohärenz



Erhöhung der Propofol-Konzentration

nun:

- ~~Methoden sind anwendbar auf *im weiteren Sinn stationäre* Signale~~

- Bedingungen an Analyse mittels Fourierreihe

- Sampling und endliche Zeitfenster führen zu Fehlern in Fourieranalyse

- Lineare Antwort-Theorie

- konkrete Methoden zur Berechnung des PSD

- lineare Frequenz-Filter